மாகாணக் கல்வித் திணைக்களம்-வடமாகாணம்

இணைந்த கணிதம் - I

தரம் : 13 (2023)

10	T	I

மூன்று மணித்தியாலம்
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் 10 நிமிடங்கள்

சுட்டெண்						

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக்கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

(10) இணைந்த கணிதம்-I		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
மொத்தம்		

இணைந்தகணிதம்-I	
இணைந்தகணிதம்-II	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

CS CamScanner

பகுதி A

1. **கணிதத்தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n}(2r+1) = n(n+2)$ எனக் காட்டுக.

2. $y = |4-x|$, $y = 3\big||x| - 2\big|$ ஆகிய வரைபுகளை **ஒரே வரிப்படத்தில்** பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து, அல்லது வேறு விதமாக** $\big||x| - 2\big| - \frac{1}{3}|x-4| \leq 0$ என்னும் சமனிலியைத் திருப்தியாக்கும் x இன் நேர் மெய்யெண் தீர்வுத் தொடையைக் காண்க.

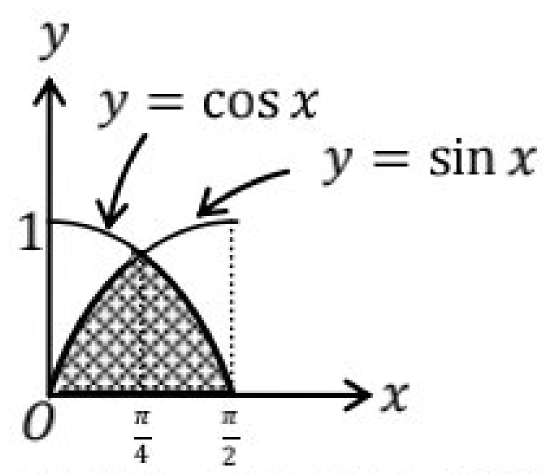
CamScanner

3. ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z - 4i| = 2$, $Arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{\pi}{6}$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண்கள் $\bar{z}$ இன் ஒழுக்குகளைப் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து,** இரு சமன்பாடுகளையும் திருப்தியாக்கும் சிக்கல் எண் z_0 எனின் $|z_0|$ ஐ காண்க.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ எனவும் $n \geq 4$ எனவும் கொள்வோம். $(1 + kx + x^2)(1 + x)^n$ என்பதன் விரியில் x^4 இன் குணகத்தை எழுதுக. **இதிலிருந்து,** ${}^{2023}C_4 + 2\,{}^{2023}C_3 + {}^{2023}C_2 = {}^{2025}C_4$ எனக் காட்டுக.

5. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{1-\cos(\tan x)} = 2$ எனக் காட்டுக.

6. $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ இற்கு $y = \sin x$, $y = \cos x$ ஆகிய வளையிகளினாலும் x-அச்சினாலும் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசம் S ஆனது உருவில் நிழற்றிக் காட்டப்பட்டுள்ளது. S ஐ x அச்சைப் பற்றி 2π ஆரையன்களினூடாகச் சுழற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{\pi}{4}(\pi - 2)$ கன அலகுகள் எனக் காட்டுக.



7. ஒரு வளையி $0 < t < 1$ இற்கு $x = at^2, y = at^3$ ஆகியவற்றினால் பரமானமுறையாகத் தரப்படுகின்றது. வளையிக்கு புள்ளி $P(at^2, at^3)$ இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $3tx - 2y - at^3 = 0$ எனக் காட்டுக. இத்தொடலி x, y அச்சுக்களில் சமநீளமுள்ள துண்டங்களை வெட்டினால் P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

8. $5x + y - 1 = 0,\ 3x - 4y + 1 = 0$ என்னும் நேர் கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் நேர்கோடு l ஆனது நேர் x, y அச்சுக்களை உற்பத்தியில் இருந்து சம தூரத்தில் இடைவெட்டும் எனின் l இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

CamScanner

9. $(1, 1)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் கோடு $x + 2y - 4 = 0$ இல் மையத்தைக் கொண்டுள்ளதும் வட்டம் $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ஐ நிமிர்கோணமுறையாக இடைவெட்டுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

10. $\sec\theta - \tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** $\tan\frac{\pi}{8}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

CamScanner

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ எனின், சமன்பாடு $3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$ இற்கு மெய்ம் மூலகங்கள் உள்ளனவெனக் காட்டுக.

ஒரு மூலம், மற்றையதன் மூன்று மடங்கு எனின், $(a+b+C)^2 = 4(ab+bc+ca)$ எனக்காட்டுக.

(b) $k \in \boldsymbol{R}$ எனவும் $f(x) = 16x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ எனவும் கொள்வோம். சமன்பாடு $f(x) = 0$ இற்கு மெய்ம் மூலங்கள் இருப்பின் k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இம்மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $4\alpha,\ 4\beta$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டை k சார்பில் காண்க.

(c) $2x^3 - 3ax^2 + ax + b$ என்னும் பல்லுறுப்பியை $(x+2)$ இனால் வகுக்கும் போது மீதி -54 உம், $(x-1)$ அதன் ஒரு காரணியும் எனின், a, b இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. காண்க. a, b இன் இப்பெறுமானங்களிற்கு பல்லுறுப்பியை ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாகத் தருக.

இதிலிருந்து, பின்வரும் பல்லுறுப்பிகளைக் காரணிப்படுத்துக.

(i) $2x^6 - 9x^4 + 3x^2 + 4$ (ii) $4x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

12. (a) ஒவ்வொரு மாணவனுக்கும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பந்தாவது கிடைக்கக்கூடியவாறும் பந்துகள் எதுவும் மீதமாக இல்லாதவாறும் ஐந்து ஒரே மாதிரியான சிவப்புப் பந்துகளையும் மூன்று ஒரே மாதிரியான நீலப்பந்துகளையும் இரண்டு ஒரே மாதிரியான வெள்ளைப் பந்துகளையும் ஐந்து மாணவர்களுக்கு பகிர்ந்தளிக்க வேண்டியுள்ளது.

(i) மூன்று மாணவர்களுக்கு ஒரு நீலப்பந்து வீதமும் எஞ்சியுள்ள இரு மாணவர்களில் ஒரு மாணவனுக்கு ஐந்து சிவப்புப் பந்துகளும் மற்றைய மாணவனுக்கு இரண்டு வெள்ளைப் பந்துகளும் கிடைக்கக்கூடியதாக

(ii) குறித்த ஒரு மாணவனுக்கு ஐந்து சிவப்புப் பந்துகள் கிடைக்கக்கூடியதாக

(iii) எல்லா மாணவர்களுக்கும் செப்பமாக இரு பந்துகள் வீதம் கிடைக்கக்கூடியதாகவும் ஆனால் எவருக்கும் நீலப்பந்தும் வெள்ளைப்பந்தும் ஒன்றாகக் கிடைக்காதவாறும்

பகிர்ந்தளிக்கத்தக்க வெவ்வேறு விதங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $U_r = \frac{(-1)^r}{(2r-1)(2r+3)}$ எனவும் $f(r) = \frac{A}{(2r-1)} + \frac{B}{(2r+1)}$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு A, B ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகும்.

$r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{1}{(2r-1)(2r+3)} = f(r) + f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $A,\ B$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைத் துணிக.

CS CamScanner

இதிலிருந்து அல்லது வேறு விதமாக, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு

$\sum_{r=1}^{n} U_r = -\frac{1}{6} + \frac{(-1)^n}{4}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குமெனக் காட்டி அதன் கூட்டுத்தெகையையும் காண்க.

$\sum_{r=1}^{\infty}(U_r + 5U_{r+1})$ ஐக் காண்க.

13. (a) $\boldsymbol{B} \equiv \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $x \neq y,\ y \neq 0$ என்பது வரிசை 2×2 இல் உள்ள ஒரு தாயம் ஆகும்

(i) தாயம் $\boldsymbol{B}$ இற்கு நேர்மாறு தாயம் $\boldsymbol{B}^{-1}$ உள்ளதெனக் காட்டுக.

(ii) $\boldsymbol{B}^{-1}$ ஐ எழுதுக

(iii) $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{I}$ எனின் $x = -2$, $y = -3$ எனக் காட்டுக. இங்கு $\boldsymbol{I}$ ஆனது வரிசை 2×2 இல் உள்ள அலகுத் தாயம் ஆகும்.

(iv) $x = -2$, $y = -3$ இற்கு $\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$ என வாய்ப்புப் பார்க்க இங்கு $\boldsymbol{O}$ ஆனது 2×2 பூச்சியத்தாயம் ஆகும்.

(v) $x = -2$, $y = -3$ இற்கு $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 + \boldsymbol{B}^3 + \boldsymbol{B}^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \boldsymbol{B}^{100}$ ஐக் காண்க.

(b) $z \in \mathbb{C}$ இற்கு $\bar{z}$, $|z|$ ஆகியவற்றை வரையறுத்து $z\bar{z} = |z|^2$ எனக் காட்டுக

$c \neq 1$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ஆகுமாறு $a, b, c \in R$ இற்கு $z = \frac{a + i\,b}{1-c}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $|z|^2 = \frac{1 + c}{1-c}$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** c ஐ z, $\bar{z}$ சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(ii) $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ ஆகியவற்றை a, b, c சார்பில் கண்டு, **இதிலிருந்து,** a, b ஐ z, $\bar{z}$ சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(iii) $|z| = \sqrt{3}$ ஆகவும் $Arg(z) = \tan^{-1}(\sqrt{2})$ ஆகவும் இருப்பின் a, b, c ஆகியவற்றைக் காண்க.

(c) $n \in \mathbb{Z}$ இற்கு $\theta \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ எனவும் $z = \cos\theta + i\sin\theta$ எனவும் கொள்வோம்.

த மோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

$(1 + i\tan\theta)^4 + (1 - i\tan\theta)^4 = \frac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta}$ எனக் காட்டுக

இதிலிருந்து, $z = i\tan\frac{\pi}{8}$ ஆனது $(1+z)^4 + (1-z)^4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டை திருப்தியாக்கும் எனக் காட்டி, சமன்பாட்டின் மற்றைய மூலங்களை $i\tan\alpha$ வடிவில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $0 < \alpha < \pi$ ஆகும்.

CamScanner

14. (a) $x \neq 0$ இற்கு $f(x) = 1 + \frac{x+1}{x^2}$ எனக் கொள்வோம். $f'(x) = -\frac{x+2}{x^3}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, சார்பு $y = f(x)$ ஆனது அதிகரிக்கும் ஆயிடையையும் குறையும் ஆயிடைகளையும் காண்க.

மேலும் $y = f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$f''(x) = \frac{2(x+3)}{x^4}$ **எனத் தரப்பட்டுள்ளது.**

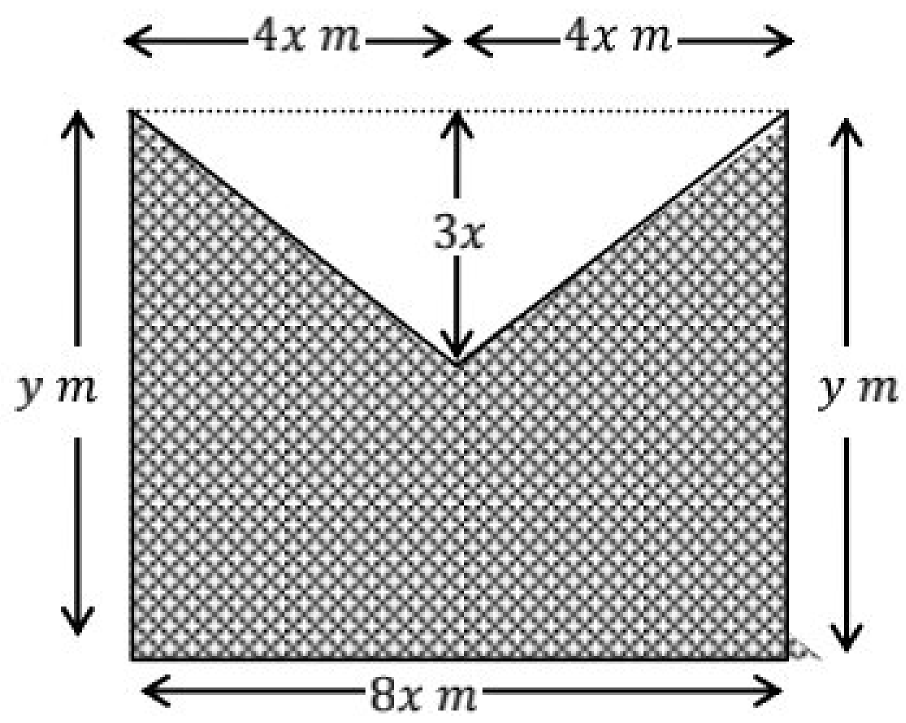
$y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி, $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

$[k, 0)$ மீது $f(x)$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கும் k இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) படத்தில் காட்டப்பட்ட நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $84\ m^2$ ஆகும். இது நீளம் $y\ m$ ஐயும் அகலம் $8x\ m$ ஐயும் உடைய செவ்வகத்தில் இருந்து அடி $8x\ m$ ஐயும் உயரம் $3x\ m$ ஐயும் உடைய ஒரு முக்கோணியை அகற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது. நிழற்றிய பிரதேசத்தின் சுற்றளவு $L\ m$ ஆனது

$0 < x \leq \sqrt{7}$ இற்கு $L = 21x + \frac{21}{x}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. L குறைந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்க x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



15. (a) $\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக்குக. **இதிலிருந்து,** $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x+1)(x^2+1)} dx = \frac{q}{p^2} \ln p + \frac{\pi}{p^3}$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் $p,\ q$ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ ஐக் காண்க.

பகுதிகளாத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} x\, dx = \frac{2k+1}{2k+2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x\, dx$ எனக் காட்டுக.

கணிதத் தொகுத்தறி முறை மூலம் $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}.(n!)^2}$ எனக் காட்டுக.

(c) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx$ எனக் காட்டுக,

இதிலிருந்து, $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

CamScanner

16. வட்டம் S_1 ஆனது $x^2 + y^2 - 16x - 36 = 0$ இனால் தரப்படுகின்றது. வட்டம் S_2 ஆனது $A(-7, 0)$ ஐ மையமாகக் கொண்டதும் வட்டம் S_1 ஐ வெளிப்புறமாகத் தொட்டுச் செல்லும் ஒரு வட்டம் ஆகும்.

(a) வட்டம் S_2 இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(b) வட்டங்கள் S_1, S_2 ஆகியவற்றின் பொதுத் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(c) $P(h, k)$ ஆனது இரண்டாம் கால்வட்டத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும். S_3 ஆனது $B(-7, 40)$ ஐ மையமாகவும் S_2 இன் ஆரைக்குச் சமமான ஆரையைக் கொண்ட ஒரு வட்டமாகும்.

(i) P ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டம் S_1, S_2 ஆகிய வட்டங்களை வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றது எனின், $8h^2 - k^2 - 8h - 48 = 0$ எனக் காட்டுக.

(ii) P ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டம் S_2, S_3 ஆகிய வட்டங்களை வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றது எனின், P இன் ஒழுக்கைக் காண்க.

(iii) P ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் S ஆனது S_1, S_2, S_3 ஆகிய வட்டங்களை வெளிப்புறமாகத் தொடுகின்றது எனின், வட்டம் S இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. (a) (i) $\tan x = \lambda \tan y$ எனின் $\sin(x + y) = (\lambda + 1)\cos x \sin y$ எனக் காட்டுக.

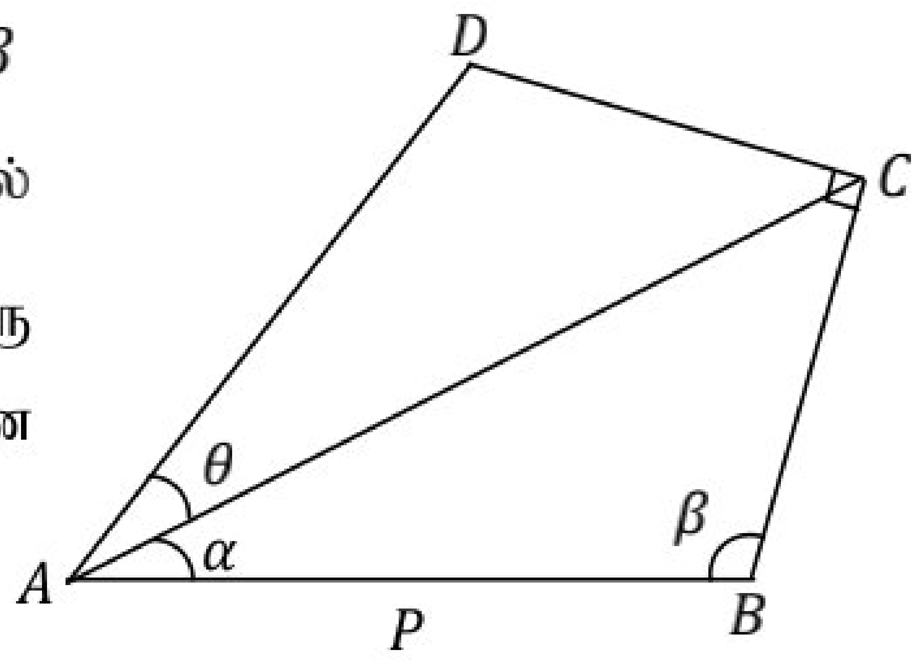
இதிலிருந்து, $(\lambda + 1)\sin(x - y) = (\lambda - 1)\sin(x + y)$ எனக் காட்டுக

(ii) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = k\tan\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)$ எனத் தரப்படின் $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{k+1}{2(k-1)}$ எனக் காட்டி,

$(\sqrt{2} - 1)\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} + 1)\tan\left(\theta + \frac{\pi}{12}\right)$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளைக் காண்க; இங்கு $0 \leq \theta \leq \pi$ ஆகும்.

(b) வழக்கமான குறிப்பீட்டில் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு **சைன் நெறியைக்** கூறுக.

முக்கோணி ABC இல் $AB = p$, $C\hat{A}B = \alpha$, $C\hat{B}A = \beta$ ஆகும். D ஆனது $C\hat{A}D = \theta$, $B\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறு உருவில் காட்டியவாறு முக்கோணி ABC இற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும். **சைன் நெறியைப்** பொருத்தமான முக்கோணிகளிற்குப் பிரயோகிப்பதன் மூலம்



(i) $\frac{AC}{\cos(\alpha+\beta+\theta)} = -\frac{CD}{\sin\theta} = \frac{AD}{\cos(\alpha+\beta)}$ எனவும்

(ii) $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{p}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{BC}{\sin\alpha}$ எனவும்

காட்டுக.

$C\hat{B}D = \frac{\pi}{4}$ எனின் $\cos(\alpha + \beta + \theta) = -\frac{\sin\theta\,\sin\beta}{\sin\alpha}$ எனவும் $AD = -\frac{p\sin\alpha}{\sin\theta\tan(\alpha+\beta)}$ எனவும் காட்டுக.

(c) $\tan(\tan^{-1}3x - \tan^{-1}2) + \tan(\tan^{-1}3 - \tan^{-1}2x) = \frac{3}{8}$ ஐத் தீர்க்க.