கா.பொ.த (உ/த) உதவிக் கருத்தரங்குத் தொடர் - 2013

இணைந்த கணிதம்

மீட்டல் பயிற்சி வினாப்பத்திரம்

10	
T	II

தயாரிப்பு : கல்வியமைச்சின் வழிகாட்டலுடன் தயாரிக்கப்பட்டது.

பகுதி II

காலம் : 3 மணித்தியாலங்கள்

பகுதி A

01. பாதையொன்றில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று $2a$ இடைத்தூரத்தில் உள்ள புள்ளிகள் A, B ஆகும். A யிலிருந்து $\frac{a}{3}$ தூரத்தில் AB இற்கிடையே அதே நேர்கோட்டில் உள்ள C எனும் புள்ளியில் வீதித்தடையொன்றுள்ளது. லொறியொன்றானது A யினை u வேகத்துடன் கடந்து அதே வேகத்துடன் சீராக இயங்கி C யினை அடைகின்றது. C யில் உள்ள தடை காரணமாக C யில் வேகம் W ஆல் தீடிரென குறைகின்றது பின் சீராக அமர்முடுகி B யில் சென்று ஓய்வடைகின்றது.

இவ்வியக்கத்துக்கான வேக - நேர வளையியினை வரைக.
இதனை உபயோகித்து இவ் இயக்கத்துக்கான நேரத்தினையும் அதன் லொறியின் அமர்முடுகலையும் காண்க.

02. O எனும் புள்ளி குறித்து புள்ளிகள் A, B என்பவற்றின் தானக்காவிகள் முறையே $2i+3i$, $i+j$ ஆகும். இங்கு i, j என்பன OX, OY அச்சுவழியேயான தானக்காவிகள் ஆகும்.

i) கோணம் AOB இன் பெறுமானத்தை காண்க.

ii) புள்ளி C யின் தானக்காவி O குறித்து $-2i+j$ ஆகுமெனின் OC, AB என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என காட்டுக.

03. $3m$ திணிவுடைய திண்மக்கோளம் A ஆனது $4u$ வேகத்துடனும், $2m$ திணிவுடைய சரியொத்த இன்னோர் திண்மக்கோணம் B ஆனது $3u$ வேகத்துடனும் ஒன்றையொன்று நோக்கி இயங்கி மோதுகின்றன மோதலினால் A ஓய்வடைகின்றது ஆயின், B யின் இயக்கத்திசை மாறுகின்றது என காட்டி அதன் பெறுமானத்தினை காண்க.

04. சைக்கிளோட்டி ஒருவரினதும் வண்டியினதும் மொத்தத் திணிவு $90kg$ ஆகும். கிடையுடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{15}\right)$ சாய்வில் மாறாத்தடை விசைக்கெதிராக கீழ்நோக்கி இயங்குகையில் அவர் வேலை செய்யாதுள்ளபோது அடையக்கூடிய உயர்கதி $36km/h$ ஆகும். சைக்கிளுக்கான தடைவிசை அதன் வேகத்துக்கு நேர்விகிதசமனாக மாறுகின்றது என கொண்டு கிடைத்தரையில் சைக்கிளேட்டி $24km/h$ கதியுடன் செல்கையில் சைக்கிளோட்டி வேலை செய்யும் வீதத்தினை காண்க.

05. $2W$ நிறையும் a ஆரையுமுடைய ஓர் சீர்த்திண்ம அரைக்கோளம் அதன் தளமுகம் கிடையாக இருக்குமாறு வளைமேற்பரப்பு கிடைமேசையொன்றினை தொட்டவண்ணம் சமநிலையிலுள்ளது. ஓர் $\frac{W}{2}$ நிறையுடைய பூச்சியொன்றானது இத்தளமுகத்தில் ஓர் புள்ளியில் உள்ளபோது தளமுகம் கிடையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ கோணத்தினை அமைக்கின்றது ஆயின் பூச்சியின் நிலையை தளமுகத்தின் மையத்திலிருந்து காண்க.

06. AB என்பது $2a$ நீளமும் W நிறையுமுடைய சீர்க்கோல் ஆகும் இக்கோலின் ஓர்முனை A யானது கரடான கிடைத்தரையில் கிடக்க, அக்கோலில் உள்ள புள்ளி C ஆனது ஒப்பமான முளையொன்றுக்கெதிராக கிடக்க கோல் எல்லைச்சமநிலையிலுள்ளது கோலிற்கும் தரைக்கும் இடையிலான உராய்வுக்குணகம் $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகும். சமநிலையில் கோலானது கிடையுடன் 60^o அமைக்கின்றது ஆயின் BC யின் நீளத்தினை காண்க.

07. விவாகம் செய்த தம்பதியினர் 30 ஆண்டுகள் உயிர் வாழ்வதற்கான நிகழ்தகவு கணவனுக்கு $\frac{1}{3}$ உம், மனைவிக்கு $\frac{1}{2}$ உம் ஆகும். அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் உயிர் வாழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவுகள் ஒன்றுக்கொன்று சாராதவை ஆகும். அவ்வாறான ஒருதம்பதியினர் 30 வருடங்களுக்கு மேல்

(i) இருவரும் வாழக்கூடிய
(ii) குறைந்தது ஒருவராவது வாழக்கூடிய நிகழ்தகவுகளை காண்க.

08. A, B என்பன S எனும் மாதிரிவெளியில் உள்ள யாதுமிரு நிகழ்ச்சிகளாகும் $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A/B')=\frac{2}{5}$, $P(A/B')=\frac{3}{7}$ ஆகும். இங்கு B` என்பது B யின் நிரப்பு நிகழ்ச்சியினை குறிக்கும் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை காண்க.

(i) $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$

(ii) A, B என்பன ஒன்றுக்கொன்று புறநீங்கலானவையா? உமது விடைக்கு காரணத்தினை தருக.

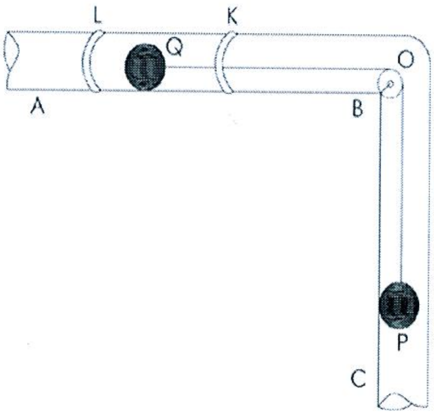
09. கீழுள்ள தொடர் மாறிக்குரிய அட்டவணையினை அவதானித்து அதில் வரவேண்டிய வகுப்பாயிடைகளை எழுதுக.

வகுப்பாயிடை	நடுப்பெறுமானம்	மீடிறன்
....	30	15
....	35	23
....	40	17
....	45	15
....	50	10

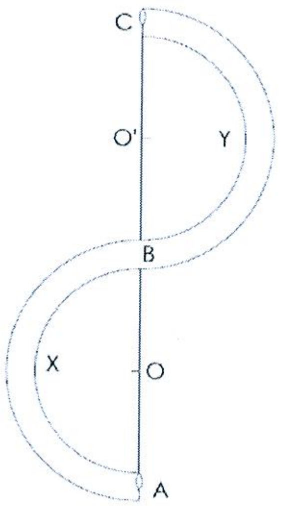
10. இடை 42 உம் நியம விலகல் 15 உம் உடைய புள்ளித்தொகுதியானது இடை 50 உம், நியமவிலகல் 20 உம் உடைய புள்ளித்தொகுதியாக மாற்றப்படுகின்றது. பழைய புள்ளித்தொகுதியின் புள்ளி 54 இற்கு ஒத்த புதிய புள்ளித்தொகுதியின் புள்ளியினை காண்க.

பகுதி B

11. (a) உயர்கதி $u\,km/h$ இல் செல்லக்கூடிய கப்பல் ஒன்றானது $v\,km/h$ இல் பயணம் செய்யும் கப்பலைப் பிடிக்க விரைந்து செல்கின்றது. ஆரம்பத்தில் கப்பலானது வள்ளத்திற்கு தெற்கேயுள்ளது. ஆயின் கப்பலினை பிடிக்க வள்ளம் செல்லவேண்டிய திசையினை காண்க.
வள்ளம் முதலில் கப்பலை அவதானித்த கணத்திலிருந்து அதனை அடையும் வரையான இயக்கத்திற்கான நேரத்தினை காண்க.



(b) உருவில.காட்டியவாறு B இந் செங்கோணத்தையுடைய குழாய் ABC ஆனது M திணிவுடையது இது குழாயின்பகுதி AB கிடையாகவும், BC நிலைகுத்தாகவும் இருக்குமாறு L, K இலுள்ள இரு ஒப்பமான வளையங்களினுள் போடப்பட்டுள்ளது. Oவில் உள்ள கப்பியின் மேலால் செல்லும் இழைகளின் முனைகளில் P, Q எனும் M திணிவுடைய துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன.தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடப்படுகையில் துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல்களை காண்க.



12. உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள AXB, BYC என்பன a ஆரையுடைய இரு ஒப்பமான அரைவட்டவடிவ குழாய்கள் ஆகும். இவை B யில் ஒன்றினுள் ஒன்று செருகப்பட்டு AXB, BYC என்பன ஒரே நிலைகுத்துத்தளத்தில் கிடக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளன ஓர் m திணிவுடைய துணிக்கை P ஆனது குழாய் AXB இல் A யில் வைக்கப்பட்டு குழாய் வழியே கிடைத்திசையில் u வேகத்துடன் எறியப்படுகின்றது. கோணம் $AOP = \theta$ ஆக இருக்கும். கணத்தில், துணிக்கையின் வேகம் V துணிக்கை மீது குழாயினால் வழங்கப்படும் மறுதாக்கம் R ஆயின்

$$V^2 = u^2 - 2ga(1-\cos\theta)$$ எனவும்

$$R = \frac{m}{a}\left(u^2 - 2ag + 3ag\cos\theta\right)$$ எனவும் காட்டுக.

$u^2 < 4ag$ ஆயின், துணிக்கையானது மேற்குழாயினுள் புகமுடியாது என காட்டுக.

$u^2 = 10ag$ ஆயின் $B\hat{O}P = \alpha$ ஆக இருக்கும் கணத்தில் துணிக்கையின் வேகம் V'', துணிக்கை மீது குழாய் வழங்கும் மறுதாக்கம் R'' ஆகியவற்றினை காண்க.
C யினூடு வெளியேறும் துணிக்கையானது AC ஊடான நிலைகுத்துத்தளத்தில் A யினூடாக கிடைக்கோட்டினை A யிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் அடிக்கும் என காண்க.

13. இயற்கை நீளம் a உம், மீள்தன்மை மட்டு mg உம் இலேசான மீளதன்மை இழையொன்றின் ஒருமுனை மேசையின் விளிம்பிலிருந்து $2a$ தூரத்தில் உள்ள நிலைத்தபுள்ளி C யிற்கு இணைக்கப்பட்டு மறுமுனையில் திணிவு m உடைய துணிக்கை P இணைக்கப்படுள்ளது. இத்துணிக்கைக்கு இணைக்கப்பட்டுகள்ள இன்னோனர் இலேசான நீள இழையானது மேசையில் விளிம்பிலுள்ள நிலைத்த ஒப்பமான கம்பியின் மேலால் சென்று m திணிவுடை.ய ஓர் துணிக்கை Q இனை காவுகின்றது ஆரம்பத்தில் துணிக்கை பிடிக்கப்பட்டு, இழையின் ஏனைய பகுதிகள் இறுக்கமாக வைத்திருக்கப்பட்டு மெதுவாக விடப்படுகின்றது. பின்னிகமும் இயக்கத்தில் C யிலிருந்து தணிக்கை P யின் தூரம் x ஆக இருக்கையில் $\left(x \le 2a\right)$ துணிக்கை P யின் இயக்கமானது

$$\ddot{x}+\left(\frac{g}{a}\right)\left(x-2a\right)=0$$ என தரப்படும் என காட்டுக.

இச்சமன்பாட்டின் தீர்ப்புகள் $x-2a=A\cos wt+B\sin wt$ எனும் வடிவில் தரப்படலாம் என கொண்டு A, B இன் பெறுமானங்களை காண்க இங்கு $w=\sqrt{\frac{g}{a}}$, இழை CP ஆனது அடையும் உயர் நீட்சியும் அப்போது மற்றைய இழையின் இழுவையிளையும் காண்க.

14. (a) ஆரை r உம் நிறை W வுமுடைய ஒழுங்கான தட்டொன்றில் ஒரு புள்ளிக்கு W^{1} நிறையுடைய துணிக்கையொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தட்டானது அதன் வட்ட விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியானது கரடான கிடைத்தரையினை தொட்டவாறும் வட்ட விளிம்பிலுள்ள இன்னோர் புள்ளியானது கிடைத்தரைக்குச் செங்குத்தான கரடான நிலைக்குத்துச் சுவரொன்றை தொட்டவாறும், தரையிலும், சுவரிலும் எல்லைச் சமநிலையிலுள்ளது. நிலைகுத்துச்சுவரிலிருந்து துணிக்கை P யின் தூரம் $\frac{r}{2}$ ஆகும். தரை - தட்டு, சுவர் - தட்டு என்பவற்றிற்கிடையிலான உராய்வுக் கோணங்கள் சமனாகவுள்ளதோடு இது λ ஆகும்.

$$\cos 2\lambda-\sin 2\lambda=\frac{W}{W+W^{1}}$$ என காட்டுக.

$W^{1}=W\left(\sqrt{2}-1\right)$ ஆயின் λ இன் பெறுமானத்தினை காண்க.

(b) a பக்க நீளமுடைய ஒழுங்கான அறுகோணியொன்றின் பக்கங்கள் $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ வழியே இதே எழுத்தொழுங்கில் $\lambda, 2\lambda, \mu, \mu, 2\lambda, \lambda$ எனும் விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியின் விளையுள் E ஊடு செல்லுமாயின் μ இனை λ சார்பில் காண்க. மேலும் விளையுள் C யினூடு செல்கின்றதென காட்டி, அதன் பெறுமானம் $8\sqrt{3}\lambda$ எனக் காட்டுக.

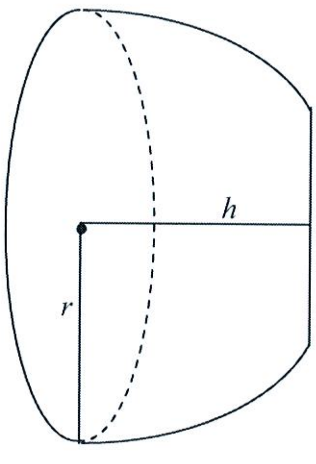
தொகுதிக்கு தொகுதியின் தளத்தில் BAF திசையில், $4a\sqrt{3}\lambda$ பருமனுடைய இனையொன்று பிரயோகிக்கப்படுகின்றபோது தொகுதியின் விளையுள் AB திசைவழியே தாக்குகின்றது ஆயின் A யிலிருந்து விளையுளின் தாக்கக்கோடு AB ஐ வெட்டும் புள்ளியின் நிலையினை காண்க.

15. (a) W நிறையும், சமநீளமும் உடைய நான்கு சீர்க்கோல்கள் அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு சாய்சதுரம் $ABCD$ உருவாக்கப்பட்டுள்ளது. தொகுதியானது D யிலிருந்து சுயாதீனமாக தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது A, CD யின் நடுப்புள்ளியினை இணைக்கும் இலேசான கோலினால் $A\hat{D}C = \frac{\pi}{3}$ ஆகுமாறு தொகுதி சமநிலையில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. சமநிலையில் கோல் AC யில் உள்ள இழுவை அல்லது உதைப்பினையும், மூட்டு C யிலுள்ள மறுதாக்கத்தினையும் காண்க.

(b) நிலையற்ற நான்கு சீர்க்கோல்களை கொண்டு ஆக்கப்பட்ட சட்டப்படல் ஒன்றானது A, C இற்கு இணைக்கப்பட்ட இலேசான கோலினை கொண்டுள்ளது. தொகுதி B, D யிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ள இலேசான இழைகளால் காவப்படுகின்றது. C யிற்கு ஓர் திணிவு $2W$ இணைக்கப்பட்டு C யிற்கு மேலே A இருக்குமாறும் கிடையுடன் இழைகள் $\frac{\pi}{6}$ கோணம் அமைக்குமாறும் $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3}$ ஆகவுள்ளபோதும் சமநிலை பெறப்படுகின்றது.

சமநிலையில், இழையில் உள்ள இழுவைகளை காண்க. மூட்டு B யினை மட்டும் கருதி அப்பகுதிக்குரிய தகைப்பு வரிப்படத்தினை, போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி வரைக.

இதிலிருந்து கோல்கள் AB, BC, CD, DA இலுள்ள தகைப்புக்களை கண்டு, அவை உதைப்பா இழுவையா எனவும் தருக.

16. 

அருகேயுள்ள உருவில் காட்டப்படும் திண்மப் பொருள் ஆனது ஆரை r உடைய சீரான திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றிலிருந்து அதன் தளமுகத்தின் மையத்திலிருநத்து h தூரத்திலுள்ள $(h \le r)$ விட்ட முகத்தினை அடியாகவுடைய பகுதியாக இருக்குமாறு மீதிப்பகுதி வெட்டியகற்றப்பட்ட ஓர் உருவமாகும் இவ்வுருவின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையினை பெரிய தளமுகத்தின் மையத்திலிருந்து காண்க.

இதிலிருந்து திண்ம அரைக்கோளம் ஒன்றின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் நிலையினை காண்க.

இத்திண்ம உருவானது சிறிய வட்ட தளமுகத்தில் உள்ள ஓர் புள்ளி பற்றி சுயாதீனமாக தொங்கவிடப்படின், இத்தளமுகம் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணத்தினை காண்க.

17.

(a) $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ எனும் n புள்ளிகளின் இடை, மாறல்திறன் என்பன முறையே $\overline{x}, S_x^{\;3}$ என்பவற்றினை வரையறுக்க.

$y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y_m$ எனும் m புள்ளிகளை கொண்ட புள்ளித்தொகுதியின் இடை, நியமவில் என்பன முறையே $\overline{y}, S_y^{\;2}$ ஆகும். இவ்விரு புள்ளித்தொகுதிகளினதும் ஒன்று சேர்ந்த தொகுதியின் இடை, மாறல்திறன்கள் என்பன முறையே $\overline{Z}, \overline{S}_Z$ ஆயின் $\overline{Z} = \dfrac{n\overline{x} + m\overline{y}}{n+m}$ எனவும்

$$S_z^2 = \frac{n S_x^2 + m S_y^2}{n+m} + \frac{n\left(\overline{z} - \overline{x}\right)^2 + m\left(\overline{z} - \overline{y}\right)^2}{n+m}$$ எனவும் காட்டுக.

A,B எனும் இரு வேறு புள்ளித் தொகுதிகளுக்குரிய தரவுகள் கீழேயுள்ளன.

	மீடிறன்	இடையம்	நியமவிலகல்
தொகுதி A	100	41	9
தொகுதி B	50	38	4

(b) பெட்டியொன்றின் 13 அட்டைகள் உள்ளன. இவற்றுள் 6 அட்டைகளில் இலக்கம் 1 உம், 4 அட்டைகளில் இலக்கம் 2 உம், 3 அட்டைகளில் இலக்கம் 3 உம் எழுதப்பட்டுள்ளது.

1, 2, 3 என இலக்கமிடப்பட்ட வேறு மூன்று பெட்டிகளில், 1 என இலக்கமிடப்பட்ட பெட்டியில் r_1 சிவப்பு பந்துகளும், b_1 நீலப்பந்துகளும் உள்ளன. 2 என இலக்கமிடப்பட்ட பெட்டியில் r_2 சிவப்பு பந்துகளும் b_2 நீலப் பந்துகளும் உள்ளன. 3 என இலக்கமிடப்பட்ட பெட்டியில் r_3 சிவப்பு பந்துகளும் b_3 சிவப்பு பந்துகளும் உள்ளன. முதலில் இலக்கங்கள் உள்ள அட்டைகள் உள்ள பெட்டியொன்றிலிருந்து அட்டையொன்று எடுக்கப்பட்டு அதிலுள்ள இலக்கத்திற்குரிய பெட்டியிலிருந்து பந்து ஒன்று எடுக்கப்படுகின்றது. இதற்குரிய நிகழ்வுகளைக் காட்டும் மரவரிப்படத்தினை வரைக. இதிலிருந்து பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளை காண்க.

(i) எடுக்கப்படும் பந்து கறுப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(ii) எடுக்கப்பட்ட பந்தின் நிறம் கறுப்பு எனத் தரப்படின் அது 3ம் இலக்க பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?