கா.பொ.த (உ/த) உதவிக் கருத்தரங்குத் தொடர் - 2013

இணைந்த கணிதம்

மீட்டல் பயிற்சி வினாப்பத்திரம்

10	
T	I

கல்வியமைச்சின் வழிகாட்டலுடன் தயாரிக்கப்பட்டது.

பகுதி I

காலம் : 3 மணித்தியாலங்கள்

இவ்வினாத்தாள் பகுதி A, பகுதி B என இரு பகுதிகளை கொண்டது.

பகுதி A: 1 தொடக்கம் 10 வரையான எல்லா வினாக்களுக்கும் தெளிவாக விடையளிக்க.

பகுதி B: 11 - 17 வரையான 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களிற்கு மாத்திரம் விடையளிக்க.

பகுதி A

01. $y = |x+1|$, $y = |2x-1|$ எனும் சமனிலிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக.

இவ்வரைபினை உபயோகித்து $|x+1| < |2x+1|$ இனை திருப்தியாக்கும் x இன் பெறுமானத்தொடையினை காண்க.

02. $ECCENTRICTTY$ எனும் சொல்லிலுள்ள எல்லா எழுத்துக்களையும் எடுத்து செய்யக்கூடிய வரிசைமாற்றங்கள் எண்ணிக்கயினை பின்வரும் ஒவ்வொரு வகையிலும் காண்க.

(i) எல்லா எழுத்துக்களையும் உபயோகித்து

(ii) N எழுத்துக்கு அடுத்ததாக வலது பக்கமாக T இருக்குமாறு ஆக்கப்படக்கூடிய வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை யாது?

03. $(1+x)^{2012}(1-x+x^2)$ இன் விரியில் x^{2013} இன் குணகத்தினை காண்க.

04. கீழுள்ள எல்லைகளின் பெறுமானங்களினை காண்க.

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}$ (ii) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{1+x-3x^2}{x^2-4x+8}$

05. $3^{\frac{1}{x+1}} y = 4$ இனை x குறித்து வகையிடுக.

06. $\int_{-2}^{2} |x+1| \, dx$ இன் பெறுமானத்தினை காண்க.

07. $3x+4y+5=0, 12x-5y-3=0$ எனும் கோடுகளுக்கிடையிலான உற்பத்தியை தன்னுள் கொண்ட கோண இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டினை காண்க.

08. $A(4,0), B(3,-3)$ எனும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை வெலிப்புறமாக 3:1 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளை காண்க.

09. $4x-3y-6=0$ எனும் நேர்கோட்டினை தொடுவதும் ஆள்கூற்று அச்சுக்களை தொடுவதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. $\sin(x+y)$ $\cos(x+y)$ என்பவற்றின் விரிவுகளை மாத்திரம் உபயோகித்து

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ எனக் காட்டுக.

$A+B+C=\pi$ ஆயின்

$\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}.\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{A}{2}.\tan\dfrac{C}{2}=1$ எனக் காட்டுக

பகுதி B

11. (a) $y=x^2-(k-2)x+k+1$ எனும் வரைபானது x அச்சினை $(\alpha,0),(\beta,0)$ எனும் இருவேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. இங்கு $k\in\mathbb{R}$

(i) k எடுக்கக் கூடிய சாத்தியமான பெறுமானங்களின் வீச்சினை காண்க.

(ii) $|\alpha+\beta|<5$ ஆயின் k எடுக்கக்கூடிய பொறுமானங்களின் வீச்சினைக் காண்க.

(b) $\dfrac{x^3+4x^2-10x+6}{(x-3)(x^2+4)}$ இனை பகுதிப்பின்னங்களாக்குக.

12. (a) $u_1,u_2,u_3,\ldots\ldots\ldots\ldots u_n,\ldots\ldots\ldots\ldots$ என்பன பெருக்கல் விருத்தியொன்றில் அமையும் உறுப்புக்கள் ஆகும். கணிதத்தொகுத்தறிவு முறையினை உபயோகித்து எல்லா $n\geq 2$ இற்கும்

$\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_2u_3}+\dfrac{1}{u_3u_4}+\ldots..\dfrac{1}{u_{n-1}u_n}=\dfrac{n-1}{u_1\,u_n}$ எனக் காட்டுக.

(b) $V_r\equiv r(r+1)$ உம் $f(r)\equiv Ar^2+Br+C,\ r\in Z^+$ ஆகும் $V_r\equiv f(r)-3f(r-1)$ ஆகுமாறு A,B,C இன் பெறுமானங்களினை காண்க

இதிலிருந்து $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{V_r}{3^r}$ இன் பெறுமானத்தினை காண்க.

மேலுள்ள தொடர் ஒருங்குமா? விரியுமா? காரணம் தருக.

13. (a) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -4 & K\end{pmatrix}$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. $A(2B-C)=6I$ ஆகுமாறு K இன் பெறுமானத்தினை காண்க. இங்கு I சர்வசமன்பாட்டு தாயமாகும். A^{-1} இன் பெறுமானத்தினை காண்க.

(b) (i) $\left(\frac{3-i}{3+i}\right)Z = \frac{5+5i}{-1+2i}$ ஆயின் Z இனை $a+ib$ வடிவில் தருக.

(ii) ஆகன் வரிப்படத்தில் $ABCD$ என்பது உச்சிகள் இதே ஒழுங்கில் மணிக்கூட்டுத்திசையில் அமையுமாறு சாய்சதுரம் எடுக்கப்பட்ட இதன் உச்சிகள் குறிக்கும் சிக்கலெண்கள் முறையே z_1, z_2, z_3, z_4 ஆவதுடன் $A\hat{B}C = \frac{\pi}{3}$ ஆகும்.

$z_2 = \frac{1}{2}z_1\left(1+\sqrt{3}i\right) + \frac{1}{2}z_3\left(1-\sqrt{3}i\right)$ எனவும் $z_4 = \frac{1}{2}z_1\left(1-\sqrt{3}i\right) + \frac{1}{2}z_3\left(1+\sqrt{3}i\right)$ எனவும் காட்டுக.

(iii) Z ஆனது சிக்கலெண் ஒன்றாக இருக்கையில் $|Z-4| \leq 2$ ஆல் குறிக்கப்படும் பிரதேசம் C இனை சிக்கற்தளத்தில் நிழற்றிக் காட்டுக.

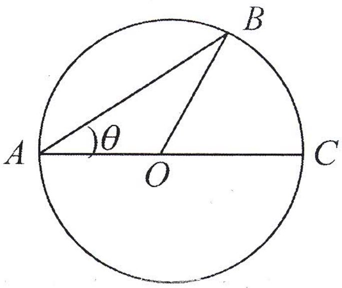
இதிலிருந்து $\arg z$ இன் உயர்வு இழிவு பெறுமானங்களிற்கிடையேயான வித்தியாசத்தினை காண்க.

$|z|$ இன் உயர்வு, இழிவு பெறுமானங்களினை காண்க.

14. (a) (i) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y), a \in R$ என தரப்படுகின்றது $\theta + \alpha \neq \pi$ ஆக இருக்கும்போது $x = \sin\theta,\ y = \sin\alpha$ எனும் பிரதியீடுகளை உபயோகித்து $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ எனக்காட்டுக.

(ii) $y = \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ஆயின், $\left(1-x^2\right)\frac{d^3y}{dx^3} - 5x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0$ எனக் காட்டுக.

(b) உருவில் காட்டப்பட்டவாறான வட்டவடிவ குளம் ஒன்றின் மையம் O, ஆரை $2km$ ஆகும். உருவில் காட்டியவாறு மனிதனொருவன் A யிலிருந்து B யிற்கு $2\sqrt{3}kmh^{-1}$ சீரான வேகத்தில் நீந்தி பின்னர் B யிலிருந்து C யிற்கு $4kmh^{-1}$ வேகத்தில் BC வழியே ஓடி C ஐ அடைகின்றான். $B\hat{A}C = \theta$ எனக் கொண்டு A யிலிருந்து C வரையான பயணத்துக்கான நேரம் $T(\theta)$ இற்கான கோவை ஒன்றை பெறுக.



$\frac{dT}{d\theta}$ இனை கண்டு A யிலிருந்து C வரையான பயணத்துக்கான இழிவு நேரத்தினை காண்க.

15. (i) பொருத்தமான பிரதியீட்டினை உபயோகித்து $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$ இன் பெறுமானத்தினை காண்க.

(ii) $n \geq 1$ ஆக இருக்கையில் $\int \frac{1}{(a+x^2)^n}dx = I_n$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$I_{n+1} = \frac{x}{2an(a+x^2)^n} + \left(\frac{2n-1}{2an}\right) I_n$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int \frac{1}{(4+x^2)^3}dx$ இனை காண்க.

16. சாய்சதுரம் $OABC$ இல் பக்கம் OA இன் சமன்பாடு $4x-3y=0$ ஆகும். இங்கு O உற்பத்தி ஆகும். மூலை விட்டம் OB இன் சமன்பாடு $y-x=0$ ஆகும். $B \equiv (5,5)$ ஆயின் AB, AC, OC யின் சமன்பாட்டினை காண்க.
சாய்சதுரம் $OABC$ யில் பக்கங்கள் OC, OA இனை தொட்டுச்செல்லும் ஆரை 1 அலகு ஆகவுடைய வட்டத்தின் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும், அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

17. (i) முக்கோணி ABC யில் வழமையான குறியீடுகளுடன் கோசைன் விதியினை கூறுக.

(ii) முக்கோணி ABC யில் பக்கங்கள் BC, CA, AB யின் நீளங்கள் முறையே $x+y,\ x,\ x-y$ ஆயின் $\cos A = \frac{x-4y}{2(x-y)}$ எனக் காட்டுக.

(iii) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து

(iv) $(\cos x + \cos 3x)^2 + (\sin x + \sin 3x)^2 = 1$ இன் பொதுத் தீர்வினைக் காண்க.

(v) $2\tan^{-1}(\sin x) - \tan^{-1}(2\sec x) = 0$ இனை தீர்க்க.