













සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන උසස් අධ්‍යාපන අධ්‍යාපන සහ වෘත්තීය අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය  
 கல்வி, உயர் கல்வி மற்றும் தொழிற் கல்வி அமைச்சு  
 Ministry of Education, Higher Education and Vocational Education  
**Ministry of Education, Higher Education and Vocational Education**

**අ.පො.ස (උ.පෙළ) උපකාරක තක්සේරුව - 2026**

සංයුක්ත ගණිතය I  
 இணைந்த கணிதம் I  
 Combined Mathematics I

**10 S I**

**B කොටස**

\* ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a)  $x \in \mathbb{R}$  සඳහා  $f(x) = px^2 + qx + r$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $p > 0$  සහිතව  $p, q, r \in \mathbb{R}$  වේ.

$f(x) \geq \frac{4pr - q^2}{4p}$  බව පෙන්වන්න.

දැන්  $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 1$  හා  $g(x) = x^2 - 2(a + 1)x + a(a - 1)$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $x \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{Q}^+$  වේ.  $[f(x)]_{\text{අවම}}$  සහ  $[g(x)]_{\text{අවම}}$  යනු පිළිවෙළින්  $f(x)$  සහ  $g(x)$  හි අවම අගයන් වේ.

$a$  ඇසුරෙන්  $[f(x)]_{\text{අවම}}$  අගය සොයන්න.

තවදුරටත්  $[g(x)]_{\text{අවම}} - [f(x)]_{\text{අවම}} \geq 3$  වන පරිදි  $a$  ට ගත හැකි අගය පරාසය සොයන්න.

$f(x) = 0$  සහ  $g(x) = 0$  සමීකරණවලට තාත්වික ප්‍රතිඵල මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වන්න.

$\alpha$  සහ  $\beta (> \alpha)$  යනු  $f(x) = 0$  හි මූල යැයි ගනිමු.  $\alpha$  සහ  $\beta$  පරිමේය බව පෙන්වන්න.

$f(x) = 0$  හි මූල  $g(x) = 0$  හි මූල අතර පිහිටයි නම්  $0 < a < 1$  බව පෙන්වන්න.

(b)  $f(x)$  යනු  $x$  හි බහුපද ශ්‍රිතයක් හා  $f'(x)$  යනු  $f(x)$  හි ව්‍යුත්පන්න යැයි ගනිමු.  $f(x)$  යන්න  $(x - a)^2$  මගින් බෙදූ විට ශේෂය  $(x - a)f'(a) + f(a)$  බව පෙන්වන්න; මෙහි  $a \in \mathbb{R}$  වේ.

$x \in \mathbb{R}$  සඳහා  $g(x) = 3x^3 + \lambda x^2 + \mu x - 6$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  වේ.  $g(x)$  යන්න  $(x - 1)^2$  මගින් බෙදූ විට ශේෂය  $-12x - 8$  වේ.  $\lambda = -4$  බව පෙන්වා  $\mu$  හි අගය සොයන්න.

$\lambda$  සහ  $\mu$  හි මෙම අගයන් සඳහා  $(x + 1)$ ,  $g(x)$  හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්,  $g(x)$  යන්න රේඛීය සාධකවල ගුණිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

12. (a) පිරිමි ළමුන් තිදෙනෙක් සහ ගැහැණු ළමුන් තිදෙනෙකුගෙන් සමන්විත සිසුන් සය දෙනෙකු බැගින් පාසල් දෙකකින් වැඩමුළුවකට සහභාගී වේ.

(i) I. කිසිදු සීමා කිරීමක් නොමැති නම්,

II. කමිටුවේ හි සිටින පිරිමි හා ගැහැණු සංඛ්‍යාව සමාන නම් හා එක් එක් පාසලෙන් කමිටුවෙහි සිටින සිසුන් සංඛ්‍යාව සමාන නම්,

ඉහත සිසු කණ්ඩායම අතරින් සය දෙනෙකුගෙන් සමන්විත වන කමිටුවක් ආකාර කීයකින් සැකසිය හැකිවේ ද?

(ii) වැනිලා රසැති කිරි බෝතල් පහක්, වොකලට රසැති කිරි බෝතලයක් සහ ස්ට්‍රෝබෙරි රසැති කිරි බෝතලයක් එක් අයෙකුට හරියට ම එක් බෝතලයක් ලැබෙන සේ කමිටු සාමාජිකයින් අතර ආකාර කීයකින් බෙදා දිය හැකිවේ ද?

(b)  $\frac{3^2 - 2.1}{1.3} \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{5^2 - 2.2}{3.5} \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7^2 - 2.3}{5.7} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$  ශ්‍රේණියේ  $r$  වන පදය  $U_r$  ලියා දක්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\frac{4r^2 + 2r + 1}{(2r - 1)(2r + 1)}$  හි හිතේන භාග සැලකීමෙන්,

$r \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $U_r = \left(\frac{1}{3}\right)^r + f(r) - f(r + 1)$  වන පරිදි  $f(r)$  සොයන්න.

ඒ නයින්,  $n \in \mathbb{Z}^+$  සඳහා  $\sum_{r=1}^n U_r = 1 - \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n$  බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$  අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඵලය සොයන්න.

13. (a)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  හා  $B = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 17 & s \end{bmatrix}$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $q, r, s \in \mathbb{R}$  වේ.

(i)  $q, r$  හා  $s$  අසුරන්  $AB$  සොයන්න.

(ii)  $AB = \begin{bmatrix} k & k-1 \\ k-1 & k \end{bmatrix}$  වන පරිදි  $q, r, s$  හා  $k$  සොයන්න. තව ද  $A$  න්‍යාසයේ ප්‍රතිලෝමය  $A^{-1}$  සොයන්න.

(iii) පහත සමගාමී සමීකරණ යුගල න්‍යාස ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න. ඒ නයින්, සමීකරණ විසඳන්න.

$$2x + 5y = 12$$

$$-3x + y = -1$$

(b)  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  යැයි ගනිමු.  $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$  හා  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$  යන්න  $a + ib$  ආකාරයෙන් හා  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි  $r > 0$  හා  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

$A, B$  යනු ආගන්ඵ සටහනක් මත පිළිවෙළින්  $z_1, z_2$  සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය වන්නේ යැයි ගනිමු.  $\text{Arg}(z_1 + z_2) = \frac{3\pi}{8}$  බව පෙන්වන්න.  $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$  බව අපෝහනය කරන්න.

(c)  $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$  යැයි ගනිමු. ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්,  $\omega^7$  හි අගය සොයන්න.

ඒ නයින්,  $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = 0$  බව පෙන්වන්න.

$\omega^2 + \omega^5 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}$  බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.  $\omega + \omega^6$  හා  $\omega^3 + \omega^4$  සඳහාත් එවැනි ම ප්‍රකාශන

ලබාගන්න. ඒ නයින්,  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$  බව පෙන්වන්න.

14. (a)  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  සඳහා  $f(x) = \frac{x^2 + ax + 3}{(x-2)^2}$  යැයි ගනිමු; මෙහි  $a \in \mathbb{R}$  වේ.

$f(x)$  හි ව්‍යුත්පන්නය,  $f'(x)$  යන්න  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  සඳහා  $f'(x) = \frac{-(a+4)x - (2a+6)}{(x-2)^3}$  මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$y = f(x)$  ප්‍රස්ථාරයට  $x = 1$  හි දී ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව දී ඇත. ඒ නයින්,  $a$  හි අගය සොයන්න. තව ද  $f(x)$  වැඩිවන ප්‍රාන්තරය හා  $f(x)$  අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

$f(x)$  හි ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \in \mathbb{R} - \{2\}$  සඳහා  $f''(x) = \frac{2(2x-1)}{3(x-2)^4}$  බව දී ඇත. ඒ නයින්,  $y = f(x)$  ප්‍රස්ථාරයට නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් පවතින බව පෙන්වන්න. තව ද නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ස්පර්ශෝත්මුව, ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින්  $y = f(x)$  හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) කේන්ද්‍රික බණ්ඩියක හැඩයට නමන ලද  $l$  දිගැති තුනී කම්බියක් සම්පූර්ණයෙන් ම යොදාගනිමින් කරාබුවක් සාදා ඇත. කරාබුව මගින් ආවරණය කළහැකි උපරිම ක්ෂේත්‍රඵලය, සමාන දිගැති කම්බියකින් සාදන ලද සමවතුරසුයක ක්ෂේත්‍රඵලයට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

15. (a)  $\sqrt{2x} = t$  ආදේශය භාවිතයෙන්,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x} + 4} dx \text{ අගයන්න; මෙහි } x > 0.$$

(b)  $I = \int_0^3 x \tan^{-1} \sqrt{x} dx$  ලෙස ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්  $I = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}J$

බව පෙන්වන්න; මෙහි  $J = \int_0^3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x} dx$  වේ.

සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්  $J = \frac{2\pi}{3}$  බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්,  $I$  අගයන්න.

(c)  $k$  නියතයක් වන  $\int_0^k f(x) dx = \int_0^k f(k-x) dx$  සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$$\int_0^\pi x \sec^{2n+1} x \tan x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sec^{2n+1} x \tan x dx \text{ බව පෙන්වන්න. මෙහි } n \in \mathbb{N} \text{ වේ.}$$

ඒ නයින්,  $\int_0^\pi x \sec^{2n+1} x \tan x dx$  අගයන්න.

16.  $l_1 \equiv ax + by + c = 0$  හා  $l_2 \equiv px + qy + r = 0$  සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවක සමීකරණය  $l_1 + \lambda l_2 = 0$  මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි  $\lambda$  යනු පරාමිතියකි.

$l_1 \equiv 4x - 3y - 1 = 0$  හා  $l_2 \equiv 3x - 4y + 2 = 0$  යැයි ගනිමු.  $l_1 = 0$  හා  $l_2 = 0$  සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන සරල රේඛාවේ සමීකරණය පරාමිතික ආකාරයෙන් ලියන්න.

ඒ නමින්,  $l_1$  හා  $l_2$  සරල රේඛා ඡේදන වන ලක්ෂ්‍යය හා  $P \equiv \left(3, \frac{22}{7}\right)$  ලක්ෂ්‍යය හරහා යන  $l = 0$  සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

$l_1$  හා  $l_2$  සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න. ඒ නමින්,  $l_1$  හා  $l_2$  සරල රේඛා අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය  $l = 0$  බව පෙන්වන්න.

$l_1$  හා  $l_2$  සරල රේඛා දෙකම ස්පර්ෂ කරන හා කේන්ද්‍රය  $(-2, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$  වන,  $S_1$  වෘත්තයේ සමීකරණය  $25x^2 + 25y^2 + 100x - 250y + 149 = 0$  බව ද පෙන්වන්න.

කේන්ද්‍රය මූල ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටි වෙනත්  $S_2$  වෘත්තයක්  $S_1$  වෘත්තය ප්‍රලම්භව ඡේදනය කරයි.  $S_2$  හි අරය  $\frac{\sqrt{149}}{5}$  බව පෙන්වන්න.

17. (a)  $\sin A, \cos A, \sin B,$  හා  $\cos B$  ඇසුරෙන්  $\sin(A + B)$  ලියා දක්වන්න.

ඒ නමින්,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta$  බව පෙන්වන්න.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$  බව අපෝහනය කරන්න.

$\sin(A + B)$  භාවිතයෙන්  $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$  බව පෙන්වන්න.

ඒ නමින්, සියලු  $\theta \in \mathbb{R}$  සඳහා  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  අපෝහනය කරන්න.

$\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක අනුයාත පද වේ නම්  $\cos^3 \theta = \sin^2 \theta$  බව පෙන්වන්න.

$\cos^9 \theta + 3\cos^8 \theta + 3\cos^7 \theta + \cos^6 \theta - 1 = 0$  බව අපෝහනය කරන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්,  $ABC$  ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින නීතිය ප්‍රකාශ කරන්න.

$ABC$  ත්‍රිකෝණයේ  $B\hat{A}C$  කෝණ සමච්ඡේදකය  $BC$  පාදය  $D$  හි දී හමු වේ.  $BD:DC = \lambda + 1:\lambda, \lambda > 0$  බව දී ඇත.  $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{3}{4}$  නම්  $\lambda$  හි අගය සොයන්න.

ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵල සැලකීමෙන් හෝ අන් අයුරකින්,  $4ca \sin B + 3ab \sin C = 7bc \sin A$  බව පෙන්වන්න. ඒ නමින්,  $C = \frac{\pi}{4}$  නම්  $\sin B + \cos B = \frac{3}{7} \left(\frac{ab + ca}{bc}\right)$  බව අපෝහනය කරන්න.

(c)  $xy = 1$  බව දී ඇත.  $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$  සඳහා  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y$  සොයන්න.

\*\*\*