

க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2014
இணைந்த கணிதம் - வினாத்தாள் I
விடையளித்தலுக்கான வழிகாட்டி

பகுதி A

1. எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $1+2+3+\dots+n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$
 $n = 1$ ஆகும்போது இ.கை.ப = 1, வ.கை.ப = $\frac{9}{8}$
 $\therefore n = 1$ இற்குப் பேறு உண்மையானது. (5)

$n = p$ இருக்கும்போது (இங்கு $p \in \mathbb{Z}^+$) பேறு உண்மையெனக் கொள்வோம்.

அப்போது, $1 + 2 + 3 + \dots + p < \frac{1}{8}(2p+1)^2$ ஆகும். (இங்கு $p \in \mathbb{Z}^+$) (5)

இரு பக்கங்களுடனும் $p+1$ ஐக் கூட்டுமபோது,

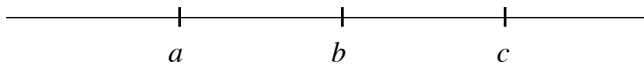
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + p + p + 1 &< \frac{1}{8}(2p+1)^2 + (p+1) \\ &= \frac{1}{8}[4p^2 + 12p + 9] \\ &= \frac{1}{8}[2p+3]^2 \\ &= \frac{1}{8}[2(p+1)+1]^2 \end{aligned}$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + p + p + 1 < \frac{1}{8}[2(p+1)+1]^2$$

$\therefore n = p+1$ இற்குப் பேறு உண்மையானது. (10)

$\therefore$ கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டினால் எல்லா நேர் நிறையெண் n இற்கும் பேறு உண்மையானது. (5) [25]

2. $E = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$ எனக் கொள்வோம்.



$$\left. \begin{array}{l} x < a \text{ போது } E < 0 \\ a < x < b \text{ போது } E > 0 \\ b < x < c \text{ போது } E < 0 \\ c < x \text{ போது } E > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{மூன்று ஆயிடைகளுக்கு மாத்திரம் சமனிலி சரியெனின் 10 புள்ளிகள்.} \\ \text{இரு ஆயிடைகளுக்கு மாத்திரம் சமனிலி சரியெனின் 05 புள்ளிகள்.} \end{array} \quad (15)$$

$x = a$ அல்லது $x = b$ ஆக இருக்கும்போது $E = 0$ ஆகும்.

$x = c$ இற்கு E வரையறுக்கப்படுவதில்லை. (5)

$\therefore$ தீர்வுத் தொடை $\{x : x \leq a \text{ அல்லது } b \leq x < c\}$ ஆகும். (5) [25]

3. FRACTION

இங்கு 8 வெவ்வேறு எழுத்துகள் உள்ளன.

இவ்வெழுத்துகள் எல்லாவற்றையும் கொண்டு செய்யத்தக்க
வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 8! \\ = 40320 \quad (5)$$

இங்கு (Vowels) 3 உயிரெழுத்துகள் உள்ள அதே வேளை
அவற்றை இரட்டைத் தானங்கள் நான்கில் தானப்படுத்தக்க
விதங்களின் எண்ணிக்கை

$$= {}^4P_3 \quad (5)$$

எஞ்சியுள்ள ஐந்து எழுத்துகளை தானப்படுத்தக்க விதங்களின்
எண்ணிக்கை

$$= 5! \quad (5)$$

∴ முழு ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$= {}^4P_3 \times 5! \quad (5)$$

$$= 2880 \quad (5)$$

மாற்று முறை

FRACTION

இங்கு 8 வெவ்வேறு எழுத்துகள் உள்ளன.

இந்த எழுத்துகள் எல்லாவற்றையும் கொண்டு செய்யத்தக்க
ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$= 8! \\ = 40320 \quad (5)$$

நான்கு இரட்டைத் தானங்கள் உள்ளன.

A, I, O என்னும் மூன்று உயிரெழுத்துக்கள் உள்ளன.

∴ இரட்டைத் தானங்கள் பூர்த்திசெய்யப்படத்தக்க விதங்களின்
எண்ணிக்கை

$$= 4 \times 3 \times 2 \quad (5)$$

எஞ்சியுள்ள தானங்கள் பூர்த்திசெய்யத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \quad (5)$$

∴ முழு ஒழுங்கமைப்புகளின் எண்ணிக்கை

$$= 4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \quad (5)$$

$$= 2880 \quad (5) [25]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + (1-b)}{x+1} \right\} = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(1-a)x - (a+b) + (1-b)/x}{1 + 1/x} \right\} = 0 \quad (5)$$

$$\text{இத்தேவையைப் பூர்த்திசெய்வதற்கு } 1 - a = 0, \quad a + b = 0 \quad (10)$$

$$\text{அதாவது } a = 1, \quad b = -1 \quad (5)$$

[25]

5. $y = a^x$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } \ln y = \ln a^x = x \ln a \Rightarrow \frac{1}{y} dy = \ln a dx \quad (5)$$

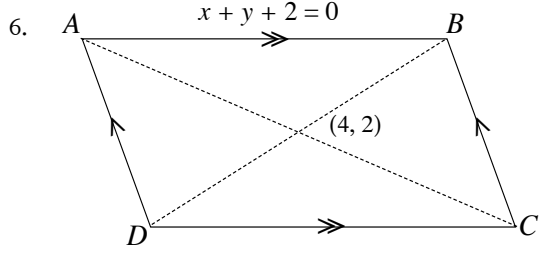
$$\therefore \frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a \quad (5)$$

$$\int \frac{a^x}{1+a^x} dx = \frac{1}{\ln a} \int \frac{a^x \ln a}{1+a^x} dx; a \neq 1 \text{ ஆகையால் } \ln a \neq 0 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\ln a} \ln (1 + a^x) + C. \text{ இங்கு } C \text{ ஓர் எதேச்சை மாறிலி} \quad (10)$$

(எதேச்சை மாறிலியைக் குறிப்பிடாவிட்டால் 5 புள்ளிகள் கழிக்கப்படும்.)

[25]



நேர்கோடு $x + 2 = 0$ புள்ளி A யினூடாகச் செல்வதனால் $x_A = -2$ (5)

பக்கம் AB யின் சமன்பாடு $x + y + 2 = 0$ ஆகையால், $y_A = 0$ (5)

$\therefore A \equiv (-2, 0)$

AC யின் நடுப்புள்ளி $(4, 2)$ ஆகையால் $x_c = 10$, $y_c = 4$

$\therefore C \equiv (10, 4)$

(5) + (5)

$\therefore$ பக்கம் DC யின் சமன்பாடு $y - 4 = -1(x - 10)$ (5)

$$x + y - 14 = 0$$

[25]

7. $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$

புள்ளி $(0, 1)$ இல் $\frac{1-t^2}{1+t^2} = 0$, $\frac{2t}{1+t^2} = 1$ (5)

$$t^2 - 1 = 0, (t-1)^2 = 0$$

$$t = \pm 1, t = 1$$

$\therefore$ புள்ளி $(0, 1)$ இற்கு ஒத்த பரமாணம் t யின் பெறுமானம் = 1 (5)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$
 (5)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2) \cdot 2 - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{(t^2 - 1)}{2t}$$
 (5)

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = 0$$
 (5)

$\therefore$ புள்ளி $(0, 1)$ இல் வளையிக்கு வரைந்த தொடலி x - அச்சுக்குச் சமாந்தரமாகும்.

மாற்று முறை :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ என எடுக்கும்போது } x = \cos \theta, y = \sin \theta$$
 (5)

புள்ளி $(0, 1)$ இல் $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$ ஆகையால் $\theta = \pi/2$

$$\text{அப்போது } t = \tan \pi/4 = 1$$

(5)

$$x^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (5)$$

x ஐக் குறித்து வகையிடும்போது $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} = 0 \quad (5)$$

$\therefore$ புள்ளி $(0, 1)$ இல் வளையிக்கு வரைந்த தொடலி x - அச்சிற்குச் சமாந்தமாகும்.

[25]

8. வட்டத்தின் மையம் $C \equiv (x_c, y_c)$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி C ஆனது தரப்பட்டுள்ள இரு நேர்கோடுகளிலும் கோண இருகூறாக்கி மீது இருப்பதனால்.

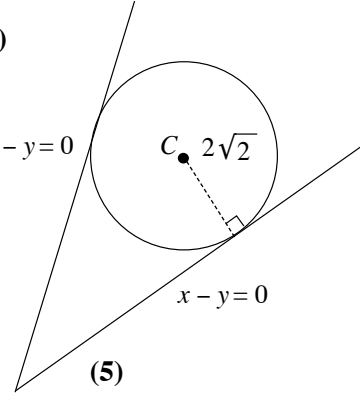
$$\left| \frac{7x_c - y_c}{\sqrt{7^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{x_c - y_c}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| \quad (5)$$

$$7x_c - y_c = 5(x_c - y_c) \text{ அல்லது } 7x_c - y_c = -5(x_c - y_c) \quad 7x - y = 0$$

$$x_c + 2y_c = 0 \text{ அல்லது } 2x_c - y_c = 0$$

புள்ளி $C(x_c, y_c)$ முதற் கால்வட்டத்தின் மீது இருக்கும்போது

$$x_c + 2y_c \neq 0 \text{ ஆகையால் } 2x_c - y_c = 0 \text{ ஆக இருத்தல் வேண்டும்} \quad (5)$$



புள்ளி C யிலிருந்து நேர்கோடு $x - y = 0$ இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் = வட்டத்தின் ஆறை ஆகையால்.

$$\left| \frac{x_c - y_c}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2} \quad (5)$$

$$x_c = \pm 4$$

புள்ளி C முதற் கால் வட்டத்தில் இருப்பதனால் $x_c \neq -4$.

$$\therefore x_c = 4$$

$$\therefore y_c = 8 \quad (5)$$

$$\therefore \text{வட்டத்தின் சமன்பாடு } (x - 4)^2 + (y - 8)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 16y + 72 = 0 \quad (5)$$

[25]

9. $\text{Arg } iz = \pi$ ஆகையால் $\text{Arg } z = \pi/2$. (5)

$|z| = r$ எனின், அப்போது $z = ir$. (5)
அப்போது,

$$|1 + ir| = \sqrt{1+r^2} \cdot |z-1| = |-1 + ir| = \sqrt{1+r^2} \quad (5)$$

$$|z+1| \cdot |z-1| = 4 \text{ ஆகையால் } 2\sqrt{1+r^2} = 4$$
$$1+r^2 = 4$$
$$r^2 = 3$$
$$r = \sqrt{3} \quad (5)$$

$$\therefore z = i\sqrt{3} \quad (5) \quad [25]$$

10. $\theta + \alpha = \frac{\pi}{6}$ ஆக இருக்கும்போது,

$$\frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$\sqrt{3} \tan \theta + \tan \theta \tan \alpha + \sqrt{3} \tan \alpha = 1$$

$$\tan \theta (\sqrt{3} + \tan \alpha) + \sqrt{3} (\tan \alpha + \sqrt{3}) = 1 + 3 \quad (5)$$

$$(\sqrt{3} + \tan \alpha)(\sqrt{3} + \tan \theta) = 4$$

மேற்குறித்த பேறில் $\theta = \alpha$ ஐ இடும்போது (5)

$$\theta = \alpha = \pi/12, (\sqrt{3} + \tan \pi/12)^2 = 4 \quad (5)$$

$$\tan \pi/12 > 0 \text{ ஆகையால் } \sqrt{3} + \tan \pi/12 = 2$$
$$\tan \pi/12 = 2 - \sqrt{3} \quad (5) \quad [25]$$

$$11. (i) \quad px^2 + qx + r \equiv p(x - \alpha)(x - \beta) \quad (5)$$

$$\equiv px^2 - p(\alpha + \beta)x + p\alpha\beta \quad (5)$$

குணகங்களை ஒப்பிடும்போது

$$-p(\alpha + \beta) = q, \quad p\alpha\beta = r \quad (5) + (5)$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta) = -q/p, \quad \alpha\beta = r/p \quad [20]$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda + 3\mu = -a \quad \text{---} \quad (1) \\ 3\lambda\mu = b \quad \text{---} \quad (2) \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3\lambda + \mu = -c \quad \text{---} \quad (3) \\ 3\lambda\mu = d \quad \text{---} \quad (4) \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$(3), (4) \text{ ஆகியவற்றிலிருந்து } b = d \quad (5)$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 4(\lambda + \mu) = -(a + c)$$

$$\lambda + \mu = -\frac{1}{4}(a + c) \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow \lambda\mu = \frac{1}{3}b \quad (5)$$

λ, μ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$$x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = 0 \quad (5)$$

$$x^2 - \left[-\frac{1}{4}(a + c)\right]x + \frac{b}{3} = 0 \quad (5)$$

$$12x^2 + 3(a + c)x + 4b = 0 \quad [35]$$

$$(ii) \quad f(x) = x^3 - 2ax^2 + (ab + a^2 - b^2)x - ab(a - b), \text{ இது } a \neq b$$

$$f(a - b) = (a - b)^3 - 2a(a - b)^2 + (ab + a^2 - b^2)(a - b) - ab(a - b) \quad (5)$$

$$= (a - b)[(a - b)^2 - 2a(a - b) + ab + a^2 - b^2 - ab]$$

$$= (a - b)[a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 + 2ab + a^2 - b^2]$$

$$= 0 \quad (10)$$

$\therefore (x - a + b)$ ஆனது $f(x)$ இன் ஒரு காரணியாகும்.

$$\therefore f(x) = (x - a + b)[x^2 - ax - bx + ab] \quad (10)$$

$$= (x - a + b)(x - a)(x - b) \quad (5)$$

$$\therefore f(x) = 0 \text{ இன் தீர்வுகள் } x = a - b, x = a, x = b. \quad (15) [45]$$

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ இன் மூலங்கள் 1, 3, 4 ஆகையால்

$$\text{மேற்குறித்த பேரில் } a = 4, b = 1 \text{ என இடும்போது, (அப்போது } a - b = 3 \text{ ஆகையால்)} \quad (10)$$

$$p = -2a = -8 \quad (5)$$

$$q = ab + a^2 - b^2 = 4 + 16 - 1 = 19 \quad (5)$$

$$r = -ab(a - b) = -4(3) = -12 \quad (5)$$

$$[\text{குறிப்பு : } a = 4, b = 3 \text{ என இடும்போதும் இப்பேரைப் பெறலாம்.}] \quad [25]$$

(iii) $\frac{7x-10}{x^2(x-2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $A, B, C \in \mathbb{R}$ (5)

$$7x-10 \equiv Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

மாறி x இற்கு எதேச்சைப் பெறுமானத்தைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் அல்லது குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம்

$$A = -1$$

$$B = 5$$

$$C = 1$$

$$\therefore \frac{7x-10}{x^2(x-2)} \equiv \frac{-1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{(x-2)}$$
 (5) [25]

12. (i)

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r a^{n-r} b^r$$

$$\text{அல்லது } (a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \dots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}^nC_n b^n$$

$$\text{இங்கு } n \in \mathbb{Z}^+, {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}; 0 \leq r \leq n$$
 (15)

$$a=b=1 \text{ என இடும்போது } 2^n = \sum_{r=0}^n {}^nC_r$$
 (10)

$$\begin{aligned} (a+b)^{2n} &= (a+b)^n \cdot (a+b)^n \\ &= \left[{}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + \dots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}^nC_n b^n \right] \left[{}^nC_0 b^n + {}^nC_1 b^{n-1} a + \dots + {}^nC_r b^{n-r} a^r + \dots + {}^nC_n a^n \right] \end{aligned}$$
 (10)

$a^n b^n$ இன் குணகங்களை இடும்போது

$${}^{2n}C_n = {}^nC_0^2 + {}^nC_1^2 + \dots + {}^nC_r^2 + \dots + {}^nC_n^2$$
 (10)

$$= \sum_{r=0}^n {}^{2n}C_n$$
 (10)

$$\sum_{r=1}^n r \cdot {}^nC_r a^r b^{n-r} = \sum_{r=1}^n r \cdot \frac{n!}{(n-r)! r!} a^r b^{n-r}$$
 (5)

$$= \sum_{r=1}^n na \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)! r!} a^{r-1} b^{n-r}$$
 (5)

$$= na \sum_{r-1=0}^n {}^{n-1}C_{r-1} a^{r-1} b^{(n-1)-(r-1)}$$
 (5)

$$= na \cdot (a+b)^{(n-1)}$$
 (5)

$$= na, \quad a+b=1 \text{ ஆகும்போது} \quad [75]$$

$$(ii) \quad S_n = \sum_{r=1}^n U_r = \frac{n}{12} (n+1)(n+2)(n+3)$$

$$U_n = S_n - S_{n-1} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)[(n+3) - (n-1)] \quad (5)$$

$$= \frac{n}{3} (n+1)(n+2)$$

$$\therefore U_r = \frac{r}{3} (r+1)(r+2) \quad ; \quad 1 \leq r \leq n \quad (5)$$

$$\frac{1}{U_r} = \frac{3}{r(r+1)(r+2)}$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)} \right\} \quad (10)$$

$$= k \{f(r) - f(r+1)\}$$

$$\text{இங்கு } k = \frac{3}{2}, \quad f(r) = \frac{1}{r(r+1)} \quad (10)$$

$$\frac{1}{U_1} = \frac{3}{2} \{f(1) - f(2)\} \quad (5)$$

$$\frac{1}{U_2} = \frac{3}{2} \{f(2) - f(3)\}$$

$$\frac{1}{U_{n-1}} = \frac{3}{2} \{f(n-1) - f(n)\}$$

$$\frac{1}{U_n} = \frac{3}{2} \{f(n) - f(n+1)\} \quad (5)$$

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r} = \frac{3}{2} \{f(1) - f(n+1)\} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{4} - \frac{3}{2(n+1)(n+2)} \right\} \quad (5)$$

$$= \frac{3}{4} \quad (\text{முடிவுள்ள பெறுமானம்}) \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r} \text{ ஒருங்குகின்றது.}$$

எல்லா $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $\frac{1}{U_r} > 0$ ஆகையால்,

$$\frac{1}{U_1} \leq \sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{U_r} \quad (5)$$

$$\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \leq \sum_{r=1}^n \frac{1}{U_r} < \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \left\{ 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right\} < \frac{3}{4} \quad (5)$$

$$2 \leq 3 \left\{ 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \right\} < 3 \quad [75]$$

13. (i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (5)$$

$$\therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \quad (5) \quad [15]$$

$$\mathbf{A}^{2015} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}^2)^{1007} \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{I} \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) + (5)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ -13 & -8 \end{pmatrix} \quad (5) \quad [25]$$

(ii) $z^6 = 1$

$$\Rightarrow z^6 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (z^3 - 1)(z^3 + 1) = 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow (z - 1)(z + 1)(z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1) = 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow z - 1 = 0 \text{ அல்லது } z + 1 = 0 \text{ அல்லது } z^2 + z + 1 = 0 \text{ அல்லது } z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow z = \pm 1, z = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}, z = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (15)$$

இவ்வாறு $z^6 = 1$ இன் ஆறு மூலங்கள் கிடைக்கின்றன.

இம்மூலம் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டு 1 ஆக இருக்கம் அதே வேளை வீச்சம்

$$\pi/3 \text{ இன் மடங்காகும்.} \quad (15)$$

இந்த ஆறு மூலங்களையும் ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றவாறு வகைகுறிக்கலாம்.

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1$$

இந்த A, B, C, D, E, F ஆகிய ஆறு புள்ளிகளும் O வை மையமாகவும் 1 அலகை ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மீது உள்ளன.

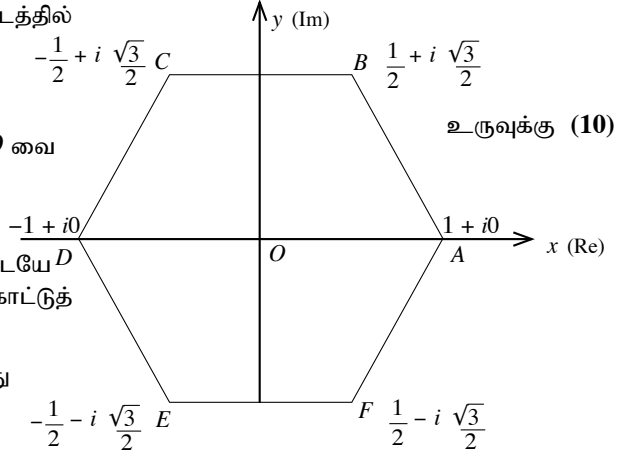
(10)

அப்போது $|z_1 - z_2|$ என்பது அந்த ஆறு புள்ளிகளிடையே எவையேனும் இரு புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளமாகும்.

$\therefore |z_1 - z_2| = 1$ அலகு அல்லது 2 அலகு அல்லது $\sqrt{3}$ அலகு.

(10)

($AB = 1, AD = 2, AC = \sqrt{3}$ ஆகையால்) [75]



உருவுக்கு (10)

(iii) $|z| = \sqrt{3} \Rightarrow OP = \sqrt{3}$ (மாறிலிகள்) (5)

$\therefore$ புள்ளி P ஆனது, $(0, 0)$ ஐ மையமாகவும் $\sqrt{3}$ ஐ ஆரையாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் மீது உள்ளது. (5)

$$|z + 2| = |z - (-2)| = PQ$$

P மாறும்போது,

$$QA' \leq QP \leq QA$$

(5)

$$2 - \sqrt{3} \leq |z + 2| \leq 2 + \sqrt{3}$$

(5)

$$\text{Arg}(z + 2) = \text{Arg}(z - (-2)) = \theta$$

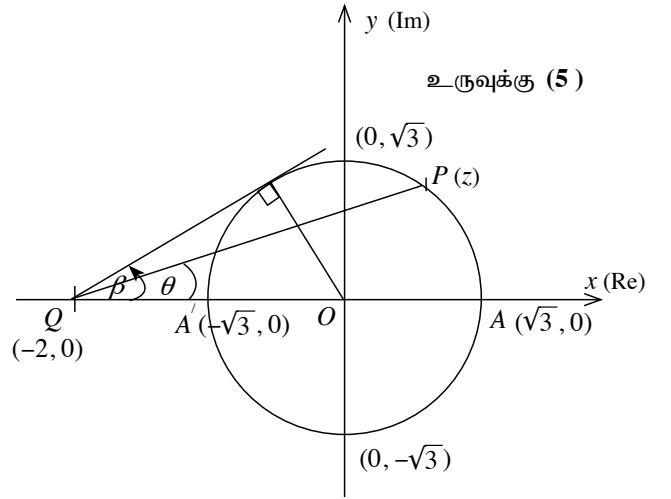
$$-\beta \leq \theta \leq \beta$$

(5)

$$\beta = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ஆகையால், } \beta = \pi/3$$

$$\therefore -\pi/3 \leq \text{Arg}(z + 2) \leq \pi/3$$

(5) [35]



உருவுக்கு (5)

14.(i) $x = \sec \theta + \tan \theta$

$$x + \frac{1}{x} = \sec \theta + \tan \theta + \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} \times \frac{\sec \theta - \tan \theta}{\sec \theta - \tan \theta}$$

$$= \sec \theta + \tan \theta + \sec \theta - \tan \theta \quad (\because \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1 \text{ சிசு})$$

$$= 2 \sec \theta$$

(5)

$$y = \csc \theta + \cot \theta$$

$$y + \frac{1}{y} = \csc \theta + \cot \theta + \frac{1}{\csc \theta + \cot \theta} \times \frac{\csc \theta - \cot \theta}{\csc \theta - \cot \theta}$$

$$= \csc \theta + \cot \theta + \csc \theta - \cot \theta \quad (\because \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1 \text{ ஆகையால்,})$$

$$= 2 \csc \theta$$

(5)

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec \theta \tan \theta + \sec^2 \theta \quad (5)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\operatorname{cosec} \theta \cot \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} / \frac{dx}{d\theta} ; \quad \frac{dx}{d\theta} \neq 0 \text{ இற்கு} \quad (5)$$

$$= \frac{-\operatorname{cosec} \theta (\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta)}{\sec \theta (\sec \theta + \tan \theta)} \quad (5)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y} \right) \cdot y}{\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot x} \quad (5)$$

$$= -\frac{1+y^2}{1+x^2} \quad [35]$$

(ii) $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ எனக் கொள்வோம்.

$x > 0$ இற்கு $f(x)$ தொடர்ச்சியானது. (5)

$$f'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \quad (5)$$

$x > 0$ இற்கு $f'(x) > 0$ (5)

$\therefore x > 0$ இற்கு f அதிகரிக்கும் ஒரு சார்பாகும். (5)

மேலும் $f(0) = 0$. (5)

$\therefore$ எல்லா $x > 0$ இற்கும் $f(x) > 0$ (5)

$\therefore$ எல்லா $x > 0$ இற்கும் $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} > \ln(1+x)$

$y = f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ ஐக் கருதுவோம்.

ஆயிடை $-1 < x \leq 1$ இல் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது (5)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \longrightarrow +\infty \quad (5)$$

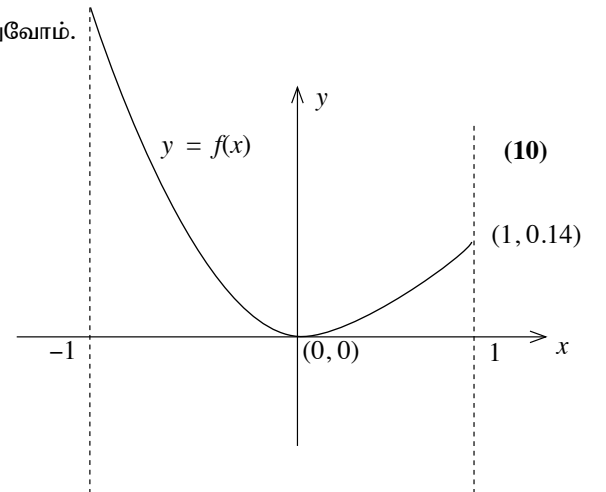
$$f'(x) = \frac{x^3}{1+x}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 < x < 0 \text{ இற்கு } f'(x) < 0 \\ f'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$0 < x \leq 1 \text{ இற்கு } f'(x) > 0 \quad (5)$$

$\therefore (0, 0)$ ஓர் இழிவுப் புள்ளி

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ln 2 = \frac{5}{6} - \ln 2 \approx 0.83 - 0.69 = 0.14 \quad (5)$$



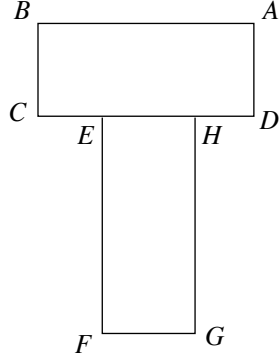
[70]

(iii)

P

$18l$

Q



$AD = x$ அலகுகள் எனவும் $AB = y$ அலகுகள் எனவும் கொள்வோம்.

$$\left. \begin{aligned} \text{அப்போது } ABCD \text{ யின் சுற்றளவு} &= 2(x + y) \\ \text{சட்டம் } EFGH \text{ இன் நீளம்} &= x + 2y \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{சட்டம் } ABCD \text{ யின் சுற்றளவு} + \text{சட்டம் } EFGH \text{ இன் நீளம்} &= 18l \\ 3x + 4y &= 18l \\ y &= \frac{3(6l - x)}{4} \quad (5) \end{aligned}$$

பந்தலின் மாதிரியுருவின் பரப்பளவு $= A$ எனின்,

$$\begin{aligned} A &= 2xy \quad (5) \\ &= 2x \cdot \frac{3}{4}(6l - x) \\ &= \frac{3}{2}(6lx - x^2) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{3}{2}(6l - 2x) = 3(3l - x) \quad (5)$$

$$\therefore x = 3l \text{ ஆகும்போது } \frac{dA}{dx} = 0. \quad (5)$$

$$x < 3l \text{ ஆகும்போது } \frac{dA}{dx} > 0, x > 3l \text{ ஆகும்போது } \frac{dA}{dx} < 0. \quad (5)$$

அதாவது $x = 3l$ ஆகும்போது A உயர்ந்தபட்சமாகும். (5)

$$\begin{aligned} \text{அப்போது சட்டம் } ABCD \text{ யிற்குரிய கம்பித் துண்டின் நீளம்} &= 2(x + by) \\ &= 2\left(3l + \frac{3}{4} \cdot 3l\right) \\ &= \frac{21l}{2} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{சட்டம் } EFGH \text{ இற்குரிய கம்பித் துண்டின் நீளம்} &= 18l - \frac{21l}{2} \\ &= \frac{15l}{2} \end{aligned}$$

[45]

15. (i) $\int \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

பிரதியீடு : $\frac{x}{a} = a \sin \theta$ (5)

அப்போது $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$ (5)

$dx = a \cos \theta \, d\theta$ (5)

$= \int \theta \, a \cos \theta \cdot a \cos \theta \, d\theta$

$= a^2 \int \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta$

$= \frac{a^2}{2} \int \theta \cdot (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$ (5)

$= \frac{a^2}{2} \int \theta \, d\theta + \frac{a^2}{2} \int \theta \cos 2\theta \, d\theta$

$= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\theta^2}{2} + \frac{a^2}{2} \int \theta \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \, d\theta$ (5)

$= \frac{a^2 \theta^2}{4} + \frac{a^2}{2} \left[\theta \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta - \int \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \right]$ (5)

$= \frac{1}{4} a^2 \theta^2 + \frac{1}{4} a^2 \theta \sin 2\theta - \frac{a^2}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) + C$ இங்கு C ஓர் எதேச்சை மாறிலி (5)

$= \frac{1}{4} a^2 \theta^2 + \frac{1}{4} a^2 \theta \sin 2\theta + \frac{1}{8} a^2 \cos 2\theta + C$

$= \frac{1}{4} a^2 \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4} a^2 \cdot \sin^{-1} \frac{x}{a} \cdot 2 \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{1}{8} a^2 \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} \right) + C$

$= \frac{1}{4} a^2 \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} a x \sin^{-1} \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{8} a^2 \left(\frac{a^2 - 2x^2}{a^2} \right) + C$

$= \frac{1}{4} a^2 \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{8} (a^2 - 2x^2) + C$ (5) [40]

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \int_0^p f(p-x) \, dx &= \int_p^0 f(\theta) \cdot (-d\theta) && \text{பிரதியீடு : } \theta = p-x && (5) \\
 &= - \int_p^0 f(\theta) \, d\theta && \text{அப்போது } d\theta = -dx && (5) \\
 &= \int_0^p f(\theta) \, d\theta && x=0 \text{ ஆக இருக்கும்போது } \theta = p, x = p && (5) \\
 &= \int_0^p f(x) \, dx && \text{ஆக இருக்கும்போது } \theta = 0 && \\
 &&& \text{ஆயிடை } [0, p] \text{ இல் } f(x) \text{ தொடர்ச்சியானதாகையால்,} && \\
 &&& f(\theta) \text{ உம் தொடர்ச்சியானது.} &&
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^a \frac{(a-x)^n}{(a-x)^n + x^n} dx \\
 &= \int_0^a \frac{[a - (a-x)]^n}{[a - (a-x)]^n + (a-x)^n} dx \quad (10) \quad ; \text{மேற்குறித்த கோட்பாட்டை} \\
 &\quad \text{இரும்போது}
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^a \frac{x^n}{x^n + (a-x)^n} dx \quad (5)$$

$$= J \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 I + J &= \int_0^a \frac{(a-x)^n + x^n}{(a-x)^n + x^n} dx \quad (10) \\
 (5)
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^a dx \quad (5)$$

$$= [x]_0^a \quad (5)$$

$$= a \quad (5)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} a. \quad (5) \quad [55]$$

$$(iii) \quad \int_0^2 (x+2)^3 (x+5) dx \quad \text{பிரதியீடு : } u = x+2 \quad (5)$$

$$\text{அப்போது } du = dx, \quad (5)$$

$$x = 0 \text{ ஆக இருக்கும்போது } u = 2$$

$$x = 2 \text{ ஆக இருக்கும்போது } u = 4$$

$$(5)$$

$$= \int_2^4 u^3 (u-2+5) du$$

$$= \int_2^4 (u^4 + 3u^3) du$$

$$= \left[\frac{u^5}{5} + \frac{3u^4}{4} \right]_2^4 \quad (5)$$

$$= \left(\frac{1024}{5} + \frac{3 \times 256}{4} \right) - \left(\frac{32}{5} + \frac{3 \times 16}{4} \right)$$

$$= \frac{1024 - 32}{5} + 192 - 12$$

$$= \frac{992}{5} + 180$$

$$= \frac{1892}{5} \quad (5)$$

$$[25]$$

16.(i) $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ இன் வெட்டுப் புள்ளி $P(x_0, y_0)$ எனக் கொள்வோம்.

ஒரே தடவை பூச்சியமல்லாத λ, μ ஆகிய

பரமானங்களுக்குச் சமன்பாடு $\lambda l_1 + \mu l_2 = 0$ ஐக் கருதுவோம்.

அதாவது, $\lambda(ax + by + c) + \mu(px + qy + r) = 0$

$$(\lambda a + \mu p)x + (\lambda b + \mu q)y + (\lambda c + \mu r) = 0$$

இது x, y ஆகியவற்றின் ஏகபரிமாணச் சமன்பாடாகையால், ஒரு நேர்கோட்டை வகைகுறிக்கின்றது.

$$l_1 = 0, P(x_0, y_0) \text{ இனாடாகச் செல்வதனால் } ax_0 + by_0 + c = 0 \text{ ————— (1) (10)}$$

$$l_2 = 0, P(x_0, y_0) \text{ இனாடாகச் செல்வதனால் } px_0 + qy_0 + r = 0 \text{ ————— (2)}$$

$$\lambda \text{ (1) } + \mu \text{ (2) } \text{ ஆகியவற்றிலிருந்து } (\lambda a + \mu p)x_0 + (\lambda b + \mu q)y_0 + (\lambda c + \mu r) = 0 \text{ (5)}$$

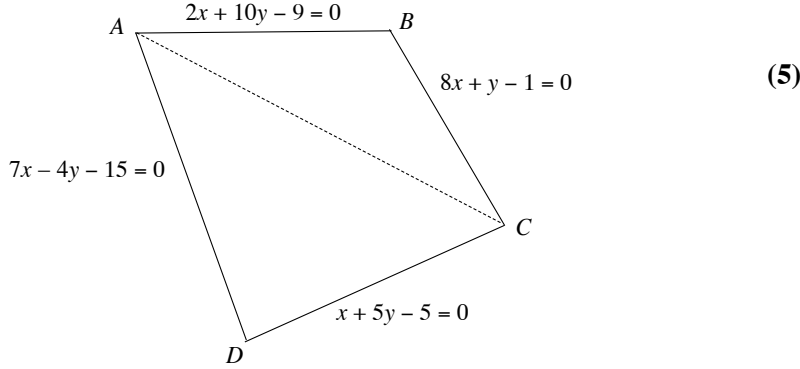
அதாவது, நேர்கோடு $\lambda l_1 + \mu l_2 = 0$ ஆனது $P(x_0, y_0)$ இனாடாகச் செல்கிறது.

$\therefore \lambda, \mu$ ஆகிய பரமானங்களின் பல்வேறு பெறுமானங்களுக்கு

$\lambda l_1 + \mu l_2 = 0$ இன் மூலம் $l_1 = 0, l_2 = 0$ ஆகியவற்றின் வெட்டுப்புள்ளியினாடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு நேர்கோடு வகைகுறிக்கப்படுகின்றது.

($\lambda = 0$ ஆகும்போது அதன் மூலம் $l_2 = 0$ உம் $\mu = 0$ ஆகும்போது $l_1 = 0$ உம் தரப்படுகின்றன.

[30]



மேற்குறித்த கோட்பாட்டிற்கேற்ப $\lambda, \mu \neq 0$ ஆகவுள்ள λ, μ என்னும் பரமானங்களைக் கொண்டு AC இன் சமன்பாடு,

$$\lambda (2x + 10y - 9) + \mu (7x - 4y - 15) = 0 \text{ (5)}$$

$$\lambda (2x + 10y - 10 + 1) + \mu (8x - x + y - 5y - 15) = 0 \text{ (5)}$$

$$\lambda \cdot [2(x + 5y - 5) + 1] + \mu [(8x + y - 1) - (x + 5y - 5) - 19] = 0 \text{ (5)}$$

$$\text{இந்நேர்கோடு } C \text{ யினாடாகச் செல்லும்போது } x_c + 5y_c - 5 = 0, \text{ (5)}$$

$$8x_c + y_c - 1 = 0 \text{ ஆகையால்,}$$

$$\lambda [2 \cdot (0) + 1] + \mu [(0) - (0) - 19] = 0 \text{ (5)}$$

$$\lambda - 19\mu = 0 \text{ (5)}$$

$$\lambda = 19\mu \text{ (5)}$$

$$\therefore AC \text{ யின் சமன்பாடு } 19\mu (2x + 10y - 9) + \mu (7x - 4y - 15) = 0$$

$$\mu \neq 0 \text{ ஆகையால் } 19(2x + 10y - 9) + (7x - 4y - 15) = 0$$

$$45x + 186y - 186 = 0 \text{ (5)}$$

$$15x + 62y - 62 = 0$$

[45]

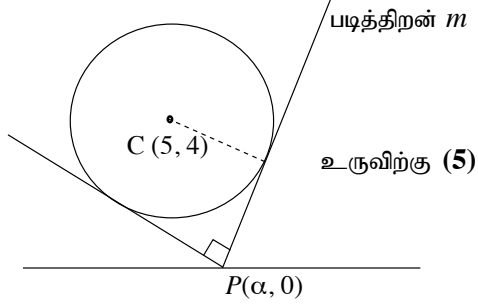
$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad x^2 + y^2 - 10x - 8y + 31 &= 0 \\
 (x^2 - 5)^2 + (y - 4)^2 + 31 - 25 - 16 &= 0 & (5) \\
 (x - 5)^2 + (y - 4)^2 - 10 &= 0 \\
 (x - 5)^2 + (y - 4)^2 &= 10 \\
 \therefore \text{மையம்} &= (5, 4) & (5) \\
 \text{ஆரை} &= \sqrt{10} \text{ அலகுகள்} & (5) \quad [15]
 \end{aligned}$$

x அச்ச மீது இருக்கும் புள்ளி $P(\alpha, 0)$ இலிருந்து வட்டத்திற்கு வரைந்த தொடலியின் படித்திறன் m எனக் கொள்வோம்.
அப்போது தொடலியின் சமன்பாடு

$$y - 0 = m(x - \alpha)$$

$$mx - y - m\alpha = 0 \quad (10)$$

வட்டத்தைத் தொடுவதற்கு



$$\left| \frac{5m - 4 - m\alpha}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{10} \quad (10)$$

$$\left| \frac{(5 - \alpha)m - 4}{\sqrt{m^2 + 1}} \right| = \sqrt{10}$$

$$[(5 - \alpha)m - 4]^2 = 10(m^2 + 1)$$

$$(25 - 10\alpha + \alpha^2 - 10)m^2 - 8(5 - \alpha)m + 16 - 10 = 0$$

$$(\alpha^2 - 10\alpha + 15)m^2 - 8(5 - \alpha)m + 6 = 0 \quad (10)$$

இது m இன் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும்; மூலங்கள் m_1, m_2 எனின்,

இரு தொடலிகளும் செங்குத்தாக இருப்பதற்கு $m_1 \times m_2 = -1$ ஆகையால் (5)

$$\frac{6}{\alpha^2 - 10\alpha + 15} = -1 \quad (5)$$

$$\alpha^2 - 10\alpha + 21 = 0$$

இது α வின் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடாகும்; இங்கு பிரித்துக்காட்டி (5)

$$\Delta_\alpha = (10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21$$

$$= 100 - 84$$

$$= 16$$

$$> 0$$

$\Delta_\alpha > 0$ ஆகையால், α இற்கு இரு வேறுவேறான மெய்ப் பெறுமானங்கள் உண்டு.

$\therefore P(\alpha, 0)$ வடிவத்தில் இரு புள்ளிகள் உள்ளன. (10) [60]

17. (i) யாதாயினுமொரு முக்கோணி ABC யிற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில் கோசைன் நெறி,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (5)$$

$$\text{அவ்வாறே } b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad \text{_____} \quad (1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{_____} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ ன் } b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a(c \cos B + b \cos C) \quad (5)$$

$$\Rightarrow a = c \cos B + b \cos C ; a \neq 0 \text{ ன் } (5)$$

$$(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C \\ = (c \cos B + b \cos C) + (c \cos A + a \cos C) + (b \cos A + a \cos B) \quad (5)$$

$$= a + b + c \quad (5) \quad [25]$$

$$(ii) \quad \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{5}{12} \right), \quad \beta = \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$0 < \alpha, \beta < \pi/2, \tan \beta > \tan \alpha \text{ ஆகையால் } \beta > \alpha$$

$$\therefore 0 < \alpha < \beta < \pi/2 \quad (5)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (5)$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} \quad (5) + (5)$$

$$= \frac{48}{65} + \frac{15}{65}$$

$$= \frac{63}{65}$$

$$\alpha < \beta \text{ ஆகையால் } \sin(\alpha - \beta) < 0 \quad (5)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = -\sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} \quad (5)$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{63}{65}\right)^2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2 \times 128}{65^2}}$$

$$= -\left(\frac{16}{65}\right) \quad (5) \quad [35]$$

$$(iii) \quad \tan 3x = \tan(2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \cdot \tan x} \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \cdot \tan x} \quad (5)$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} \quad (5)$$

$$\therefore \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2 \quad [35]$$

* * *

க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2014

இணைந்த கணிதம் - வினாத்தாள் II

விடையளித்தலுக்கான வழிகாட்டி

பகுதி A

1. துணிக்கை P யை மாத்திரம் எறிந்தால், அது அடையும் உயரம் h எனவும் அதற்காக P யிற்கு எடுக்கும் நேரம் T எனவும் எடுப்போம்.

துணிக்கை P ஆனது $\frac{h}{2}$ தூரம் கிளம்புவதற்கு எடுக்கும் நேரம் T_1 ஆகவும் துணிக்கை Q ஆனது $\frac{h}{2}$ தூரம் விழுவதற்கு எடுக்கும் நேரம் T_2 ஆகவும் இருப்பின்,

$$T_1 + T_2 = T \quad \text{--- (1) (5)}$$

துணிக்கை P யின் வரைபிலிருந்து

$$T = \frac{u}{g}, \quad h = \frac{1}{2} uT = \frac{u^2}{2g} \quad \text{(5)}$$

துணிக்கை Q வின் வரைபிலிருந்து

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} T_2 g T_2 \quad \text{(5)}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{4g} = \frac{1}{2} g T_2^2$$

$$\Rightarrow T_2^2 = \frac{u^2}{2g^2}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{u}{\sqrt{2}g}, \quad T_2 > 0 \text{ ஆகையால்,}$$

$$\therefore \text{(1) இலிருந்து } T_1 = T - T_2 = \frac{u}{g} - \frac{u}{\sqrt{2}g} = \frac{u}{\sqrt{2}g} (\sqrt{2} - 1) \quad \text{(5)}$$

இங்கு $T_2 > T_1$.

துணிக்கை P இயக்கத்தை ஆரம்பிப்பதற்கு நேரம் $T_2 - T_1$ இற்கு முன்னர் துணிக்கை Q இயக்கத்தை ஆரம்பிக்க வேண்டும்.

$$T_2 - T_1 = \frac{u}{\sqrt{2}g} - \frac{u}{\sqrt{2}g} (\sqrt{2} - 1) = \frac{u}{\sqrt{2}g} (2 - \sqrt{2}) = \frac{u}{g} (\sqrt{2} - 1) \quad \text{(5) [25]}$$

2. தரை தொடர்பாக ஆப்பின் ஆர்முடுகல் $\rightarrow a$ எனவும் ஆப்பு தொடர்பாகத் துணிக்கையின் ஆர்முடுகல்

$\frac{a'}{a}$ எனவும் கொள்வோம்.

அப்போது தரை தொடர்பாகத் துணிக்கையின்

ஆர்முடுகல் $= \frac{a'}{a} \rightarrow a$ ஆகும்.

தொகுதிக்கு $\rightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ என இடும்போது

$$0 = Ma + m(a - a' \cos \alpha) \quad \text{(5)}$$

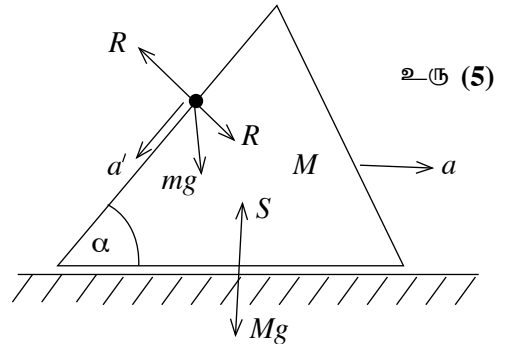
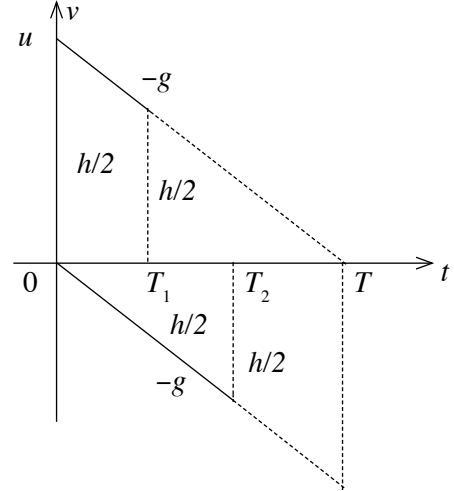
$$\Rightarrow ma' \cos \alpha = (M + m)a \quad \text{--- (1)}$$

தரை தொடர்பாக ஆப்புக்கு $\rightarrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$ என இடும்போது,

$$d = \frac{1}{2} at^2 \quad \text{--- (2)}$$

(5)

[பக். 2 ஐக் பார்க்க



துணிக்கை ஆப்பு தொடர்பாக  $s = ut + \frac{1}{2} at^2$ என இடும்போது,

$$s = \frac{1}{2} at^2 \text{ ——— (3)} \quad (5)$$

(2) , (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $\frac{s}{d} = \frac{a'}{a}$

$$= \frac{M+m}{m} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \quad (5)$$

$$\Rightarrow ms \cos \alpha = (M+m)d \quad [25]$$

3. பந்து சுவரில் செங்குத்தாகப் படுவதனால் அப்போது அதன் நிலைக்குத்து வேகக் கூறு பூச்சியமாகும்.

$\therefore$ A யிலிருந்து B வரைக்குமான இயக்கத்திற்கு எடுக்கும் நேரம் t_1 எனின்,

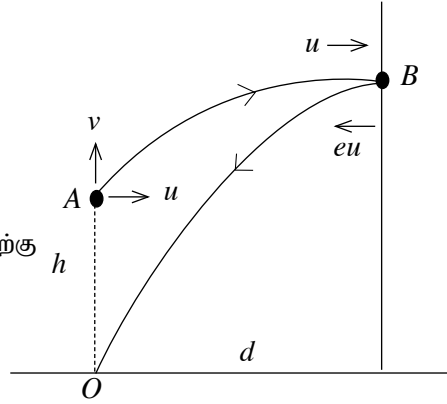
$\uparrow v = u + at$ என இடும்போது,

$$0 = v - gt_1$$

$$\Rightarrow t_1 = v/g$$

A யிலிருந்து B வரைக்குமான கிடை இயக்கத்திற்கு

$$\longrightarrow d = u \cdot t_1 = \frac{uv}{g} \text{ ——— (1)} \quad (5)$$



பந்து சுவரில் செங்குத்தாகப் படும் வேகம்

$$\longrightarrow u \text{ ஆகையால், நிலத்தில் படும் வேகம் } \longleftarrow eu \quad (5)$$

பந்து B யிலிருந்து O வரைக்கும் செல்வதற்கு எடுக்கும் நேரம் t_2 எனின்,

$$d = eut_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{d}{eu} = \frac{v}{ge}$$

$$\therefore t_1 + t_2 = \frac{v}{g} + \frac{v}{ge} = \frac{v}{g} (1+e) \quad (5)$$

A யிலிருந்து B யினுடாக O வரைக்குமான இயக்கத்திற்குப் பந்திற்கு

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2} at^2 \text{ என இடும்போது, } -h = v(t_1 + t_2) - \frac{1}{2} g(t_1 + t_2)^2 \quad (5)$$

$$= \frac{v}{ge} (1+e) \left[v - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v}{ge} (1+e) \right]$$

$$= \frac{v}{ge} (1+e) \left[v - \frac{v}{2e} (1+e) \right]$$

$$= \frac{v^2 (1+e) [2e - (1+e)]}{2ge^2}$$

$$= \frac{v^2 (e^2 - 1)}{2ge^2} \quad (5)$$

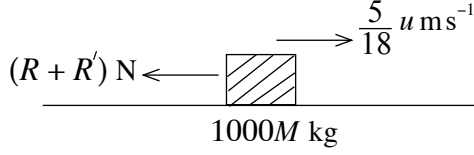
$$\Rightarrow 2ghe^2 = v^2 (1 - e^2) \quad [25]$$

$$4. \quad u \text{ km h}^{-1} = \frac{1000u \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{5}{18} u \text{ m s}^{-1} \quad (5)$$

$H = FV$ என இடும்போது

$$1000H = R \times \frac{5}{18} u \quad (5)$$

$$\therefore Ru = 3600 H$$



$W = \Delta T$ என இடும்போது

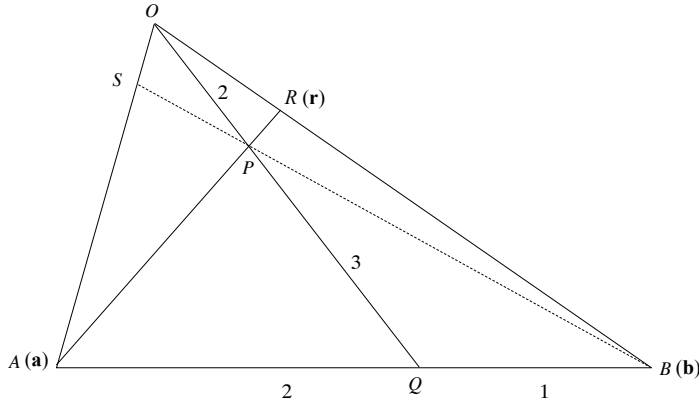
$$(R + R')1000d = \frac{1}{2} \times 1000M \times \left(\frac{5u}{18}\right)^2 - 0 \quad (10)$$

$$(R + R')d = \frac{25}{648} Mu^2$$

$$R'du = \frac{25}{648} Mu^3 - Rdu \quad (5)$$

$$= \frac{25}{648} Mu^3 - 3600Hd \quad [25]$$

5.



$$AQ = \frac{2}{3} AB = \frac{2}{3} (b - a) \quad (5)$$

$$OQ = OA + AQ = a + \frac{2}{3} (b - a) = \frac{1}{3} (a + 2b) \quad (5)$$

$$OP = \frac{2}{5} \cdot OQ = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} (a + 2b) = \frac{2}{15} (a + 2b)$$

$$AP = OP - a = \frac{2}{15} (a + 2b) - a = \frac{4b}{15} - \frac{13a}{15} \quad (5)$$

$$OA + kAP = a + \frac{k}{15} (4b - 13a) = \frac{4kb}{15} + \left(1 - \frac{13k}{15}\right)a$$

$$\text{இது } a \text{ யைச் சாராமல் இருப்பதற்கு } k = \frac{15}{13} \quad (5)$$

$$\text{அப்போது } OA + kAP = OR = \frac{4kb}{15} = \frac{4}{13} b \quad (5)$$

$$\therefore OR : OB = 4 : 13$$

[25]

6. கோல் AB மீது தாக்கும் விசைகள் $\downarrow w, \rightarrow R_1, \nearrow R_2$

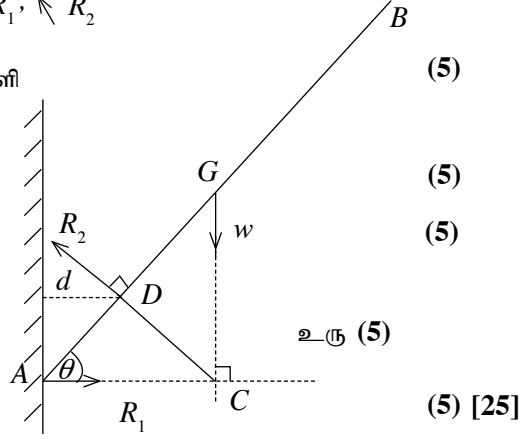
நாப்பத்திற்கு இம்முன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளி (C) யில் இருத்தல் வேண்டும்.

$$d = AD \cdot \cos \theta = AC \cos \theta \cdot \cos \theta$$

$$= AG \cos \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta$$

$$= a \cos^3 \theta$$

$$\therefore \cos^3 \theta = \frac{d}{a}$$



7. $P(X) \neq 0, P(Y) \neq 0$ ஆகையால் $P(X) \cdot P(Y) \neq 0$ ——— (1) (5)

ஆனால் X, Y ஆகியன தம்முள் புறநீக்குகின்றமையால், $P(X \cap Y) = 0$ ——— (2) (5)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $P(X \cap Y) \neq P(X) \cdot P(Y)$

$\therefore X, Y$ ஆகியன சாராதனவல்ல. (5)

- (i) $P(A) = \frac{1}{2}, P(A \setminus B) = \frac{1}{4}$ ஆகையால் $P(A) \neq P(A \setminus B)$.

$\therefore A, B$ ஆகியன சாராதனவல்ல. (5)

- (ii) $P(A \setminus B) = \frac{1}{4}, P(B \setminus A) = \frac{1}{3}$ ஆகையால் $P(A \cap B) \neq 0$ (5)

$\therefore A, B$ ஆகியன தம்முள் புறநீக்குவனவல்ல. [25]

8. $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P[(A \cap B') \cup (B \cap A')] = \frac{1}{3}$ (5)

- (i) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (5)

$$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{24}$$
 (5)

- (ii) $P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$ (5)

$$= \frac{\frac{5}{24}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{6}$$
 (5)

[25]

9. 9 நோக்கல்கள் : 3, 5, 5, 6, 10, 13, 13, x , y

ஆகாரம் 5 ஆகையால் x, y ஆகியவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்று 5 ஆக வேண்டும். (5)

$$\text{இடை 8 ஆகையால், } \frac{3 + 5 + 5 + 6 + 10 + 13 + 13 + x + y}{9} = 8 \quad (5)$$

$$x + y = 17$$

$$x = 5 \text{ எனக் கொள்வோம். அப்போது } y = 12 \quad (5)$$

அப்போது 9 நோக்கல்கள் : 3, 5, 5, 5, 6, 10, 12, 13, 13,

$$\therefore \text{இடையம்} = 6 \quad (10)$$

[25]

10. ஒன்பது நோக்கல்கள் : $x_i ; i = 1, 2, \dots, 9$ எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } \sum_{i=1}^9 x_i = 25 \times 9 = 225 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^9 \frac{(x_i - 25)^2}{9} = 4^2 \quad (5)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^9 (x_i - 25)^2 = 16 \times 9 = 144$$

புதிய குடித்தொகையின் இடை μ எனின்,

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i + (15 + 20 + 40)}{9 + 3} = \frac{225 + 75}{12} = 25 \quad (5)$$

புதிய குடித்தொகையின் நியம விலகல் σ எனின்,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - 25)^2 + (15 - 25)^2 + (20 - 25)^2 + (40 - 25)^2}{12} \quad (5)$$

$$= \frac{144 + 100 + 25 + 225}{12}$$

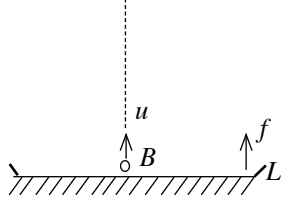
$$= \frac{494}{12}$$

$$\text{மாற்றற்றன்} = 41.17 \quad (5)$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{41.17} \quad [25]$$

பகுதி B

11. (a) $t = 0$ ஆகும்போது

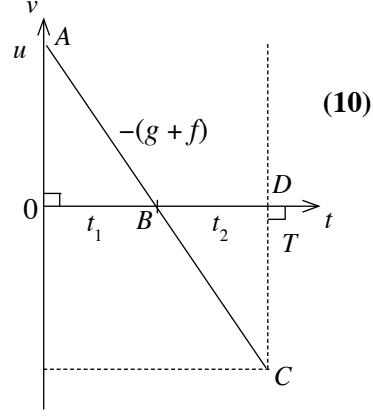


L - உயர்த்தி

B - பந்து

f - உயர்த்தியின் ஆர்முடுகல்

எனக் கொள்வோம்.



$$t = 0 \text{ ஆகும்போது } \mathbf{V}_{B,L} = \mathbf{V}_{B,E} + \mathbf{V}_{E,L} = \uparrow u + 0 = \uparrow u \quad (5)$$

$$\text{ஆர்முடுகல் } \mathbf{a}_{B,L} = \mathbf{a}_{B,E} + \mathbf{a}_{E,L} = \downarrow g + \downarrow f = \downarrow (g+f) \quad (10)$$

வேக-நேர வரைபில் $OB = t_1$ எனவும் $BD = t_2$ எனவும் $T = t_1 + t_2$ எனவும் கொள்வோம். (5)

பந்தின் இயக்கத்தைக் கருதும்போது முக்கோணி AOB யின் பரப்பளவு = முக்கோணி BDC

யின் பரப்பளவு ஆகையாலும் முக்கோணி AOB யும் முக்கோணி BDC யும் இயல்பொத்தன

$$\text{ஆகையாலும், } t_1 = t_2 = \frac{T}{2} \quad (10)$$

$$\text{பந்தின் ஆர்முடுகலைக் கருதும்போது } \frac{u}{t_1} = g+f \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= \frac{u}{t_1} - g \\ &= \frac{2u}{T} - g \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T} [2u - gT]; \quad 2u - gT > 0 \\ &u > \frac{1}{2} gT \end{aligned} \quad [55]$$

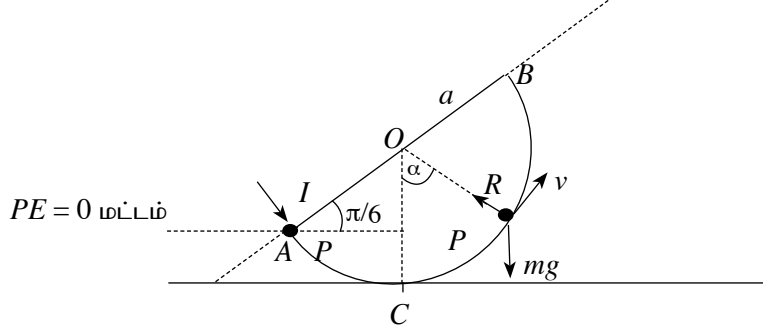
$$(b)(i) \quad \mathbf{V}_{B,E} = \mathbf{V}_{B,A} + \mathbf{V}_{A,E} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &\begin{array}{c} \nearrow u\sqrt{3} \\ 60^\circ \\ \downarrow u \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow u\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - u \\ \rightarrow u \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} = \begin{array}{c} \nearrow u \\ \theta \\ \rightarrow u \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \\ &\tan \theta = \frac{u}{2} \cdot \frac{2}{u \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\therefore \theta = \pi/6 \end{aligned} \quad (10)$$

$\therefore$ எதிரிக் கப்பலின் வேகம் வடக்கிலிருந்து 60° கிழக்கே u ஆகும்.

[25]

12.



- (i) A யில் துணிக்கைக்கு திசையில் $\mathbf{I} = \triangle(m\mathbf{v})$ இடும்போது

$$I = mu \Rightarrow u = \frac{I}{m} \quad (10) \quad [10]$$

- (ii) துணிக்கையின் தானச் சந்தர்ப்பங்கள் இரண்டையும் கருதிச் சக்திக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கும் போது

$$\frac{1}{2} mv^2 - mg(a \cos \alpha - a \sin \pi/6) = \frac{1}{2} mu^2 \quad (20)$$

$$\Rightarrow v^2 = u^2 + ga(2 \cos \alpha - 1) \Rightarrow v = \sqrt{u^2 + ga(2 \cos \alpha - 1)} \quad (10)$$

துணிக்கைக்கு PO திசையில் $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$R = mg \cos \alpha = m \cdot \frac{v^2}{a} \quad (10)$$

$$\Rightarrow R = mg \cos \alpha + \frac{m}{a} [u^2 + ga(2 \cos \alpha - 1)]$$

$$= \frac{m}{a} [u^2 + 3ga \cos \alpha - ga] \quad (10) \quad [50]$$

- (iii) இங்கு α இருக்கும் ஆயிடை $-\pi/3 \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ ஆக இருக்குமாறாகும். (5)

துணிக்கை B யை அடையும்போது $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

அப்போது $v^2 = u^2 + ga(-2 \times \frac{1}{2} - 1) = u^2 - 2ga$ (10) $\therefore u^2 \geq 2ga$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். (5)

$R = \frac{m}{a} [u^2 + 3ga(-\frac{1}{2}) - ga] = \frac{m}{a} (u^2 - \frac{5}{2}ga)$ (10) $\therefore u^2 \geq \frac{5}{2}ga$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். (5)

$\therefore$ துணிக்கை B யை அடைவதற்கு மேற்குறித்த இரு தேவைகளையும் பூர்த்தி செய்வதற்கு

$$u^2 \geq \frac{5}{2}ga \Rightarrow \frac{I^2}{m^2} \geq \frac{5}{2}ga \quad (10)$$

$$I^2 \geq \frac{m^2}{4} \times 10ga$$

$$I \geq \frac{m}{2} \sqrt{10ga} \quad [45]$$

- (iv) துணிக்கை B யில் பாத்திரத்திலிருந்து வெளியேறும் வேகம் w எனின்,

$$w^2 = u^2 - 2ga > 0 \quad (5)$$

துணிக்கை B யிலிருந்து A வரைக்கும் இயக்கத்திற்கு $\leftarrow s = ut$

ஐப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$2a \cos \frac{\pi}{6} = w \sin \frac{\pi}{6} \cdot t \quad (10)$$

$$2\sqrt{3} a = wt \quad \text{-----} \quad (1)$$

இயக்கத்திற்கு $\uparrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$-2a \sin \frac{\pi}{6} = w \cos \frac{\pi}{6} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (10)$$

$$(1) \text{ இலிருந்து, } -a = w \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} \frac{a}{w} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{4 \times 3a^2}{w^2}$$

$$-a = 3a - \frac{6g a^2}{w^2}$$

$$6ga^2 = 4aw^2 \quad (10)$$

$$3ga = 2 (u^2 - 2ga)$$

$$2u^2 = 7ga \quad (10)$$

$$\frac{I^2}{m^2} = \frac{7ga}{2}$$

$$I = m \sqrt{\frac{7ga}{2}} = \frac{m}{2} \sqrt{14ga}$$

[45]

13. இழை AB யின் இயற்கை நீளம் $3l$; மீள்தன்மை மட்டு $3mg$

நாப்பத் தானத்தில் $AB = l' (l' > 3l)$ எனக் கொள்வோம்.

- (i) துணிக்கையின் நாப்பத்தைக் கருதும்போது,

$$T = mg \quad (10)$$

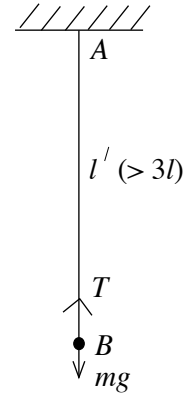
$$3mg \cdot \frac{(l' - 3l)}{3l} = mg \quad (10)$$

$$l' - 3l = l$$

$$l' = 4l$$

$$\therefore \text{நாப்பத் தானத்தில் } A \text{ யிலிருந்து உள்ள} \quad (10)$$

$$\text{நிலைக்குத்துத் தூரம்} = 4l$$



[30]

- (ii) வளையத்திற்குச் சக்திக் காப்பு விதியிலிருந்து

$$\frac{1}{2} m 0 + mg \cdot 4l = \frac{1}{2} mu^2 + 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow u^2 = 8gl \quad (5)$$

$$\Rightarrow u = 2\sqrt{2gl} \quad [15]$$

[புவியீர்ப்பின் கீழ் வளையத்தின் இயக்கத்தைக் கருதும்போதும் இப்பேறு கிடைக்கின்றது.]

(iii) வளையமும் துணிக்கையும் மோதுவதைக் கருதுவோம்.

$$\begin{array}{cc} \text{மோதுமுன்னர்} & \text{மோதிய பின்னர்} \\ m \circ \downarrow u & 2m \odot \downarrow u' \end{array}$$

$$m \bullet \downarrow u$$

$\downarrow$ உந்தக் காப்பு விதியைப் பிரயோகிக்கும்போது,

$$2mu' = mu + 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow u' = \frac{1}{2} u = \sqrt{2gl} \quad (5)$$

[15]

(iv) பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சேர்த்திப் பொருள் A யிலிருந்து நிலைக்குத்துத் தூரம் x கீழே இருக்கும் ஒரு சந்தர்ப்பத்தைக் கருதுவோம்.

$x > l'$ ஆகும். சேர்த்திப் பொருளுக்கு $\downarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது

$$2mg - T' = 2m\ddot{x} \quad (10)$$

$$2m\ddot{x} = 2mg - 3mg \frac{(x - 3l)}{3l}$$

$$\ddot{x} = g - \frac{g}{2l} (x - 3l)$$

$$= -\frac{g}{2l} (x - 5l)$$

$$\text{இது } \ddot{y} = -\omega^2 y \text{ வடிவத்தை எடுக்கின்றது. } \frac{g}{2l} > 0 \text{ ஆகையால்,} \quad (10)$$

$$\text{இங்கு } \omega^2 = \frac{g}{2l}, y = x - 5l$$

$$\therefore \text{ சேர்த்திப் பொருளின் இயக்கம் எளிய இசை இயக்கமாக இருக்கும் அதே வேளை} \quad (10)$$

$$\text{கோண வேகம் } \omega = \sqrt{\frac{g}{2l}} \text{ ஆகும்.} \quad (10)$$

$$\text{அலைவுக் காலம் } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{g}} \quad (10) \quad [50]$$

(v) சேர்த்திப் பொருளின் எளிய இசை இயக்கத்தில் அலைவு மையம் A யிலிருந்து $5l$ நிலைக்குத்துத் தூரத்தில் உள்ளது.

(10)

அதன் வீச்சம் a எனின்,

$$v^2 = \omega^2 (a^2 - y^2) \text{ ஐப் பிரயோகிக்கும்போது,}$$

$$v^2 = \frac{g}{2l} [a^2 - (x - 5l)^2] \text{ ஆகும்.} \quad (10)$$

$$x > l' = 4l \text{ ஆகும்போது } v = \sqrt{2gl} \text{ ஆகையால்,}$$

$$2gl = \frac{g}{2l} [a^2 - (4l - 5l)^2]$$

$$= \frac{g}{2l} [a^2 - l^2]$$

$$\therefore 4l^2 = a^2 - l^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{5} l \quad (10)$$

$$\therefore \text{ இயக்கத்திற்குத் தடை இல்லாதிருப்பதற்குச் சீலிங்கின் குறைந்தபட்ச உயரம் } 5l + a, \quad (10) \quad [40]$$

அதாவது $(5 + \sqrt{5}) l$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

14. (a) $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda \mathbf{a} = -\mu \mathbf{b}$

ஆனால், $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ஆகையால் $\lambda \mathbf{a} \nparallel -\mu \mathbf{b}$ ஆகும்.

$\therefore \lambda \mathbf{a}, -\mu \mathbf{b}$ ஆகியன வேறுவேறாகச் சூனியக் காவியாக இருப்பதன் மூலம் மாத்திரம்

$\lambda \mathbf{a} = -\mu \mathbf{b}$ ஆக இருக்கலாம்.

$\therefore \lambda \mathbf{a} = \mathbf{0}, -\mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ஆகும்.

(10)

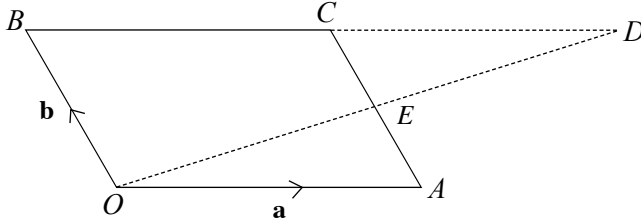
ஆனால் $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ஆகையால் $\lambda = 0, -\mu = 0$ ஆக இருந்தால் மாத்திரம்

$\therefore \lambda = 0, \mu = 0$ ஆகும்.

(10)

மறுதலையாக,

$\lambda = \mu = 0$ ஆகும்போது மாத்திரம் $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{0}$ ஆகும்.



$$BD = 3BC \Rightarrow \mathbf{BD} = 3\mathbf{BC} = 3\mathbf{a} \quad (\mathbf{BC} = \mathbf{OA} = \mathbf{a} \text{ ஆகையால்}) \quad (5)$$

$$\mathbf{OD} = \mathbf{OB} + \mathbf{BD} = \mathbf{b} + 3\mathbf{a} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (10)$$

$$\mathbf{OE} = \lambda \mathbf{OD} \Rightarrow \mathbf{OE} = \lambda \mathbf{OD} = \lambda(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad (5)$$

$$\text{ஆனால், } \mathbf{OE} = \mathbf{OA} + \mathbf{AE} = \mathbf{a} + \mu \mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \quad (\mathbf{AC} = \mathbf{OB} = \mathbf{b} \text{ ஆகையால்}) \quad (5)$$

$$\therefore \lambda(3\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$$

$$(3\lambda - 1)\mathbf{a} + (\lambda - \mu)\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ ஆகையால், $3\lambda - 1 = 0, \lambda - \mu = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \lambda = \mu = \frac{1}{3} \text{ ஆகும்.} \quad (10)$$

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}, \mathbf{b} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} \quad [40]$$

OACB ஒரு சாய்சதுரமாக இருப்பதற்கு $OA = OB$

$$\Rightarrow |\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| \quad (5)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \quad (5) \quad [10]$$

(b) $AB = 6a$
 $BC = 2\sqrt{3}a$

(i) நீட்டிய AD , QR ஆகிய கோடுகள் E யிற் சந்திக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $DE = \sqrt{3}a$
 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}a}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$
 $QR = \sqrt{3a^2 + 9a^2} = 2\sqrt{3}a$

$$\begin{aligned}
 E &= -30\sqrt{3} \times \sqrt{3}a - 5 \times 2\sqrt{3}a \sin \frac{\pi}{3} + 10 \times 2\sqrt{3}a \sin \frac{\pi}{3} + 15 \times 4\sqrt{3}a \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= -90a - 15a + 30a + 90a
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$= 15a$$

$$\neq 0 \tag{5}$$

∴ தொகுதி நாப்பத்தில் இருக்க முடியாது.

(ii) தொகுதி ஓர் இணையாக ஒருங்குமெனின்,

$$\longrightarrow X = 0, \uparrow Y = 0 \text{ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.} \quad (10)$$

$$\longrightarrow X = 0 \Rightarrow -30\sqrt{3} - 5 \cos \frac{\pi}{6} + 10 \cos \frac{\pi}{6} + 15 \cos \frac{\pi}{6} - \lambda \cos \frac{\pi}{6} = 0 \quad (5)$$

$$-30\sqrt{3} + 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \lambda \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3} - 60\sqrt{3}}{2} = \frac{-40\sqrt{3}}{2}$$

$$\lambda = -40$$

$$\uparrow Y = 0 \Rightarrow -\mu + 5 \sin \frac{\pi}{6} + 10 \sin \frac{\pi}{6} - 15 \sin \frac{\pi}{6} - \lambda \sin \frac{\pi}{6} = 0 \quad (5)$$

$$-\mu = \lambda \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\mu = -\lambda \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 40 \times \frac{1}{2}$$

$$= 20$$

(iii) தொகுதிய **AD** திசையில் ஒரு 10N விசையாக ஒடுங்குமெனின்,

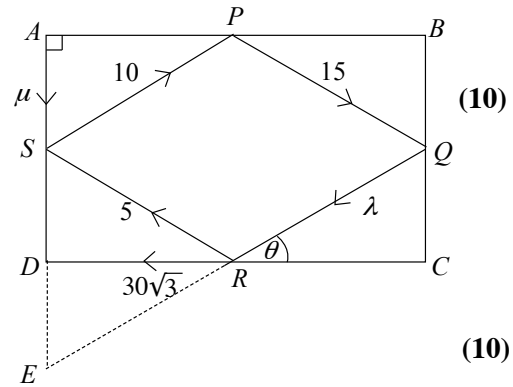
AD திசையில் கூறு = 10N , **AD** யிற்குச் செங்குத்தான கூறு = 0 ஆக இருத்தல் வேண்டும். (10)

$$\Rightarrow \mu + \lambda \sin \frac{\pi}{6} = 10, \quad \longrightarrow X = 0$$

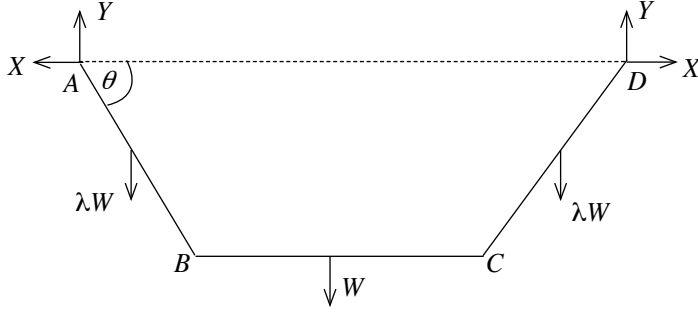
$$\Rightarrow \quad \mu = \lambda \sin \frac{\pi}{6} + 10 \quad (5), \quad \lambda = -40 \quad (5)$$

$$= 40 \times \frac{1}{2} + 10$$

$$= 30$$



15. (a)



(5)

தொகுதியின் சமச்சீரில் $\theta = \frac{\pi}{3}$

(5)

(i) தொகுதியின் நாப்பத்தைக் கருதும்போது

$$\uparrow 2Y = W + 2\lambda W$$

$$Y = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) W$$

(10)

கோல் AB யின் நாப்பத்திற்கு B பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது

$$\curvearrowleft_B \lambda W \cdot 2a \cos \frac{\pi}{3} - Y \cdot 4a \cos \frac{\pi}{3} + X \cdot 4a \sin \frac{\pi}{3} = 0$$

$$X \cdot 2\sqrt{3}a = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) W \cdot 2a - \lambda W a$$

$$X = \frac{1}{2\sqrt{3}} [\lambda W + W]$$

$$= \frac{W}{2\sqrt{3}} (\lambda + 1)$$

(10)

[30]

(ii) கோல் AB யின் நாப்பத்தை மாத்திரம் கருதும்போது, கோல் BC மீது B யில் மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறு X_1 எனவும் நிலைக்குத்துக் கூறு Y_1 எனவும்கொள்வோம். அப்போது

$$\rightarrow X_1 = X$$

$$= \frac{W}{2\sqrt{3}} (\lambda + 1)$$

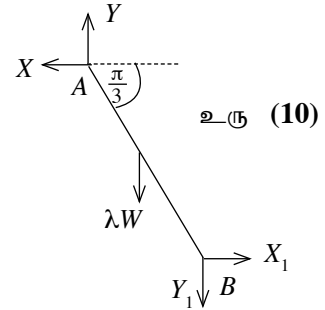
(5)

$$\uparrow Y_1 = W$$

$$Y_1 = \frac{1}{2} W$$

(5)

[20]



உரு (10)

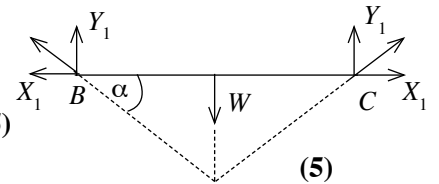
$$(iii) \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (5)$$

$$\text{மேலும் } \tan \alpha = \frac{Y_1}{X_1} = \frac{W}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{W(\lambda + 1)} = \frac{\sqrt{3}}{(\lambda + 1)} \quad (5)$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{(\lambda + 1)} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = 4$$

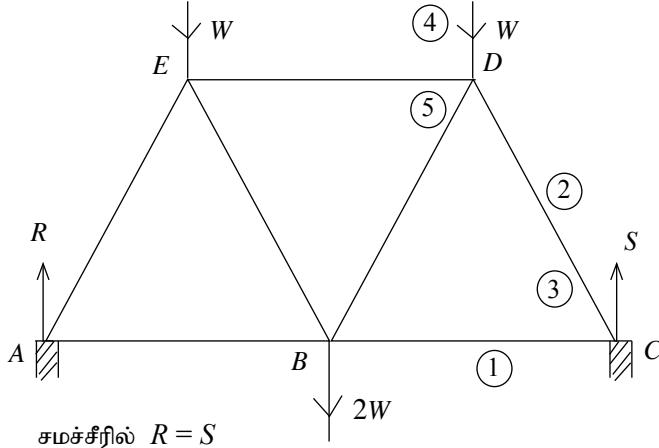
$$\lambda = 3 \quad (5)$$



(5)

[25]

(b)



(i)

சமச்சீரில் $R = S$

நாப்பத்திற்கு $\uparrow 2S = 4W \Rightarrow S = 2W$

குறிப்பு : A பற்றித் திருப்பங்களை எடுக்கும்போது S கிடைக்கும்.

(15)

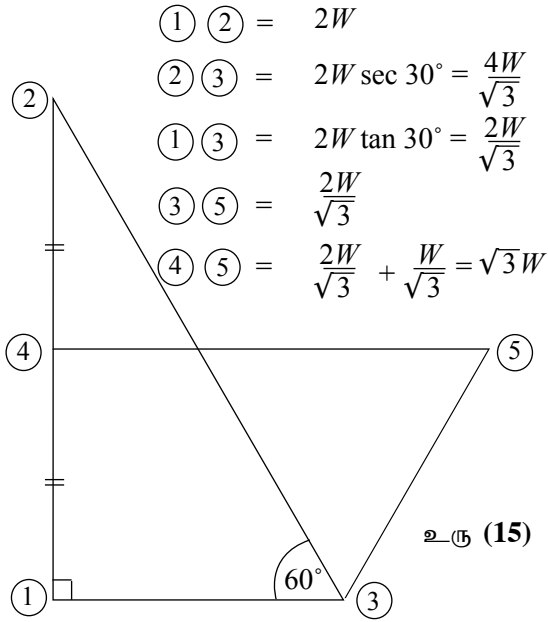
[15]

(ii)

தொகுதியின் சமச்சீரைக் கருதும்போது AB உம் CB, AE உம்

CD, BE உம் BD உம் என்னும் கோல் சோடிகளின் தகைப்புகள் சமமெனக் கிடைக்கும். (10)

போவின் குறிப்பீட்டிற்கேற்பத் தகைப்பு வரிப்படத்தை வரையும்போது



உரு (15)

கோல்	தகைப்பு	
	பருமன்	இயல்பு
AB, CB	$\frac{2W}{\sqrt{3}}$	இழுவை
AE, CD	$\frac{4W}{\sqrt{3}}$	உதைப்பு
BE, BD	$\frac{2W}{\sqrt{3}}$	இழுவை
DE	$\sqrt{3}W$	உதைப்பு

(5) + (5)

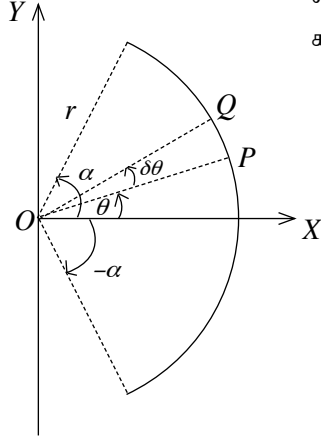
(5) + (5)

(5) + (5)

(5)

[60]

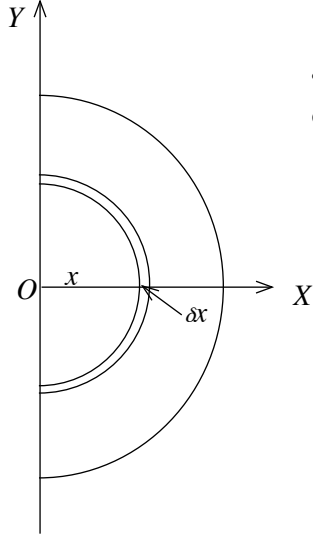
16. (a)



சமச்சீரிலிருந்து மெல்லிய கம்பியின் திணிவு மையம் $G = (\bar{x}, 0)$ எனக் கொள்வோம்.

கம்பியின் நேர்கோட்டு அடர்த்தி m எனின்,

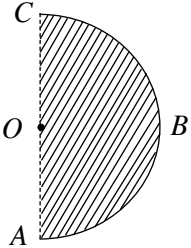
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} mr^2 \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} mr d\theta} \\ &= \frac{r [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} \\ &= \frac{r \cdot 2 \sin \alpha}{2\alpha} \\ &= \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \quad (30)\end{aligned}$$



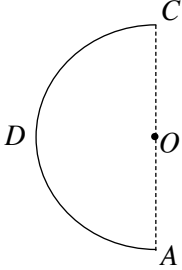
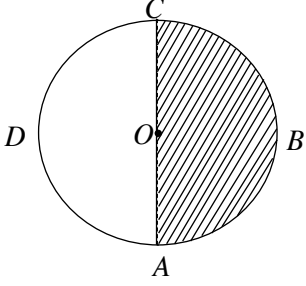
சமச்சீரிலிருந்து அடர்த்தி திணிவு மையம் $G' = (\bar{x}', 0)$ என எடுப்போம். அடர்த்தி பரப்படர்த்தி ρ எனின்,

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= \frac{\int_0^r \rho \pi x \frac{(x \sin \pi/2)}{\pi/2} dx}{\int_0^r \rho \pi x dx} \\ &= \frac{2 [x^3/3]_0^r}{\pi [x^2/2]_0^r} \\ &= \frac{4r}{3\pi} \quad (30)\end{aligned}$$

ABC, ADC ஆகியவற்றுடன் சேர்த்திப் பொருளின் திணிவு மையம் G சமச்சீரக்க மீது உள்ளது. $OG = \bar{x}$ எனக் கொள்வோம்.

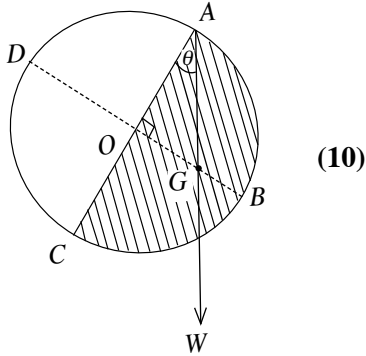
பொருள்	திணிவு	O விலிருந்து திணிவு மையத்திற்கு உள்ள தூரம்
	$\frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \sigma$	$\frac{4r}{3\pi}$

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \pi r^2 \sigma \cdot \frac{4r}{3\pi} - \pi r k \cdot \frac{2r}{k}}{\frac{\pi r}{2} (r\sigma + 2k)} \\ &= \frac{4r}{3\pi} \cdot \frac{|r\sigma - 3k|}{(r\sigma + 2k)} \quad (20)\end{aligned}$$

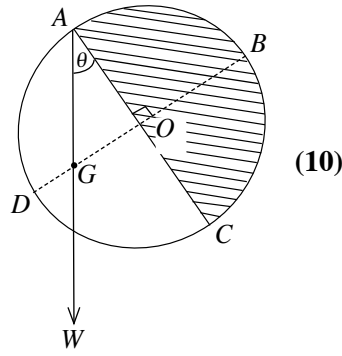
பொருள்	திணிவு	O விலிருந்து திணிவு மையத்திற்கு உள்ள தூரம்
	$\pi r \cdot k$	$-\frac{2r}{\pi}$
	$\frac{\pi r}{2} [r\sigma + 2k]$	$\bar{x}$

சேர்த்திப் பொருளைப் புள்ளி A யிலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடும்போது,

$r\sigma > 3k$ ஆக இருக்கும்போது



$r\sigma < 3k$ ஆக இருக்கும்போது



W ஆனது சேர்த்திப் பொருளின் நிறையாகும்.

நாப்பத்திற்கு AG நிலைக்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும்.

அப்போது $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{OG}{OA} \right)$

$$= \tan^{-1} \left[\frac{|r\sigma - 3k|}{3\pi (r\sigma + 2k)} \right] \quad (10)$$

A யிற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே O இருப்பின், அப்போது $\theta = 0$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.

(அதாவது $O \equiv G$ ஆக இருத்தல் வேண்டும்.)

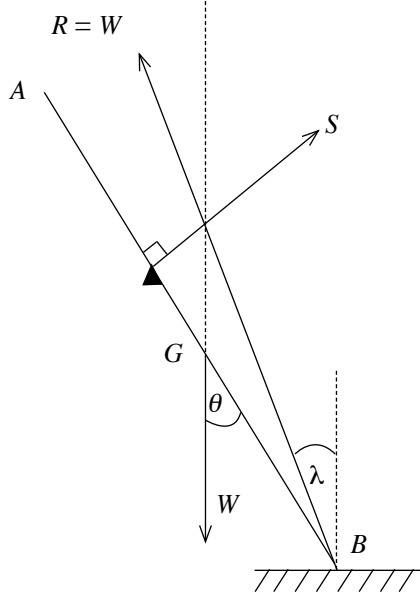
$$\Rightarrow r\sigma = 3k$$

$$\Rightarrow k : \sigma = r : 3$$

(10)

[120]

16. (b)



(10)

$$\frac{W}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta + \lambda)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{S}{\sin \lambda} \quad (10)$$

$$R = W \text{ ஆகையால், } \sin[\frac{\pi}{2} - (\theta - \lambda)] = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\cos(\theta - \lambda) = \cos \theta$$

$$\cos \theta \cos \lambda + \sin \theta \sin \lambda = \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \cos \lambda}{\sin \lambda}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}}{2 \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\lambda}{2}}$$

$$= \tan \frac{\lambda}{2}, \lambda \neq 0 \text{ ஆகையால், } \frac{\lambda}{2} \neq 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ஆகையால், } \theta = \frac{\lambda}{2} \quad (10)$$

[30]

17.(a)

A : மீன் சந்தைக்குச் செல்லல்

B : சதொச விற்பனை நிலையத்திற்குச் செல்லல்

C : பொதுச் சந்தைக்குச் செல்லல்

F : மிகவும் விருப்பமான மீன் வகையை வாங்கல்

$$P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{2}{5}, P(C) = \frac{1}{5}$$

$$P(F|A) = \frac{1}{5}, P(F|B) = \frac{1}{2}, P(F|C) = \frac{3}{5}$$

$$(i) P(F) = P(A) \cdot P(F|A) + P(B) \cdot P(F|B) + P(C) \cdot P(F|C) \quad (10)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{25} [2 + 5 + 3]$$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(10)

[20]

$$(ii) \quad P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(A/F') = \frac{P(A) \cdot P(F'/A)}{P(F')} = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{8}{15} \quad (10)$$

$$\text{அவ்வாறே, } P(B/F') = \frac{1}{3}$$

$$P(C/F') = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A/F') > P(B/F') = P(C/F')$$

மீன் சந்தைக்குச் செல்கின்றமையால் (10) [20]

(iii) X : குறைந்தபட்சம் இரு நாட்களிலேனும் மிகவும் விருப்பமான மீன் வகையை வாங்கல்

$$P(X) = P(\text{இரு நாட்களில் வாங்கல்}) + P(\text{மூன்று நாட்களில் வாங்கல்})$$

$$= {}^3C_2 [P(F)]^2 [1 - P(F)] + [P(F)]^3 \quad (10)$$

$$= 3 \times \frac{4}{25} \times \frac{3}{5} + \frac{8}{125}$$

$$= \frac{36 + 8}{125}$$

$$= \frac{44}{125} \quad (10) [20]$$

(iv) A_1 : முதல் ஆள் மீன் சந்தைக்குச் செல்லல்

A_2 : இரண்டாம் ஆள் மீன் சந்தைக்குச் செல்லல்

B_1 : முதல் ஆள் சதொச விற்பனை நிலையத்திற்குச் செல்லல்

B_2 : இரண்டாம் ஆள் சதொச விற்பனை நிலையத்திற்குச் செல்லல்

C_1 : முதல் ஆள் பொதுச் சந்தைக்குச் செல்லல்

C_2 : இரண்டாம் ஆள் பொதுச் சந்தைக்குச் செல்லல் எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{5}, P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{5}, P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{5}$$

Y : அவர்கள் இருவரும் ஒரே இடத்திற்குச் செல்வதாகக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது } P(Y) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap C_2) \quad (10)$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25}$$

$$= \frac{9}{25} \quad (10) [20]$$

(b) x_i ; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ தரவுக் கூட்டத்திற்கு

$$\text{இடை } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (10)$$

$$\text{நியம விலகல் } s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

$$u_i = a + bx_i; a, b > 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (a + bx_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a + b \sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{na}{n} + b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ &= a + b\bar{x} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} s_u^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - a - b\bar{x})^2 = \frac{b^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= b^2 s_x^2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_i; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \bar{x} = 35, s_x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i; i = 1, 2, 3, \dots, n \\ \bar{y} = 19, s_y = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i &= 70 + 3x_i \\ \bar{u} &= 70 + 3\bar{x} \\ &= 70 + 3 \times 35 \\ &= 175 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} s_u^2 &= 3^2 s_x^2 \\ &= 9 \times 16 \\ s_u &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_i &= a + by_i \\ \bar{u} &= a + b\bar{y} \Rightarrow 175 = a + 19b \Rightarrow a + 19b = 175 \quad \text{—————} (1) \end{aligned}$$

$$s_u^2 = b^2 s_y^2 \Rightarrow 144 = b^2 \cdot \frac{12^2}{5^2} \Rightarrow b^2 = 25 \quad \text{—————} (2)$$

$$(1), (2) \text{ இன் } b = 5 \quad (5)$$

$$a = 80 \quad (5)$$

$$x_i = 55 \text{ ஐ ஒத்த, } u_i \text{ உருமாற்றத்தில் பெறுமானம் } = 70 + 3 \times 55 = 235$$

$$y_i = 32 \text{ ஐ ஒத்த, } u_i \text{ உருமாற்றத்தில் பெறுமானம் } = 80 + 5 \times 32 = 240$$

$\therefore y_i$ உருமாற்றத்தில் 32 இற்கு x_i உருமாற்றத்தில் 55 இற்கு உள்ள பெறுமானத்திலும்

கூடிய ஒரு பெறுமானம் u_i உருமாற்றத்தில் உண்டு

(10) [70]