க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2014

இணைந்த கணிதம் I | **மூன்று மணித்தியாலம்**

பகுதி A

எல்லா வினாக்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிக்கோட்டில் விடை எழுதுக.

1. கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் எல்லா நேர் நிறையெண்கள் n இற்கும் $1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$ என நிறுவுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $a<b<c$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள a, b, c ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாக இருக்கும் சமனிலி $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}\leq 0$ இன் தீர்வுத் தொடையைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக் 2 ஐப் பார்க்க

3. FRACTION என்னும் சொல்லின் எல்லா எழுத்துகளையும் கொண்டு செய்யத்தக்க ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.
இவ்வொழுங்கமைப்புகளில் உயிரெழுத்துகள் (vowels) இரட்டைத் தானங்களில் இருக்கும் ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை யாது?

4. $\lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right\} = 0$ ஆக இருக்குமாறு a, b ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

[பக் 3 ஐப் பார்க்க

5. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ எனக் காட்டுக; இங்கு $a \in \mathbb{R}^+$.
இதிலிருந்து, $a \neq 1$ ஆக இருக்கும்போது $\int \frac{a^x}{1+a^x}\, dx$ ஐக் காண்க.

6. ஓர் இணைகரம் $ABCD$ யில் பக்கம் AB யின் சமன்பாடு $x + y + 2 = 0$ உம் மூலைவிட்டங்கள் இடைவெட்டும் புள்ளி $(4, 2)$ உம் ஆகும். புள்ளி A யினூடாக நேர்கோடு $x + 2 = 0$ செல்கின்றது. பக்கம் DC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. ஒரு வளையி $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளின் மூலம் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு t ஆனது ஒரு பரமானம் ஆகும். புள்ளி $(0, 1)$ ஐ ஒத்த t யின் பெறுமானத்தைக் கண்டு, அப்புள்ளியில் வளையிக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியானது x - அச்சிற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக.

8. $x-y=0, 7x-y=0$ என்னும் இரு நேர்கோடுகளையும் தொடுமாறு முற்றாக முதற் கால் வட்டத்தில் இருக்கும் $2\sqrt{2}$ அலகுகள் ஆரையுள்ள வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

9. $\text{Arg}\, iz = \pi$ ஆகவும் $|z+1|+|z-1|=4$ ஆகவும் இருக்குமாறு சிக்கலெண் z ஐக் காண்க.

10. $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ எனின், $\left(\sqrt{3}+\tan\theta\right)\left(\sqrt{3}+\tan\alpha\right)=4$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $\tan\dfrac{\pi}{12}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (i) p, q, r ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகளாகவும் $p \neq 0$ ஆகவும் உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு $px^2 + qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின், $\alpha + \beta = -\frac{q}{p}$ எனவும் $\alpha\beta = \frac{r}{p}$ எனவும் காட்டுக.

சமன்பாடு $x^2 + ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் $\lambda, 3\mu$ ஆகவும் சமன்பாடு $x^2 + cx + d = 0$ இன் மூலங்கள் $3\lambda, \mu$ ஆகவும் இருப்பின், $b = d$ எனக் காட்டுக; இங்கு a, b, c, d ஆகியன மெய்ம் மாறிலிகள்.

இதிலிருந்து, λ, μ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $12x^2 + 3(a+c)x + 4b = 0$ எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x) \equiv x^3 - 2ax^2 + (ab + a^2 - b^2)x - ab(a-b)$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு a, b ஆகியன $a \neq b$ ஆகுமாறு உள்ள மெய்ம் மாறிலிகளாகும். $x - a + b$ ஆனது பல்லுறுப்பி $f(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டி, அதிலிருந்து, சமன்பாடு $f(x) = 0$ ஐத் தீர்க்க.

சமன்பாடு $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் 1, 3, 4 ஆக இருக்குமாறு p, q, r ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(iii) பகுதிப் பின்னங்களைக் காண்க. $\frac{7x-10}{x^2(x-2)}$

12. (i) யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறையெண் சுட்டி n இற்கு $(a+b)^n$ இன் விரியை எழுதுக; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

இதிலிருந்து, $\sum_{r=0}^{n} {}^nC_r = 2^n$ ஐயும் $\sum_{r=0}^{n} \left({}^nC_r\right)^2 = {}^{2n}C_n$ ஐயும் உய்த்தறிக.

$a + b = 1$ ஆக இருக்கும்போது $\sum_{r=1}^{n} r\,{}^nC_r a^r b^{n-r} = na$ எனவும் காட்டுக.

(ii) r ஆவது உறுப்பு U_r ஆகவுள்ள ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை $\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{n}{12}(n+1)(n+2)(n+3)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு $1 \le r \le n$.

$\frac{1}{U_r} \equiv k\{f(r) - f(r+1)\}$ ஆக இருக்குமாறு சார்பு $f(r)$ ஐயும் மாறிலி k யையும் கண்டு, அதிலிருந்து $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{U_r}$ ஐப் பெறுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r}$ ஆனது ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டுக.

$2 \le 3\left\{1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\} < 3$ ஐ உய்த்தறிக.

[பக் 7 ஐப் பார்க்க

13. (i) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்கும்போது $\mathbf{A}^2$ ஐக் கண்டு, அதிலிருந்து, $\mathbf{A}^{-1}$ ஐப் பெறுக.

$\mathbf{A}^{2015}\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ஆக இருக்குமாறு தாயம் $\mathbf{X}$ ஐத் துணிக.

(ii) சமன்பாடு $z^6=1$ இன் மூலங்களை வடிவம் $x+iy$ யிற் பெறுக; இங்கு $x, y\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$.
z_1, z_2 என்பன சமன்பாடு $z^6=1$ இன் வேறுவேறான இரு மூலங்கள் எனின், $|z_1-z_2|$ எடுக்கத்தக்க பெறுமானங்கள் $1,\ 2, \sqrt{3}$ என ஆகண் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்திக் காட்டுக.

(iii) z என்பது $|z|=\sqrt{3}$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள யாதாயினும் ஒரு சிக்கலெண்ணாக இருக்கும்போது ஆகண் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $2-\sqrt{3}\le|z+2|\le 2+\sqrt{3}$ எனவும் $-\frac{\pi}{3}\le\arg(z+2)\le\frac{\pi}{3}$ எனவும் காட்டுக.

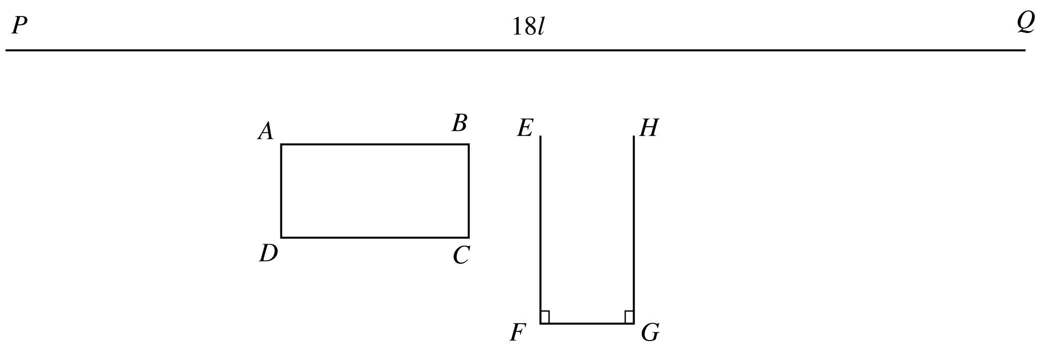
14. (i) $x=\sec\theta+\tan\theta$, $y=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$ எனத் தரப்படும்போது, $x+\frac{1}{x}=2\sec\theta$ எனவும் $y+\frac{1}{y}=2\operatorname{cosec}\theta$ எனவும் காட்டுக ; இங்கு θ ஒரு பரமானம்.

θ வின் சார்பில் $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}$ ஆகியவற்றைப் பெறுக.

அதிலிருந்து, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1+y^2}{1+x^2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) பெறுதிகள் பற்றிய கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, $x>0$ இற்கு, $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}>\ln(1+x)$ எனக் காட்டுக.
அணுகுகோடுகளையும் நிலையான புள்ளிகளையும் தெளிவாகக் காட்டி, $-1<x\le 1$ இற்குச் சார்பு $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$ இன் வரைபைப் பருமப்படியாக வரைக. ($\ln 2\approx 0.69$ எனக் கொள்க.)

(iii)



மாணவன் ஒருவன் ஒரு பந்தலின் கட்டமைப்பைத் தயார்செய்வதற்கு அவனிடம் $18l$ நீளமுள்ள மெல்லிய கம்பித் துண்டு PQ வழங்கப்பட்டுள்ளது. சட்டம் $EFGH$ இன் இணைக்கப்படாத E, H ஆகிய இரு அந்தங்களையும் செவ்வகச் சட்டம் $ABCD$ யின் பக்கம் CD மீது பொருத்துவதன் மூலம் பந்தலின் கட்டமைப்பு தயார்செய்யப்படுகின்றது. $AB = EF = GH$ ஆகவும் $AD = FG$ ஆகவும் பந்தலின் கட்டமைப்பின் பரப்பளவு உயர்ந்தபட்சமாகவும் இருப்பதற்கு PQ வெட்டப்பட வேண்டிய இரு துண்டுகளினதும் நீளங்களை வேறுவேறாகக் காண்க.

15. (i) ஓர் உகந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

$$\int \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\sqrt{a^2-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}a^2\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{8}\left(a^2-2x^2\right) + c$$

எனக் காட்டுக; இங்கு a ஒரு பூச்சியமல்லாத மெய்ம் மாறிலியும் c ஓர் எதேச்சை மாறிலியும் ஆகும்.

(ii) $\int_0^p f(p-x)\mathrm{d}x = \int_0^p f(x)\mathrm{d}x$ எனக் காட்டுக; இங்கு $f(x)$ ஆனது ஆயிடை $[o, p]$ மீது உள்ள ஒரு தொடர்சார்பாகும்.

$I = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(a-x)^n + x^n}\mathrm{d}x$ எனவும் $J = \int_0^a \frac{x^n}{x^n + (a-x)^n}\mathrm{d}x$ எனவும் கொள்வோம்.

$I = J$ என நிறுவுக.

I யிற்கும் J யிற்குமிடையே வேறொரு தொடர்பைப் பெற்று, இதிலிருந்து I யைப் பெறுமானங் கணிக்க.

(iii) $\int_0^2 (x+2)^3(x+5)\mathrm{d}x$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

16. (i) $l_1 \equiv ax + by + c = 0,\ l_2 \equiv px + qy + r = 0$ என்பன இரு சமாந்தரமல்லாத நேர்கோடுகளாகும். ஒருங்கமையப் பூச்சியமல்லாத λ, μ ஆகிய பரமானங்களுக்கு $\lambda\, l_1 + \mu\, l_2 = 0$ இன் மூலம் $l_1 = 0, l_2 = 0$ ஆகிய இரு நேர்கோடுகளினதும் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோடு வகைகுறிக்கப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

நாற்பக்கல் $ABCD$ யில் AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x + 10y - 9 = 0,\ 8x + y - 1 = 0,\ x + 5y - 5 = 0,\ 7x - 4y - 15 = 0$ ஆகும். A , C ஆகிய புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காணாமல் மூலைவிட்டம் AC யின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(ii) முதற் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி வட்டம் $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 = 0$ இன் மையத்தையும் ஆரையையும் காண்க. x அச்சு மீது உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரு தொடலிகள் வரையப்படுகின்றன. அத்தகைய இரு புள்ளிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டுக.

17. (i) யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கோசைன் நெறியை எடுத்துரைக்க. அதிலிருந்து, $a = b\cos C + c\cos B$ யை உய்த்தறிக.
$(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right),\ \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ எனத் தரப்படும்போது $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$ எனக் காட்டி, இதிலிருந்து, $\sin(\alpha - \beta)$ இன் பெறுமானத்தைப் பெறுக.

(iii) $\tan 3x$ ஐ $\tan x$ இன் சார்பில் எடுத்துரைத்து, சார்பு $f(x) = \tan 3x \cot x$ இன் வீச்சு $\mathbb{R} / \left[\frac{1}{3}, 3\right)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\tan 3x - \tan x = 0$ ஐத் தீர்க்க.

(iv) $y = \sin^{-1}x,\ y = \cos^{-1}x$ என்னும் நேர்மாறு திரிகோணகணிதச் சார்புகள் ஒவ்வொன்றினதும் தலைமைப் பெறுமான வீச்சை எழுதுக.
அவ்வீச்சுகளைக் கருதி $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ என நிறுவுக.

* * *

க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2014

இணைந்த கணிதம் II	மூன்று மணித்தியாலம்

* இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிடுகின்றது.

பகுதி A

எல்லா வினாக்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ள புள்ளிக்கோட்டின் மீது விடை எழுதுக.

1. தரை மீது உள்ள ஒரு புள்ளி A யிலிருந்து தொடக்க வேகம் u உடன் புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கி எறியப்படும் ஒரு துணிக்கை P அடையும் மிக உயர்ந்த புள்ளி B எனக் கொள்வோம். B யிலிருந்து புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்தாக விழுமாறு ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும் வேறொரு துணிக்கை Q ஆனது AB யின் நடுப் புள்ளியில் P யைச் சந்திப்பதற்காகத் துணிக்கை P எறியப்படுவதற்கு நேரம் $\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{u}{g}$ இற்கு முன்னர் Q விடுவிக்கப்பட வேண்டும் என்பதை இரு துணிக்கைகளுக்கும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரையப்பட்டுள்ள வேக - நேர வரைபுகளைக் கொண்டு நிறுவுக.

[பக் 2 ஐப் பார்க்க

2. ஓர் ஒப்பமான கிடைத் தளத்தின் மீது திணிவு M ஐ உடைய ஓர் ஆப்பு வைக்கப்பட்டுள்ளது. கிடையுடன் கோணம் α இற் சாய்ந்த ஆப்பின் ஓர் ஒப்பமான முகத்தின் மீது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை வைக்கப்பட்டுள்ளது. தொகுதி ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படும்போது ஆப்பு d தூரம் இயங்கும் நேரத்தில் துணிக்கை சாய்தளத்தின் வழியே s தூரம் இயங்குகின்றது. தொகுதியின் ஆர்முடுகலை **வெளியார்ந்தவிதமாகக் காணாமல்,** $(m+M)d = ms\cos\alpha$ எனக் காட்டுக.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. ஒருவர் அவருடைய அடியிலிருந்து நிலைக்குத்து உயரம் h இல் இருக்கும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து கிடை, நிலைக்குத்து வேகக் கூறுகள் முறையே u, v ஆக இருக்குமாறு ஒரு பந்தைப் புவியீர்ப்பின் கீழ் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறிகின்றார். பந்து அவருடைய அடியிலிருந்து கிடைத் தூரம் d யில் இருக்கும் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரில் அதற்குச் செங்குத்தாக மோதிப் பின்னதைத்து, மனிதனின் அடிக்கு வருகின்றது. $2ghe^2 = v^2(1-e^2)$ எனக் காட்டுக; இங்கு e ஆனது பந்துக்கும் சுவருக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகமாகும்.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. திணிவு M மெட்ரிக் தொன் ஆகவுள்ள ஒரு வாகனம் மாறாக் கதி $u\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் செலுத்தப்படும்போது அதன் எஞ்சின் H kW வலுவுடன் தொழிற்படுகின்றது. வாகனம் ஒரு மாறாத் தடை R N இற்கு உட்படுமெனின், $Ru = 3600\,H$ எனக் காட்டுக.

இப்போது எஞ்சினை நிற்பாட்டித் தடுப்புகளைப் பிரயோகிக்கும்போது வாகனம் தூரம் d km இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. முழு இயக்கத்திற்கும் வீதித் தடை மாறாமல் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு, தடுப்புகளின் அமர்முடுகும் விசை R' ஆனது $R'du = \frac{25}{648}Mu^3 - 3600\,Hd$. யினால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

5. Q ஆனது ஒரு முக்கோணி OAB யின் பக்கம் AB யை முக்கூறிடுமாறு B யிற்குக் கிட்ட AB மீது உள்ள புள்ளியாகும். P ஆனது $OP : OQ = 2 : 5$ ஆக இருக்குமாறு OQ மீது உள்ள புள்ளியாகும். நீட்டப்பட்ட கோடு AP ஆனது OB யை R இல் சந்திக்கின்றது. $\mathbf{OP} = \frac{2}{15}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})$ எனக் காட்டி, $\mathbf{AP}$ யை $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பில் எழுதுக; இங்கு $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியன O குறித்து முறையே A யினதும் B யினதும் தானக் காவிகளாகும்.

$\mathbf{OA} + k\mathbf{AP}$ ஆனது $\mathbf{a}$ யைச் சாராமல் இருக்குமாறு எண்ணி k எடுக்கத்தக்க பெறுமானத்தைக் காண்க. O குறித்து R இன் தானக் காவி $\mathbf{r}$ ஐ $\mathbf{b}$ யின் சார்பில் எடுத்துரைப்பதன் மூலம் $OR : OB = 4 : 13$ எனக் காட்டுக.

6. நீளம் $2a$ யையும் நிறை w வையும் உடைய ஒரு சீரான கோல் AB மீது உள்ள ஒரு புள்ளியில் ஓர் ஒப்பமான மூளை மீது ஓய்வில் இருக்கும் அக்கோல் அதன் முனை A உடன் தொடுகையில் இருக்கும் ஓர் ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவருக்குச் செங்குத்தான ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் முனை B ஆனது முனைவிற்கு மேலே இருக்குமாறு நாப்பத்தில் உள்ளது. சுவருக்கும் முளைக்குமிடையே உள்ள தூரம் d ஆகவும் கிடையுடன் கோலின் சாய்வு θ ஆகவும் இருப்பின், $\cos^3\theta = \frac{d}{a}$ எனக் காட்டுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

7. X, Y ஆகியன இரு தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். $P(X) \neq 0$, $P(Y) \neq 0$ ஆகும். X, Y ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சாராதனவாக இருக்க முடியுமா? உமது விடையை எழுதுக.

A, B ஆகியன $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{1}{4}$, $P(B/A) = \frac{1}{3}$ ஆக இருக்குமாறு உள்ள இரு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

காரணங்கள் தந்து பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை எழுதுக.

(i) A, B ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் சாராதனவா?

(ii) A, B ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் தம்முள் புறநீக்குவனவா?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. A, B என்னும் இரு எழுமாற்று நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ஆகும். அவற்றில் ஒரு தடவைக்கு ஒரு நிகழ்ச்சி மாத்திரம் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ ஆகும்.

(i) இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே தடவையில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு,

(ii) நிகழ்ச்சி B நிகழ்ந்துள்ளதெனத் தரப்படும்போது நிகழ்ச்சி A நிகழ்வதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவு

ஆகியவற்றைக் காண்க.

9. இடை, ஆகாரம் ஆகியன முறையே $8, 5$ ஆகவுள்ள 9 நோக்கல்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.
$5, \ 6, \ 13, \ 5, \ 10, \ 13, \ 3, \ x, \ y$; இங்கு $x < y$.

(i) x இனதும் y யினதும் பெறுமானங்களைத் தனித்தனியாக,

(ii) 9 நோக்கல்களினதும் இடையம்

ஆகியவற்றைக் கணிக்க.

10. 9 அவதானிப்புகளைக் கொண்ட ஒரு குடித்தொகையின் இடையும் நியம விலகலும் முறையே 25, 4 ஆகும். அதனுடன் 15, 20, 40 என்னும் நோக்கல்களைச் சேர்க்கும்போது கிடைக்கும் புதிய குடித்தொகையின் இடையையும் நியம விலகலையும் கணிக்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக் 7 ஐப் பார்க்க

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) ஓர் உயர்த்தி நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிச் சீரான ஆர்முடுகலுடன் ஓய்விலிருந்து செல்லத் தொடங்கும் அதே வேளை ஒரு பந்து உயர்த்தி தொடர்பாக நிலைக்குத்து வேகம் u உடன் உயர்த்தியினுள்ளே மேல்நோக்கி எறியப்படுகின்றது. பந்தின் பறப்புக் காலம் T எனின், உயர்த்தி தொடர்பாகப் பந்தின் இயக்கத்திற்கான ஒரு வேக - நேர வரைபை வரைக.
$u > \frac{1}{2}gT$ எனின், வேக - நேர வரைபைப் பயன்படுத்தி உயர்த்தியின் ஆர்முடுகல் $\frac{1}{T}\left(2u - gT\right)$ எனக் காட்டுக.

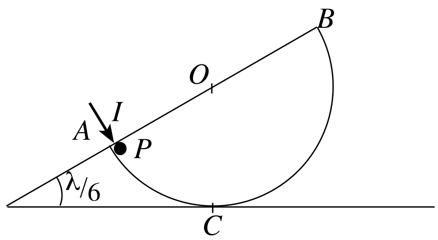
(b) தெற்கு நோக்கிக் கதி $u\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் செல்லும் போர்க் கப்பல் ஒன்றின் கப்ரின் தனது கப்பலிலிருந்து தூரம் d km மேற்கே, வடக்கிலிருந்து 30° கிழக்குத் திசையில் கதி $u\sqrt{3}\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ உடன் செல்வது போல் தோற்றும் ஓர் எதிரிக் கப்பலைக் காண்கின்றார்.

(i) எதிரிக் கப்பலின் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) இரு கப்பல்களும் ஒன்றுக்கொன்று கிட்ட இருக்கும்போது போர்க் கப்பலிலிருந்து எதிரிக் கப்பலின் திசைகோளையும் அவ்விரு கப்பல்களுக்குமிடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரத்தையும் காண்க.

(iii) போர்க் கப்பல் $0.9d$ km தூரத்தில் சுடும் வீச்சை உடையதெனின், எதிரிக் கப்பல் நேரம் $12\sqrt{2}\,\frac{d}{u}$ நிமிடத்தில் போர்க் கப்பலின் தாக்குதலுக்கு உட்படத்தக்கதெனக் காட்டுக.

12. மையம் O வையும் உள்ளாரை a யையும் உடைய ஓர் ஒப்பமான அரைக்கோளப் பாத்திரம் அதன் விளிம்பு உருவில் காணப்படுகின்றவாறு கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்திருக்குமாறு ஒரு நிலைத்த கிடைத் தளத்தின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி C யில் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டுள்ளது. பாத்திரத்தின் விளிம்பின் மிகவும் தாழ்ந்த புள்ளி A யிற்கும் மிகவும் உயர்ந்த புள்ளி B யிற்குமிடையே A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளன. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது புள்ளி A யில் ஓய்வில் வைக்கப்பட்டு, தளம் ABC யில் AB யிற்குச் செங்குத்தாகப் பாத்திரத்தின் உட்பரப்பு வழியே இயங்குமாறு அத்துணிக்கைக்கு ஒரு கணத்தாக்கு I தரப்படுகின்றது.



(i) துணிக்கை P யின் தொடக்க வேகத்தைக் காண்க.

(ii) கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோடு OP கோணம் α வை ஆக்குமாறு துணிக்கை P ஆனது C யிற்கும் B யிற்குமிடையே இருக்கும்போது துணிக்கையின் வேகத்தையும் பாத்திரத்தின் மூலம் துணிக்கையின் மீது பிரயோகிக்கப்படும் மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

(iii) துணிக்கை புள்ளி B யிற்குச் செல்லுமெனின், $I \geq \frac{m}{2}\sqrt{10ga}$ எனக் காட்டுக.

(iv) $I > \frac{m}{2}\sqrt{10ga}$ எனின், பின்னர் உண்டாகும் இயக்கத்தில் துணிக்கை மறுபடியும் புள்ளி A யிற்கு வருவதற்கு $I = \frac{m}{2}\sqrt{14ga}$ ஆக இருத்தல் வேண்டும் எனவும் காட்டுக.

[பக் 8 ஐப் பார்க்க

13. மீள்தன்மை மட்டு $3mg$ ஐயும் இயற்கை நீளம் $3l$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான, ஒப்பமான மீள்தன்மை இழை AB யின் ஒரு நுனி A ஆனது ஒரு கிடைச் சீலிங்கின் மீது ஒரு புள்ளியுடன் விறைப்பாக இணைக்கப்பட்டு, இழையின் மற்றைய நுனி B யிலிருந்து திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. துணிக்கையின் இயக்கத்திற்குத் தடை ஏற்படாத அளவிற்குச் சீலிங்கு உயரமானதெனக் கொள்க.

(i) A யிலிருந்து துணிக்கையின் நாப்பத் தானத்திற்கு உள்ள நிலைக்குத்துத் தூரத்தைக் காண்க.

இப்போது திணிவு m ஐ உடைய ஒரு சிறிய வளையத்தை A யிலே ஓய்வில் வைத்து அதனூடாக இழையை அனுப்பி வளையம் விடுவிக்கப்படுகின்றது. வளையம் இழை வழியே கீழ்நோக்கி இயங்குகின்றது.

(ii) வளையம் துணிக்கையுடன் மோதுவதற்குச் சற்று முன்னர் அதன் வேகம் $2\sqrt{2gl}$ எனக் காட்டுக.

(iii) வளையம் துணிக்கையுடன் மோதி ஒரு தனிப் பொருளாக அமையுமெனின், அச்சேர்த்திப் பொருளின் தொடக்க வேகம் $\sqrt{2gl}$ எனக் காட்டுக.

(iv) சேர்த்திப் பொருள் ஓர் எளிய இசை இயக்கத்துடன் இயங்குகின்றதெனக் காட்டி, அதன் கோண வேகத்தையும் அலைவுக் காலத்தையும் காண்க.

(v) சேர்த்திப் பொருளின் எளிய இசை இயக்கத்திற்குத் தடையாக அமையாமல் இருப்பதற்குச் சீலிங்கின் குறைந்தபட்ச உயரம் $(5+\sqrt{5})\,l$ ஆக இருக்க வேண்டுமெனக் காட்டுக.

14. (a) **a, b** ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரம் **அல்லாத** இரு பூச்சியமல்லாத காவிகள் ஆகும். λ, μ ஆகியன தரப்பட்டுள்ள இரு எண்ணிகளாக இருக்கும்போது $\lambda = \mu = 0$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம் $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக.

ஓர் இணைகரம் $OACB$ யில் பக்கம் BC ஆனது $BD = 3BC$ ஆக இருக்குமாறு D யிற்கு நீட்டப்பட்டுள்ளது. $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$ எனவும் $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ எனவும் கொண்டு **OD** யை **a, b** ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

OD, AC என்னும் கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி E எனவும் $OE = \lambda OD$ எனவும் $AE = \mu AC$ எனவும் கொண்டு λ, μ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

i, j ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகுக் காவிகளாக இருக்கும்போது $\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ எனவும் $\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ எனவும் எடுத்துரைப்பின், $OACB$ ஆனது ஒரு சாய்சதுரமாக இருப்பதற்குப் பூர்த்திசெய்ய வேண்டிய நிபந்தனையை x_1, y_1, x_2, y_2 ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(b) $AB = 6a$ ஆகவும் $BC = 2\sqrt{3}a$ ஆகவும் உள்ள ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ யின் AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P, Q, R, S ஆகும். $15\,\text{N}$, $\lambda\,\text{N}$, $5\,\text{N}$, $10\,\text{N}$, $\mu\,\text{N}$, $30\sqrt{3}$ N என்னும் பருமன்களை உடைய ஆறு விசைகள் எழுத்துகளின் ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே PQ, QR, RS, SP, AD, CD வழியே தாக்குகின்றன. இவ்விசைத் தொகுதி

(i) நாப்பத்தில் இருக்க **முடியாது** எனவும்

(ii) ஓர் இணையாக ஒடுங்குமெனின், அப்போது $\lambda = -40$ எனவும் $\mu = 20$ எனவும்

(iii) திசை AD வழியே ஒரு $10\,\text{N}$ விசையாக ஒடுங்குமெனின், அப்போது $\lambda = -40$ எனவும் $\mu = 30$ எனவும்

காட்டுக.

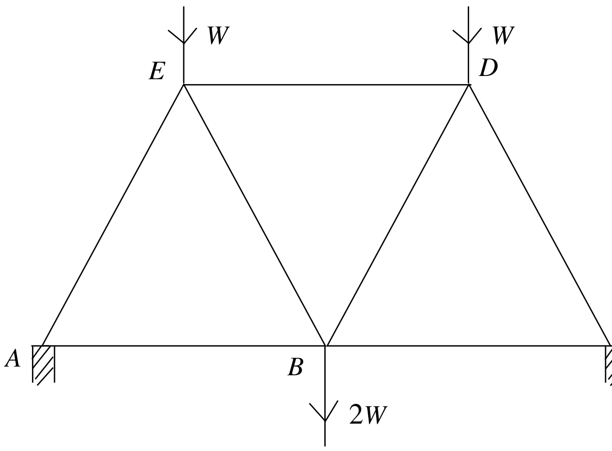
15. (a) ஒவ்வொன்றினதும் நீளம் $4a$ ஆகவுள்ள AB, BC, CD என்னும் மூன்று சீரான கோல்களின் நிறைகள் முறையே $\lambda W, W, \lambda W$ ஆகும். அவை B யிலும் C யிலும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AD யிற்குக் கீழே BC இருக்கத் தொகுதி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் இருக்குமாறு A, D ஆகிய அந்தங்கள் ஒன்றுக்கொன்று ஒரே கிடை மட்டத்தில் தூரம் $8a$ யில் இருக்கும் இரு நிலையான புள்ளிகளில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.

(ii) கோல் BC மீது B யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.

(iii) கோல் BC மீது B யிலும் C யிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களின் தாக்கக் கோடுகள் BC யிற்கு $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ என்னும் நிலைக்குத்துத் தூரத்தில் கீழே இருக்கும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், λ வின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b)



சம நீளமுள்ள ஏழு இலேசான கோல்களாலான ஒரு சட்டப்படல் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றது. அது A யிலும் C யிலும் உள்ள இரு ஆதாரங்களின் மீது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் இருக்கும் அதே வேளை B, D, E ஆகியவற்றில் முறையே $2W, W, W$ என்னும் சுமைகள் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளன.

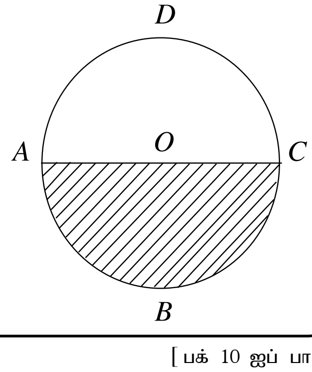
(i) சட்டப்படலின் மீது C யில் உள்ள ஆதாரத்தின் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(ii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலிற்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இதிலிருந்து, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை W வின் சார்பிற் காண்க. ஒவ்வொரு தகைப்பும் ஓர் இழுவையா, ஓர் உதைப்பா எனக் காட்டுக.

16. (a) ஒரு வட்டத்தின் வில்லின் வடிவத்தைக் கொண்டுள்ள ஒரு மெல்லிய சீரான கம்பியின் திணிவு மையம் வில்லின் மையத்திலிருந்து தூரம் $\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$ இல் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு r ஆனது வில்லின் ஆரையும் 2α ஆனது வில்லின் மூலம் அதன் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணமும் ஆகும்.

இதிலிருந்து, ஒரு மெல்லிய அரைவட்ட அடரின் திணிவு மையத்தின் அமைவைப் பெறுக.

உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சேர்த்திப் பொருள் ஆரை r ஐ உடைய ஒரு மெல்லிய அரைவட்ட அடர் ABC யினாலும் ஒரு மெல்லிய அரைவட்டக் கம்பி ADC யினாலும் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. O ஆனது வட்டத்தின் மையமாகும். அடர் செய்யப்பட்டுள்ள திரவியத்தின் பரப்படர்த்தி σ ஆகவும் கம்பி செய்யப்பட்டுள்ள திரவியத்தின் நேர்கோட்டு அடர்த்தி k ஆகவும் இருப்பின், O இலிருந்து சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையத்தின் தூரத்தைக் காண்க.



இச்சேர்த்திப் பொருள் புள்ளி A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும்போது நிலைக்குத்துடன் AB ஆக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

மேலும் இச்சேர்த்திப் பொருள் அவ்வாறு தொங்கவிடப்படும்போது A யிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே O இருப்பின், விகிதம் $k : \sigma$ ஐக் காண்க.

(b) ஒரு கோல் அதன் ஒரு முனை ஒரு கரடான கிடைத் தளத்தின் மீதும் கோலின் மீது உள்ள வேறொரு புள்ளி ஓர் ஒப்பமான நிலைத்த முளை மீதும் இருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே எல்லை நாப்பத்தில் உள்ளது. கோலின் மீது கரடான கிடைத் தளத்தின் மறுதாக்கத்தின் பருமன் கோலின் நிறைக்குச் சமனெனின், நிலைக்குத்துடன் கோலின் சாய்வானது உராய்வுக் கோணத்தின் அரைவாசிக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

17. (a) வாரத்தின்போது நுகர்வதற்காகத் தனக்கு விருப்பமான வகையை மீன் வாங்குவதற்காக ஒவ்வொரு ஞாயிற்றுக்கிழமையிலும் தனது வீட்டிலிருந்து அண்மையில் உள்ள மீன் சந்தைக்கு அல்லது சதொச விற்பனை நிலையத்திற்கு அல்லது பொதுச் சந்தைக்குச் செல்லும் இல்லத்தரசி ஒருவர் அந்த இடங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ ஆகும். அவர் அந்த இடங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் அவருக்கு விருப்பமான மீன் வகையை வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ ஆகும்.

(i) ஒரு குறித்த ஞாயிற்றுக்கிழமை அவர் தனக்கு விருப்பமான மீன் வகையை வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) ஒரு ஞாயிற்றுக்கிழமை அவர் தனக்கு மிகவும் விருப்பமான மீன் வகையை வாங்க முடியாவிட்டால், அவர் எந்த இடத்திற்குச் செல்கின்றமையால் அவ்வாறு நடைபெறுதல் சாத்தியமாகும்? உமது விடையை நிறுவுக.

(iii) ஒவ்வொரு ஞாயிற்றுக்கிழமையிலும் நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகள் சாராதனவெனக் கொண்டு அவர் அடுத்துவரும் மூன்று ஞாயிற்றுக்கிழமைகளில் குறைந்தபட்சம் இரு நாட்களிலேனும் மிகவும் விருப்பமான மீன் வகையை வாங்குவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(iv) அவருடைய அயலவர் ஒருவரும் ஒவ்வொரு ஞாயிற்றுக்கிழமையிலும் மீனை வாங்குவதற்காக அந்த இடங்களுக்குச் செல்லும் அதே வேளை அவ்வாறு செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$ ஆகும். அவர்கள் இருவரும் சாராதவர்களெனத் தீர்மானித்தால், ஒரு குறித்த ஞாயிற்றுக்கிழமையில் இருவரும் மீன் வாங்குவதற்கு ஒரே இடத்திற்குச் செல்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(b) x_i ; $i = 1, 2, 3, ..., n$ என்னும் தரவுக் கூட்டம் ஒன்றின் இடை $\overline{x}$ ஐயும் நியம விலகல் s_x ஐயும் வரையறுக்க. உருமாற்றம் $u_i = a + bx_i$ ஐப் பயன்படுத்தி $\overline{u} = a + b\overline{x}$ எனவும் $s_u^2 = b^2 s_x^2$ எனவும் நிறுவுக; இங்கு $\overline{u}$, s_u ஆகியன u_i பெறுமானக் கூட்டத்தின் இடையும் நியம விலகலும் ஆகும்.

x_i; $i = 1, 2, 3, ... , n_1$, y_i ; $i = 1, 2, 3, ... , n_2$ ஆகியன இரு நோக்கற் கூட்டங்களாகும். $\overline{x} = 35$, $s_x = 4$. உருமாற்றம் $u_i = 70 + 3x_i$ ஐப் பயன்படுத்தி x_i பெறுமானக் கூட்டம் u_i பெறுமானக் கூட்டமாக உருமாற்றப்படுகின்றது. $\overline{u}$ ஐயும் s_u ஐயும் கணிக்க.

அவ்வாறே உருமாற்றம் $u_i = a + by_i$ ஐப் பயன்படுத்தி y_i பெறுமானக் கூட்டத்தையும் ஒரே u_i பெறுமானக் கூட்டத்திற்கு உருமாற்ற வேண்டுமெனின் அத்துடன் $\overline{y} = 19$, $s_y = \frac{12}{5}$ எனத் தரப்பட்டிருப்பின், $a, b > 0$ ஆக இருக்குமாறு a, b ஆகியவற்றைக் காண்க.

ஒத்த உருமாற்றத்திற்கேற்ப x இன் பெறுமானம் 55, y யின் பெறுமானம் 32 என்னும் நோக்கல்கள் உருமாற்றப்படுமெனின், அவ்விரு பெறுமானங்களில் கூடுதலான u பெறுமானம் எந்நோக்கலிற்குக் கிடைக்கின்றதெனத் துணிக.

* * *