க.பொ.த. (உ.த.) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2015

இணைந்த கணிதம் I | **மூன்று மணித்தியாலம்**

பகுதி A

எல்லா வினாக்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ள வெற்றிடங்களில் விடை எழுதுக.

1. கணிதத் தொகுத்தறிமுறைக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி எல்லா n நேர் நிறையெண்களுக்கும் $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{pmatrix}$ என நிறுவுக.

....

2. ஈருறுப்பு விரி பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4 + \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4$ ஐச் சுருக்குக.
இதிலிருந்து, $n < \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4 < n+1$ ஆக இருக்குமாறு நிறையெண் n ஐக் காண்க.

....

The National e-learning Portal for The General Education

3. $(3-2i)(7-5i)$ என்பதை வடிவம் $x+iy$ யில் எடுத்துரைக்க; இங்கு $x, y \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$ ஆகும்.
இதிலிருந்து, $11+29i$ இன் இரு காரணிகளை உய்த்தறிந்து, 11^2+29^2 ஐ இரு நேர் நிறையெண்களின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(2x-\pi)\cos x}{2\cos^2 x - \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 \sin x} = -2$ எனக் காட்டுக.

The National e-learning Portal for The General Education

5. $\dfrac{d}{dx}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$ ஐக் கண்டு, இதிலிருந்து, $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,dx$ ஐப் பெறுக; இங்கு $a \in \mathbb{R}$.

6. ஒரு வளையி $x = t(1-t)^2,\ y = t^2(1-t)$ என்னும் சமன்பாடுகளினால் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு t ஒரு மெய்ப் பரமானமாகும். இவ்வளையிக்கு $T \neq 1, \frac{1}{3}$ ஆன புள்ளி $[T(1-T)^2,\ T^2(1-T)]$ இல் வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் படித்திறன் $\dfrac{T(2-3T)}{(1-T)(1-3T)}$ எனக் கொண்டு $t = \dfrac{1}{2}$ ஆகவுள்ள புள்ளியில் இவ்வளையிக்கு வரையப்பட்டுள்ள தொடலியின் சமன்பாடு $4x + 4y - 1 = 0$ எனக் காட்டுக. இதிலிருந்து, இவ்வளையி முற்றாக மேற்குறித்த தொடலியின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

The National e-Learning Portal for The General Education

7. ஒரு முக்கோணி ABC யில் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $3x + 4y + 5 = 0$, $3x - 4y + 1 = 0$, $5y - 2 = 0$ ஆகும். $A\hat{B}C$ யின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டு, உட்கோண இருகூறாக்கியையும் வெளிக்கோண இருகூறாக்கியையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

8. a, b, c ஆகியன மாறிலிகளான சமன்பாடு $ax^2 + 2y^2 + bxy + x + 4y + 2c = 0$ இன் மூலம் ஒரு வட்டத்தை வகைகுறிப்பதற்கு a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, $c < \frac{17}{16}$ ஆக இருக்கவேண்டுமெனக் காட்டுக. c யின் நேர் நிறையெண் பெறுமானத்திற்கு மேற்குறித்த வட்டமானது வட்டம் $(x + p)^2 + y^2 = p^2$ இனால் இருகூறிடப்படுமெனின், மாறிலி p யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

The National e-learning Portal for The General Education

9. $S_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0,\ S_2 : x^2 + y^2 - r^2 = 0$ என்னும் இரு வட்டங்கள் ஒன்றோடொன்று தொடுகையுறுதற்கு r ஐக் காண்க.
இவ்விரு வட்டங்களும் உட்புறமாகத் தொடுகையுறும்போது தொடுகைப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைப் பெறுக.

The National e-learning Portal for The General Education

10. ஒரு முக்கோணி ABC யில் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $4\,\text{m}, 5\,\text{m}, 6\,\text{m}$ ஆகும்.
$\cos C = \dfrac{3}{4}$ எனவும் $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{3}{2}$ எனவும் காட்டி, இதிலிருந்து, $\hat{B} = 2\hat{C}$ என உய்த்தறிக.

பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) b, c ஆகியன மெய்யெண்களாக உள்ள இருபடிச் சமன்பாடு $x^2+bx+c=0$ இன் மூலங்கள், α, β எனக் கொள்வோம். $p=\alpha+\beta^2$, $q=\beta+\alpha^2$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.
α, β ஆகியன மெய்யல்லாதனவாக இருக்கும்போது $b=-1$ ஆக இருந்தால் - இருந்தால் மாத்திம் p, q ஆகியன மெய்யெனவும் இச்சந்தர்ப்பத்தில் $p=q=1-c$ எனவும் காட்டுக.

(b) எல்லா மெய் x இற்கும் $0 \le \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \le 4$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ இன் பருமட்படிப் படத்தை வரைக.

(c) கோவை x^2+kx+1 ஆனது x^4-12x^2+8x+3 இன் ஒரு காரணியாக இருப்பதற்கு k யிற்கு இருக்கத்தக்க பெறுமானத்தைக் கண்டு, இதிலிருந்து, சமன்பாடு $x^4-12x^2+8x+3=0$ ஐத் தீர்க்க.

12. (a) ஒரு பிள்ளைக்குக் குறைந்தபட்சம் ரூ. 3 ஆவது கிடைக்குமாறு ரூ.18 ஐ ஐந்து பிள்ளைகளுக்கு ரூபாயின் நிறையெண் மடங்காக வழங்கத்தக்க விதங்களின் எண்ணிக்கை 35 எனக் காட்டுக.

(b) ஒரே உருவில் $y=|x-a|$, $y=b|x-1|$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளின் பருமட்படிப் படங்களை வரைக; இங்கு $a>b>0$ உம் $b\neq 1$ உம் ஆகும்.
இதிலிருந்து, சமனிலி $b|x-1|>|x-a|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் x இன் மெய்ப் பெறுமானத் தொடை $\{x:3<x<7\}$ எனின், a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(c) $r\in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r=\dfrac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ எனக் கொள்வோம்.

$r\in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $u_r=\lambda\big(f(r)-f(r+1)\big)+\mu\big(f(r+1)-f(r+2)\big)$ ஆக இருக்குமாறு $f(r)$ ஐயும் λ, μ ஆகிய மாறிலிகளையும் காண்க.

$n\in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}u_r=\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ ஒருங்குகின்றதென மேலும் காட்டி, $\dfrac{1}{6}\le\dfrac{5}{6}-\dfrac{3n+5}{(n+2)(n+3)}<\dfrac{5}{6}$ எனவும் உய்த்தறிக.

The National e-learning Portal for the General Education

13. (a) $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம். $\det(\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I})=0$ ஆக இருக்குமாறு λ இற்கு இரு வேறுவேறான மெய்ப் பெறுமானங்களைக் காண்க; இங்கு $\mathbf{I}$ ஆனது வரிசை 2×2 இலான அலகுத் தாயமாகும். λ வின் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் $\mathbf{PX}=\lambda\mathbf{X}$ ஐத் திருப்தியாக்கும் $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ நிரல் தாயத்தைக் காண்க.

(b) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் ஒரு நாற்பக்கல் $A_1A_2A_3A_4$ இன் உச்சிகள் முறையே z_1, z_2, z_3, z_4 என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன.

சிக்கலெண் $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$ இன் மட்டையும் வீச்சத்தையும் கேத்திரகணித முறையாக விளக்குக.

எண் $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_4}$ வெறுமனே மெய்யல்லாததாக இருப்பதற்குரிய கேத்திரகணிதத் தேவையைக் காண்க.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க

$z^2-2z+2=0$, $z^2-2az+b=0$ என்னும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் முறையே A, B, C , D என்னும் வேறுவேறான புள்ளிகளினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றன; இங்கு $a, b \in R$ உம் $a^2 < b$ உம் ஆகும்.

(i) $C\hat{O}D = \dfrac{\pi}{2}$ எனின், $2a^2 = b$ எனவும்

(ii) O விலிருந்து சம தூரத்தில் A, B, C, D ஆகிய புள்ளிகள் இருப்பின் $b = 2$ எனவும்

(iii) மையம் O ஆகவுள்ள ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் புள்ளிகள் A, B, C, D எனின், $a = -1, b = 2$ எனவும் காட்டுக; இங்கு O என்பது உற்பத்தியாகும்.

(c) மாறும் சிக்கலெண் z ஆனது ஆகண் வரிப்படத்தில் புள்ளி P யினால் வகைகுறிக்கப்படுகின்றது. $\arg[(z+i)i] = \dfrac{2\pi}{3}$ எனின், புள்ளி Pயின் பாதையைக் காண்க.
$|z|$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தையும் $|z|$ இன் குறைந்தபட்சப் பெறுமானத்தை ஒத்த புள்ளியினால் வகைகுறிக்கப்படும் சிக்கலெண்ணையும் காண்க.

14. (a) $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $x \in R$ ஆகும். முதற் பெறுதி பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி சார்பு f இற்கு இரு திரும்பற் புள்ளிகள் இருக்கின்றனவெனக் காட்டி, $y = f(x)$ இன் பரும்படி வரைபை வரைக.
அவ்வரைபைப் பயன்படுத்தி $y = |f|(x)$ இன் பரும்படி வரைபை ஒரு வேறு xy - தளத்தில் வரைக.
இதிலிருந்து, சமன்பாடு $|3-4x|e^x - x^2 - 1 = 0$ இற்குக் குறைந்தபட்சம் மூன்று மெய்ம் மூலங்களேனும் உண்டெனக் காட்டுக.

(b) ஒரு முக்கோணி ABC யில் $AB = AC$ ஆகும். அதன் சுற்றளவு $2s$ ஆகும்; இங்கு s ஒரு மாறிலி. இம்முக்கோணியை BC யைப் பற்றிச் சுற்றும்போது பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு உயர்ந்தபட்சமாகும் AB யின் நீளத்தை s இன் சார்பிற் காண்க.

15. (a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}$ எனக் கொள்வோம். $f(x) = A + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$ ஆக இருக்குமாறு A, B, C ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.
இதிலிருந்து, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

(c) (i) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ எனக் கொள்வோம். $x = \sin\theta$ வைப் பிரதியிடும்போது

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$ எனக் காட்டுக.

மேலும் ஓர் உகந்த பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ எனக் காட்டி, அதிலிருந்து, $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{4}$ எனவும் காட்டுக.

(ii) $\{(x, y) \colon x^2 \le y \le |x|\}$ இன் மூலம் உள்ளடைக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

The National e-learning Portal for The General Education

16. (a) ஒரு முக்கோணி ABC யின் AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-2y+2=0, x-y-1=0, 2x-y-1=0$ ஆகும். BC யிற்குச் செங்குத்தாக A யினூடாகச் செல்லும் கோடும் AC யிற்குச் சமாந்தரமாக B யினூடாகச் செல்லும் கோடும் D யிற் சந்திக்கின்றன. AD , BD ஆகிய கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
$ABDC$ ஒரு சாய்சதுரமெனக் காட்டுக.

(b) மையம் C_1 ஐயும் ஆரை r_1 ஐயும் கொண்ட வட்டமும் மையம் C_2 ஐயும் ஆரை r_2 ஐயும் கொண்ட வட்டமும் ஒன்றையொன்று இடைவெட்டுவதற்கான தேவையை எடுத்துரைக்க.
$S_1: x^2+y^2+6x+2fy=0$, $S_2: x^2+y^2-2y-3=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் நிமிர்கோண முறையாக இடைவெட்டுகின்றன. $f=\dfrac{3}{2}$ எனக் காட்டுக.

$S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் யாதாயினும் ஒரு வட்டம் $S_1+\lambda S_2=0$ இன் மூலம் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு λ ஒரு பரமானம் ஆகும்.

(i) $S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகவும் புள்ளி $(-2, 2)$ இனூடாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

(ii) $S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் வெட்டுப் புள்ளியினூடாகச் செல்லும் மிகச் சிறிய வட்டத்தின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

17. (a) ஒரு முக்கோணி ABC யில் $\cos A+\cos B+\cos C=\dfrac{3}{2}$ ஆகும். $\cos\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{\left[1-2\sin\frac{A}{2}\right]^2}{4\sin\frac{A}{2}}+1$ எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து, முக்கோணி ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி என்பதை உய்த்தறிக.

(b) $f(\theta)=3\cos^2\theta+10\sin\theta\cos\theta+27\sin^2\theta$ வை வடிவம் $a+b\cos(2\theta+\alpha)$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு a, b ஆகியன மாறிலிகளாக இருக்கும் அதே வேளை α ஆனது θ வைச் சாராத ஒரு கூர்ங்கோணமாகும்.
ஆயிடை $[0, \pi]$ இல் $y=f(\theta)$ இன் வரைபின் பரும்படிப் படத்தை வரைக.
சமன்பாடு $f(\theta)-k=0$ இற்கு

(i) ஒரு தீர்வு மாத்திரம் இருப்பது

(ii) இரு தீர்வுகள் இருப்பது

(iii) மூன்று தீர்வுகள் இருப்பது

(iv) தீர்வுகள் இல்லாதிருப்பது

k எந்த ஆயிடையில் இருக்கும்போதென வரைபைப் பயன்படுத்தித் துணிக.

(c) சமன்பாடு $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$ ஐத் தீர்க்க.

***

The National e-learning Portal for The General Education

க.பொ.த. (உ.தரம்) உதவிக் கருத்தரங்கு - 2015

இணைந்த கணிதம் II | மூன்று மணித்தியாலம்

* இவ்வினாத்தாளில் g இனால் புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகல் காட்டப்படுகின்றது.

பகுதி A

எல்லா வினாக்களுக்கும் தரப்பட்டுள்ள வெற்றிடங்களில் விடை எழுதுக.

1. ஒரு சீரான வேகத்துடன் செல்லும் ஒரு படகு ஒரு குறித்த கணத்தில் ஒரு குறித்த வேகத்தில் செல்லும் ஒரு கப்பலுக்கு $24\,\text{km}$ கிழக்கேயும் அதற்குச் செப்பமாக இரண்டு மணித்தியாலங்களுக்குப் பின்னர் அக்கப்பலுக்கு $7\,\text{km}$ தெற்கேயும் உள்ளது.

   (i) கப்பல் தொடர்பாகப் படகின் வேகத்தைக் கண்டு, கப்பலுக்கும் படகிற்குமிடையே உள்ள குறுகிய தூரத்தைக் கணிக்க.

   (ii) கப்பல் $13\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ வேகத்துடன் வடக்கிலிருந்து கிழக்கிற்கு $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$ கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையில் செல்லுமெனின், படகின் உண்மை வேகத்தைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ யில் $AB = 4a$, $BC = 3a$ ஆகும். திணிவு m வீதம் உள்ள நான்கு துணிக்கைகள் செவ்வகத்தின் உச்சிகளிலே ஓய்வில் வைக்கப்பட்டு AB, BC, CD, DA ஆகியன நான்கு இலேசான நீட்ட முடியாத இழைகளின் மூலம் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. எல்லா இழைகளும் ஈர்க்கப்பட்டுள்ளன. துணிக்கை A யிற்குத் திசை CA யில் ஒரு கணத்தாக்கு I வழங்கப்படும்போது ஒவ்வொரு துணிக்கையினதும் இயக்கம் ஆரம்பிக்கும் வேகத்தைக் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

The National e-learning Portal for The General Education

[பக். 2 ஐப் பார்க்க.

3. ஒரு கிடைப் பாதையில் $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ என்னும் உயர்ந்தபட்ச வேகத்துடன் சைக்கிளைச் செலுத்திக்கொண்டு செல்லத்தக்க ஒரு பிள்ளை அச்சைக்கிளைக் கிடையுடன் 30° சாய்வுள்ள ஒரு பாதையில் மேல்நோக்கி $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ என்னும் உயர்ந்தபட்ச வேகத்துடன் செலுத்தலாம். அவன் அச்சைக்கிளை அச்சாய்ந்த பாதையில் கீழ்நோக்கி $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ வேகத்துடன் செலுத்தும் கணத்தில் சைக்கிளின் ஆர்முடுகல் யாது?
சைக்கிளினதும் பிள்ளையினதும் மொத்தத் திணிவு $95\,\mathrm{kg}$ எனவும் பிள்ளை ஒரே வலுவுடன் சைக்கிளைச் செலுத்துகின்றது எனவும் இயக்கத்திற்கான தடை வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமம் எனவும் $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ எனவும் கருதுக.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. தானக் காவிகள் முறையே $-10\mathbf{i}+6\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ ஆன A , B என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து ஒரே தடவை இயக்கத்தை ஆரம்பிக்கும் P, Q என்னும் இரு துணிக்கைகள் முறையே $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{v}$ என்னும் மாறா வேகத்துடன் செல்கின்றன. வேகம் $\mathbf{v}$ ஆனது $-2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ யிற்குச் சமாந்தரமாகும். P உம் Q வும் ஒன்றோடொன்று மோதுமெனின், மோதுவதற்கு எடுக்கும் நேரத்தைக் கண்டு $|\mathbf{v}| = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ எனக் காட்டுக; இங்கு $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான அலகுக் காவிகளாகும்.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

The National e-learning Portal for The General Education

5. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $OA \perp OB$ எனின், $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{2}{5}|\mathbf{b}|^2 - \frac{3}{5}|\mathbf{a}|^2$ எனக் காட்டுக.
$|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 1$ எனின் $\mathbf{a}$ யிற்கும் $\mathbf{b}$ யிற்குமிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

6. ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமல்லாத மூன்று ஒருதள விசைகளை மாத்திரம் கொண்ட ஒரு விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதற்கான கட்டாயத் தேவையை எடுத்துரைக்க.
ஒரு கரடான கிடைத் தளத்தின் மீது அச்சு கிடையாக வைக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு சீரான உருளையின் வளைபரப்புடன் தொடுகையில் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாகச் செல்லும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒரு பாரமான கோல், அதன் ஒரு முனை கிடைத் தளத்துடன் தொடுகையுறுமாறு, நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. கோலுக்கும் உருளைக்குமிடையே உள்ள தொடுகை கரடானது. கோல் கிடையுடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்தும் கோலுக்கும் உருளைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் கோணம் λ ஆகவும் இருப்பின், $\lambda \geq \frac{\theta}{2}$ எனக் காட்டுக.

The National e-learning Portal for The General Education

7. A, B, C என்ற மூன்று பிள்ளைகள் சாராமல் சரியாக ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ஆகும். இவர்களில் இருவர் மாத்திரம் சாராமல் பிரசினத்தைச் சரியாகத் தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

8. ஒரு குறித்த வகைப் பூவின் ஒரு வித்திலிருந்து ரோசா நிறப் பூவுள்ள ஒரு கன்று உண்டாவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும். குறைந்தபட்சம் ரோசா நிறப் பூவுள்ள ஒரு கன்றேனும் உண்டாவதற்கான நிகழ்தகவு 0.98 இலும் பார்க்கக் கூடுதலாக இருப்பதற்கு விதைக்க வேண்டிய வித்துகளின் குறைந்தபட்ச எண்ணிக்கையைக் காண்க. ($\frac{\ln(0.02)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 21.46$ எனக் கொள்க.)

The National e-learning Portal for The General Education

[பக். 5 ஐப் பார்க்க.

9. 2004, 2008, 2000, 2008, 1996, 1992, 2000, 2008, 2008 , 2000 என்னும் நோக்கல்களில் ஒன்று $2000 - 4x$ இல் எடுத்துரைக்கப்படும்போது கிடைக்கும் x இன் பெறுமானங்களின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க. அதிலிருந்து, தரப்பட்டுள்ள நோக்கல்களின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

The National e-learning Portal for The General Education

10. 20 மாணவர்கள் இணைந்த கணித வினாத்தாளிற்குப் பெற்றுக்கொண்ட புள்ளிகளின் இடை 40 ஆகும். மாணவர்கள் பெற்றுக்கொண்ட குறைந்த ஆறு புள்ளிகளின் இடை 25 ஆகும். மாணவர்கள் பெற்றுக் கொண்ட உயர்ந்த ஆறு புள்ளிகள் 70, 71, 72, 74, 75, 78 ஆகும்.

(i) எஞ்சிய எட்டு மாணவர்களினதும் புள்ளிகளின் இடையையும்

(ii) எல்லாப் புள்ளிகளினதும் மூன்றாம் காலணையையும்

காண்க.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[பக். 6 ஐப் பார்க்க.

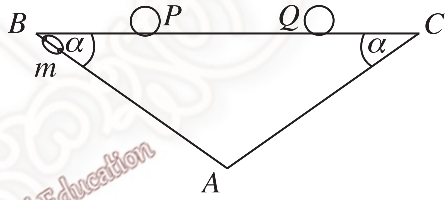
பகுதி B

ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) நேரம் $t=0$ ஆக இருக்கும்போது ஓர் உயர்த்தி *(Elevator)* ஓய்விலிருந்து இயக்கத்தை ஆரம்பித்து நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிச் சீரான ஆர்முடுகல் a உடன் இயங்குகின்றது. உயர்த்தியில் உள்ள மனிதன் ஒருவன் நேரம் $t=t_0$ ஆக இருக்கும்போது ஒரு துணிக்கை P புவியீர்ப்பின் கீழ் மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. துணிக்கை P அதன் உயர்ந்தபட்ச உயரத்தை அடையும் கணத்தில் ஓர் இரண்டாம் துணிக்கை Q புவியீர்ப்பின் கீழ் விடுவிக்கப்படுகின்றது. உயர்த்தியினதும் P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளினதும் இயக்கங்களுக்கு வேக-நேர வரைபுகளைப் பரும்படியாக ஓர் உருவில் வரைக. இதிலிருந்து, Q ஆனது கணநிலை ஓய்வை அடையும்போது Pயின் வேகம் $at_0\left(\dfrac{a}{g}+1\right)$ எனக் காட்டுக.

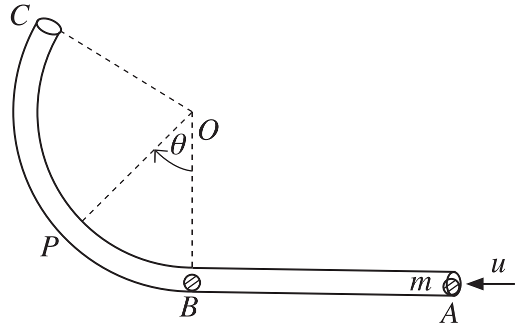
(b) A , B என்பன O இல் சந்திக்கும் இரு நேர்ப் பாதைகள் மீது இருக்கும் இரு புள்ளிகள் ஆகும். $A\hat{O}B=\alpha$ ஆக இருக்கும் அதே வேளை $OA=a\,\text{km}$, $OB=b\,\text{km}$ ஆகும். X , Y என்னும் O வை நோக்கிச் செல்லும் இரு மோட்டர் வாகனங்கள் முறையே A, B என்னும் இரு புள்ளிகளை $20\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, $40\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ என்னும் கதிகளுடனும் $5\,\text{km}\,\text{h}^{-2}$, $10\,\text{km}\,\text{h}^{-2}$ என்னும் ஆர்முடுகல்களுடனும் கடக்கின்றன. வேக முக்கோணிகளையும் ஆர்முடுகல் முக்கோணிகளையும் கருதிக் கொண்டு X தொடர்பாக Y இன் பாதை ஒரு நேர்கோடெனக் காட்டுக.
$a=b=10, \alpha=60^\circ$ எனின், X இற்கும் Y யிற்குமிடையே உள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் $5\,\text{km}$ எனவும் காட்டுக.

(c) உருவில் உள்ளவாறு திணிவு M ஐ உடைய ABC என்னும் ஒரு சீரான இருசமபக்க முக்கோணச் சட்டத்தின் பக்கம் BC ஒரே கிடை மட்டத்தில் இருக்கும் P, Q என்னும் இரு நிலைத்த ஒப்பமான வளையங்கள் வழியே சுயாதீனமாக வழுக்கத்தக்கதாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$ ஆகும். திணிவு m ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான பவளம் BA வழியே சுயாதீனமாக வழுக்கிச் செல்லத்தக்கவாறு B யிலே ஓய்வில் வைக்கப்பட்டு, தொகுதி மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. அதன் பின்னர் நடைபெறும் இயக்கத்தில் சட்டத்தின் ஆர்முடுகலின் பருமன் $\dfrac{mg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}$ எனக் காட்டி, பவளத்தின் மீது உள்ள தாக்கம் $\dfrac{Mmg\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ எனவும் காட்டுக.



The National e-learning Portal for the General Education

12. குறுக்கு வெட்டு சமமான ஓர் ஒப்பமான நேர்க் குழாய் AB யும் ஆரை a யை உடைய ஒரு வட்டக் குழாயினால் மையத்தில் எதிரமைக்கப்படும் கோணம் $\dfrac{2\pi}{3}$ ஆன ஒரு பகுதி BC யும் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு AB ஒரு கிடைத் தளத்தில் இருக்குமாறு ஒன்றோடொன்று இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இச்சேர்த்திக் குழாய் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நிலையாகப் பொருத்தப்பட்டு, குழாயிலே புள்ளி A யில் திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையையும் புள்ளி B யில் திணிவு $2m$ ஐ உடைய ஒரு துணிக்கையையும் வைத்து திணிவு m ஐ உடைய துணிக்கைக்குக் குழாயினுள்ளே ஒரு கிடை வேகம் u கொடுக்கப்படுகின்றது. இரு துணிக்கைகளும் மோதி இணைகின்றன.



(i) மோதலுக்குப் பின்னர் திணிவு $3m$ ஐ உடைய சேர்த்தித் துணிக்கையின் வேகத்தைக் காண்க.

(ii) OP ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ இற் சாய்ந்திருக்கும் ஓர் அமைவு P யில் சேர்த்தித் துணிக்கையின் வேகத்தையும் சேர்த்தித் துணிக்கைக்கும் குழாய்க்குமிடையே உள்ள தாக்கத்தையும் காண்க.சேர்த்தித் துணிக்கை குழாயினூடாகச் சென்று அந்தம் C யில் வெளியேறுமெனின்,

(iii) $u>3\sqrt{3ag}$ எனக் காட்டுக.

(iv) $AB=\sqrt{3}\,a$ ஆகவும் அந்தம் C யில் வெளியேறும் திணிவு $3m$ ஆகவுள்ள சேர்த்தித் துணிக்கை A யில் படுவதாகவும் இருப்பின் அப்போது $u=\dfrac{3}{2}\sqrt{21ag}$ எனக் காட்டுக.

[பக். 7 ஐப் பார்க்க.

13. இயற்கை நீளம் a யையும் மீள்தன்மை மட்டு $2mg$ ஐயும் உடைய ஓர் இலேசான மீள்தன்மை இழையின் இரு நுனிகளுடனும் திணிவுகள் முறையே M, m ஆன A, B என்னும் இரு துணிக்கைகள் இணைக்கப்பட்ட இழைகள் இழுக்கப்பட்டிருக்குமாறு ஒரு கரடான கிடை மேசை மீது ஓய்வில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. மேசைக்கும் ஒவ்வொரு துணிக்கைக்குமிடையேயான உராய்வுக் குணகம் $\frac{1}{2}$ ஆகும். துணிக்கை B யிற்கு A யிலிருந்து அப்பால் மேசை வழியே ஒரு வேகம் $\sqrt{ga}$ யைக் கொடுக்கும்போது துணிக்கை A ஓய்வில் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு இழையின் நீட்சி x ஆக இருக்கும்போது துணிக்கை B யின் இயக்கம் சமன்பாடு $\ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x + \frac{a}{4}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.
இச்சமன்பாட்டிற்கு வடிவம் $x + \frac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ இல் உள்ள ஒரு தீர்வு இருக்கின்றதெனக் கொண்டு, α, β, ω ஆகியவற்றைக் காண்க.
இதிலிருந்து, இழையின் உயர்ந்தபட்ச நீட்சி $\frac{a}{2}$ எனக் காட்டுக.
அத்துடன் $M \geq 2m$ எனவும் காட்டுக.

துணிக்கை B யின் திரும்பிய இயக்கம் சமன்பாடு $\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\left(y - \frac{a}{4}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு y ஆனது இழையின் நீட்சியாகும்.

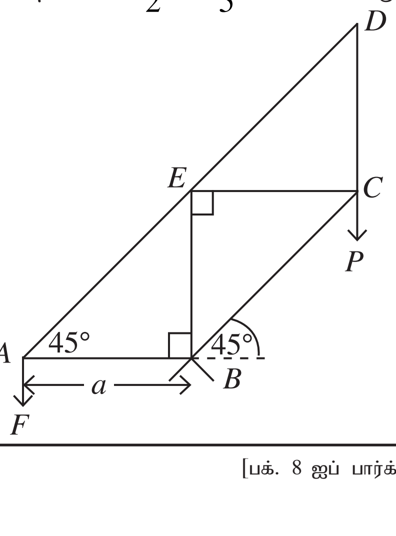
இச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = \frac{a}{4}\left[1 + \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}t\right]$ எனக் கொண்டு நேரம் $\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$ இற்குப் பின்னர் துணிக்கை B ஆனது தொடக்கப் புள்ளிக்கு வந்து மாறாமல் ஓய்வுக்கு வருகின்றதெனக் காட்டுக.

14. (a) புள்ளி O பற்றி A, B என்னும் இரு புள்ளிகளின் தானக் காவிகள் முறையே $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகும். $OE : EA = 3 : 4$ ஆக இருக்குமாறு OA மீது புள்ளி E யும் $OD : DB = 5 : 2$ ஆக இருக்குமாறு OB மீது புள்ளி D யும் உள்ளன. AD, BE ஆகிய கோடுகளின் வெட்டுப் புள்ளி G எனின் $\overrightarrow{OG} = \mathbf{b} + \lambda\left(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right)$ எனக் காட்டுக; இங்கு λ ஒரு மாறிலியாகும். $\overrightarrow{OG}$ இற்கு வேறோர் இத்தகைய கோவையைப் பெற்று, புள்ளி G யின் தானக் காவியை $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ஆகியவற்றின் சார்பிற் பெறுக.

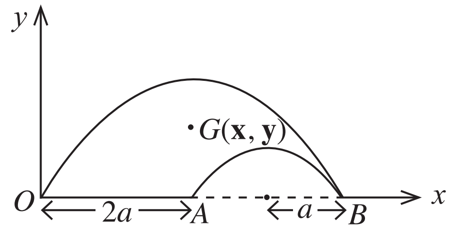
(b) செவ்வகம் $ABCD$ யில் $AB = 4a, BC = 3a$ ஆகும். AB, BC, CD, DA, AC, BD வழியே அதன் எழுத்து ஒழுங்குமுறையில் $3\mathbf{P}, 4\mathbf{P}, 2\mathbf{P}, \mathbf{P}, \lambda\mathbf{P}, \mu\mathbf{P}$ என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன.
இவ்விசைத் தொகுதி
(i) ஓர் இணைக்குச் சமவலுவாக இருக்கும்போது
(ii) B யினூடாக AC யிற்குச் சமாந்தரமான ஒரு விசைக்குச் சமவலுவாக இருக்கும்போது
λ, μ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.
தொகுதி சமநிலைப்படுமாறு λ, μ ஆகியவற்றுக்குப் பெறுமானங்கள் இருப்பதில்லை எனவும் காட்டுக.

15. (a) ஒவ்வொன்றினதும் நீளம் $2a$ ஆகவும் நிறை w ஆகவும் உள்ள ஐந்து சீரான சம கோல்களை அந்தங்களில் சோடியாகப் பிணைப்பதன் மூலம் ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணச் சட்டப்படல் $ABCDE$ செய்யப்பட்டுள்ளது. ஐங்கோணியின் பக்கம் CD ஒரு கிடைத் தளத்துடன் தொடுகையுறுமாறு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. BC, DE ஆகிய கோல்களின் நடுப் புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் ஓர் இழையினால் ஐங்கோணியின் வடிவம் பேணப்படுகின்றது. மூட்டு A யில் உள்ள தாக்கம் $\frac{w}{2}\cot\frac{\pi}{5}$ எனக் காட்டுக. இழையின் இழுவையையும் காண்க.

(b) உருவில் காணப்படும் சட்டப்படல் $AB, BC, CD, DE, EA, BE, BC, EC$ என்னும் ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்டுள்ளது. சட்டப்படல் C யில் ஒரு P நியூற்றன் என்னும் ஒரு நிலைக்குத்து விசையையும் A யில் ஒரு நிலைக்குத்து விசை F ஐயும் பிரயோகிப்பதன் மூலம் B ஒப்பமான ஆதாரத்தின் மீது நாப்பத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. விசை F ஐ P யின் சார்பிற் காண்க. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, ஒவ்வொரு கோலிலும் உள்ள தகைப்பையும் B யில் இருக்கும் ஆதாரத்தின் மீது உள்ள தாக்கத்தையும் காண்க.



16. ஆரை a யை உடைய ஒரு சீரான மெல்லிய அரைவட்டக் கம்பியின் திணிவு மையமானது மையம் O விலிருந்து தூரம் $\frac{2a}{\pi}$ யில் இருக்கின்றதெனத் தொகையிடலின் மூலம் காட்டுக.



உருவில் காணப்படும் சட்டப்படல் ஒரு சீரான மெல்லிய கம்பியை வளைத்துச் செய்யப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படலின் திணிவு மையம் $G(x, y)$ எனின், x, y யைக் காண்க.
சட்டப்படல் இப்போது O விலிருந்து சுயாதீனமாகத் தொங்கவிடப்படும் போது நிலைக்குத்துடன் OA யின் சாய்வுக் கோணம் θ எனின், $\tan\theta = \frac{10}{7\pi + 2}$ எனக் காட்டுக.
சட்டப்படல் O விலிருந்து தொங்கவிடப்படும்போது ஒரு கிடை விசை P யைச் சட்டப்படலின் தளத்திலே B யில் பிரயோகிப்பதன் மூலம் சட்டப்படல் விளிம்பு OA நிலைக்குத்தாகப் பேணப்படுகின்றது. சட்டப்படலின் நிறை w எனின், P யின் பெறுமானத்தை w வின் சார்பிற் காண்க.
சட்டப்படலை O விலிருந்து தொங்க விடுவதற்குப் பதிலாக அதன் வளைந்த விளிம்பை ஒரு கிடைத் தளத்துடன் தொடுகையுறுமாறு வைக்கும்போது அது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நாப்பத்தில் இருக்கையில் கிடையுடன் OA யின் சாய்வுக் கோணத்தைக் காண்க.

17. (a) A, B ஆகியன இரு எழுமாற்று நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். $P(B) > 0$ ஆக இருக்கும்போது நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(A|B)$ ஐ வரையறுக்க.
A_1, A_2, A_3 என்னும் மூன்று எழுமாற்று நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).\, P(A_2|A_1).\, P(A_3|A_1 \cap A_2)$ எனக் காட்டுக.
விளையாட்டுக் கழகம் ஒன்றின் உறுப்பினர்களில் $\frac{3}{4}$ ஆனோர் வயதுவந்தவர்களாக இருக்கும் அதே வேளை ஏனையோர் பிள்ளைகளாவர். வயதுவந்தவர்களில் $\frac{3}{4}$ உம் பிள்ளைகளில் $\frac{3}{5}$ உம் ஆண்களாவர். வயதுவந்த ஆண்களில் அரைவாசியும் வயதுவந்த பெண்களில் $\frac{1}{3}$ உம் ஆண் பிள்ளைகளில் $\frac{4}{5}$ உம் பெண் பிள்ளைகளில் $\frac{4}{5}$ உம் விளையாட்டுக் கழகத்தின் நீச்சல் தடாகத்தைப் பயன்படுத்தப்படுகின்றனர்.
இவ்விளையாட்டுக் கழகத்தின் உறுப்பினர்களிடையே எழுமாற்றாகத் தெரிந்தெடுக்கப்படும் ஒருவர்
(i) நீச்சல் தடாகத்தைப் பயன்படுத்துபவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,
(ii) நீச்சல் தடாகத்தைப் பயன்படுத்துபவரெனத் தரப்படும்போது அவ்வுறுப்பினர் ஓர் ஆணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,
(iii) நீச்சல் தடாகத்தைப் பயன்படுத்தாதவரெனத் தரப்படும்போது அவ்வுறுப்பினர் ஒரு பெண்ணாக அல்லாது வயதுவந்தவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு
ஆகியவற்றைக் காண்க.

(b) ஒரு குறித்த பரீட்சைக்குத் தோற்றிய 100 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகளின் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பல் ஒன்றின் வகுப்புப் புள்ளிகளும் ஒவ்வொரு வகுப்புப் புள்ளிகளுக்கும் உரிய மீடிறனும் பின்வரும் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன.

வகுப்புப் புள்ளி	மீடிறன்
24.5	1
34.5	9
44.5	35
54.5	40
64.5	12
74.5	3

(i) உகந்த குறிமுறை ஒன்றைப் பயன்படுத்தி இப்பரம்பலின் இடை 50.7 எனவும் ஆகாரம் 51.02 எனவும் நியம விலகல் 9.46 எனவும் காட்டுக.
(ii) மேற்குறித்த பரம்பலில் இடம்பெற்ற ஒவ்வொரு புள்ளியும் உண்மைப் புள்ளியிலும் பார்க்க 3 இனால் கூடியதெனப் பின்னர் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. உண்மைப் பரம்பலின் இடை, ஆகாரம், நியம விலகல் ஆகியவற்றைக் காண்க.
(iii) இன்னும் 50 மாணவர்களின் புள்ளிகளின் உண்மை இடையும் நியம விலகலும் முறையே $58, 2.5$ எனின், ஒழுங்குபடுத்திய புள்ளிகளின் இடையையும் நியம விலகலையும் காண்க.

***