(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
4th Term Examination - 2024

FWC

இணைந்த கணிதம் - I
Combined mathematics - I

Three Hours 10 min

Gr -13 (2024)

10	T	A

சுட்டெண் | | | | | | |

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லாவினாக்களுக்கும் விடைஎழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக் கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்த கணிதம்		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் A	
இணைந்த கணிதம் B	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

பகுதி - A

01) $n = 0, 1, 2, \dots\dots$ இற்கு $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$ எனவும் $a_0 = 1$ எனவும் கொள்வோம். **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப்** பயன்படுத்தி எல்லா $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கும் $a_n = 2^n + n$ எனக் காட்டுக.

02) $y = |x^2 - 4|$, $y = x + 2$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. **இதிலிருந்து,** சமனிலி $\frac{x+2}{|x+2|} \geq |x - 2|$ ஐத் திருப்திப்படுத்தும் x இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

03) $k \in \mathbb{R}$ எனவும் $f(x) = x^2 - 2kx + k$ எனவும் கொள்வோம். $f(x)$ ஐ வடிவம் $(x-p)^2 + q$ இல் எடுத்துரைக்க; இங்கு p, q என்பன k சார்பில் உள்ள மாறிலிகள். **இதிலிருந்து,** எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) \geq k - k^2$ எனக் காட்டி, $f(x)$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தை k சார்பில் காண்க. எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $f(x) \geq 0$ ஆக இருக்கும் k இன் மெய்ப் பெறுமானங்களைக் காண்க.

04) இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின், $\alpha(\beta+1)$, $\beta(\alpha+1)$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு $x^2 - (p+2q)x + q(p+q+1) = 0$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

05) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{(1-x^2)^2} = \frac{\pi^2}{16}$ எனக் காட்டுக.

06) $A \int_0^3 \left|\frac{1-x}{1+x}\right| dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

07) $0 < x < \pi$ இற்கு $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ எனக் கொள்வோம். $f''(x) = \frac{1}{2}\cos x$ எனக் காட்டுக. சார்பு $y = f(x)$ இன் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

08) உற்பத்தியிலிருந்து நேர்கோடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ இற்கு வரையப்படும் செங்குத்தின் நீளம் p எனின், $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக. **இதிலிருந்து,** $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் உற்பத்தியில் இருந்துள்ள செங்குத்தின் நீளம் $\frac{1}{5}$ அலகுகள் ஆகுமாறுள்ள இரு நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

09) $(2,2)$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகச் செல்வதும் x-அச்சைத் தொடுவதும் கோடு $y=\frac{1}{2}x$ இல் மையத்தைக் கொண்டுள்ளதுமான இரு வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

10) $\sin A\cos 2A=\frac{\sin 4A}{4\cos A}$ எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து,** $\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{2\pi}{10}\,\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{6\pi}{10}=-\frac{1}{16}$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
4th Term Examination - 2024

FWC

இணைந்த கணிதம் - I
Combined mathematics - I

Gr -13 (2024) | 10 | T | B

பகுதி - B

11) (a) $a, k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$ எனவும் $f(x) = x^2 + 3x + k,\quad g(x) = 2x^2 + ax + k$ எனவும் கொள்வோம். $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனவும் $g(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, γ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. $\alpha = 3 - a$ எனவும் $k = -(a-3)(a-6)$ எனவும் காட்டுக.

(i) $f(x) = 0,\ g(x) = 0$ ஆகியவற்றின் பிரித்துக்காட்டிகளை a இன் உறுப்புகளில் காண்க. **இதிலிருந்து,** $f(x) = 0,\ g(x) = 0$ ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் மூலங்களும் மெய்யானவை எனக் காட்டுக.

(ii) $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் இரண்டும் மறையானவை எனின், $3 < a < 6$ எனக் காட்டி, $g(x) = 0$ இன் இரண்டு மூலங்களும் மறையானவை எனக் காட்டுக.

(iii) β, γ ஆகியவற்றை a இன் சார்பில் கண்டு, β, γ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு $2x^2 + 3(6-a)x + (6-a)^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

(b) பல்லுறுப்பிச் சார்பு $f(x)$ ஐ $\alpha x - \beta$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ எனக் காட்டுக.

$p(x) = 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2$ எனக் கொள்வோம்.

$p(x)$ ஐ $2x - 1,\ 2x + 1$ இனால் வகுக்கும்போது வரும் மீதிகளைக் கண்டு, $p(x)$ ஐ $4x^2 - 1$ இனால் வகுக்க வரும் மீதியைக் காண்க. மேலும், $p(1),\ p(-2)$ ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு, $p(x)$ ஐக் காரணிப்படுத்துக.

12) (a) $f(x) = \sin x$ இன் பெறுதியை முதற்கோட்பாடுகளில் இருந்து காண்க. **இதிலிருந்து,** $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ இற்கு $\frac{d}{dx}\{\sin^{-1} 2x\}$ ஐக் காண்க.

(b) $x = \tan\theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவழியாக $0 < x < 1$ ஆக இருக்கும்போது $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ குறித்து $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ இன் பெறுதியைக் காண்க.

(c) $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ இற்கு $y = x.e^{-\frac{k}{x}}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) $x^2 \frac{dy}{dx} = (x+k)y$ எனவும்

(ii) $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - kx\frac{dy}{dx} + ky = 0$ எனவும் காட்டுக.

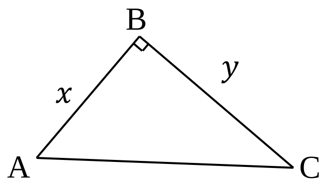
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-k},\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=-k}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

13) (a) $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$ இற்கு $f(x) = -\frac{x^3}{(x-2)(x+2)}$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$ இற்கு $f'(x) = -\frac{x^2(x^2-12)}{(x-2)^2(x+2)^2}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து** $f(x)$ இன் திரும்பற் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. $(0, 0)$ ஆனது ஒரே ஒரு விபத்திப் புள்ளியெனத் **தரப்பட்டுள்ளது.**

அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளிகள், விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பருமட்டாக வரைக.

(b) a நீளமான ABC என்னும் கம்பித்துண்டொன்று உருவில் காட்டியவாறு $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ ஆகுமாறு ஒரு செங்கோண முக்கோணி ABC இன் வடிவத்தில் வளைக்கப்பட்டுள்ளது. $AB = x,$ எனவும் $BC = y$ எனவும் கொள்வோம்.



(i) $y = \frac{a(a-2x)}{2(a-x)}$ எனக் காட்டுக.

(ii) முக்கோணி ABC இன் பரப்பளவு A ஆனது $A = \frac{ax(a-2x)}{4(a-x)}$ எனக் காட்டி $x = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})a$ ஆகும் போது A உயர்வெனக் காட்டுக.

14) (a) பிரதியீடு $x + \frac{1}{x} = t$ ஐப் பயன்படுத்தி $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^4+6x^2+1} dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{\pi}{8}$ எனக் காட்டுக.

(b) எல்லா $x \in \boldsymbol{R}$ இற்கும் $3x^3 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) + (x+c)(x-1)^2$ ஆகுமாறு A, B, C என்னும் மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, $\frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களில் எழுதி, $\int \frac{3x^3}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx$ ஐக் காண்க.

(c) (i) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int e^x\{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + c$ எனக் காட்டுக; இங்கு $f'(x)$ என்பது x குறித்து $f(x)$ இன் பெறுதியாகும். $\int_1^2 \frac{e^x(1 + x\ln x)}{x} dx = e^2 \ln 2$ என்பதை **உய்த்தறிக.**

(ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ என்பதை நிறுவுக.

இதிலிருந்து, $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$ ஐப் பெறுமானங் கணிக்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

15) $P \equiv (x_0, y_0)$ எனவும் l ஆனது $ax + by + c = 0$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு எனவும் கொள்வோம். P இலிருந்து l இற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ எனக் காட்டுக.

ஒரு சாய்சதுரம் $ABCD$ இன் மூலைவிட்டம் AC யின் சமன்பாடு $2x + y - 4 = 0$ எனவும் உச்சி $C \equiv (1, 2)$ எனவும் பக்கம் AB யின் சமன்பாடு $x + 2y + 4 = 0$ எனவும் தரப்பட்டுள்ளன. மூலைவிட்டங்கள் AC, BD என்பன புள்ளி E இல் சந்திக்கின்றன.

$A \equiv (4, -4)$ எனக் காட்டி, E இன் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

BD இன் சமன்பாடு $2x - 4y - 9 = 0$ எனக் காட்டி, புள்ளி B யின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க.

பக்கம் BC இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

AC மீது E இற்கும் A இற்கும் இடையில் உள்ள யாதாயினும் ஒரு புள்ளி Q இன் ஆள்கூறுகள் வடிவம் $\left(\frac{5}{2} + t, -1 - 2t\right)$ இல் எழுதப்படலாம் எனக் காட்டுக;

இங்கு $0 < t < \frac{3}{2}$.

புள்ளி $Q\left(\frac{5}{2} + t, -1 - 2t\right)$ இலிருந்து $AB,\ BD$ இற்கான செங்குத்துத் தூரங்கள் சமனாயின் $t = \frac{9}{16}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $A\hat{B}D$ இன் இருகூறாக்கியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16) சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் s இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையும் ஆரையையும் கண்டு, xy - தளத்தில் வட்டம் s ஐப் பரும்படியாக வரைக.

P என்பது வட்டம் s மீது உற்பத்தி O விலிருந்து மிக அண்மையாக உள்ள புள்ளியெனக் கொள்வோம். புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

வட்டம் s இற்குப் புள்ளி P யில் உள்ள தொடலிக் கோடு l இன் சமன்பாடு $3x + 4y - 10 = 0$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

கோடு l ஐத் தொடுகின்ற ஒரு வட்டம் s' ஆனது வட்டம் s ஐ P யிலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு புள்ளியில் வெளியே தொடுகின்றது. வட்டம் s' இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் (h, k) எனக் கொள்வோம். கோடு l குறித்து O வினதும் s' இன் மையத்தினதும் தானங்களைக் கருதுவதனால்

$3h + 4k > 10$ எனக் காட்டுக.

s' இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகள் (h, k) ஆனது சமன்பாடு

$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 180x - 240y + 375 = 0$ ஐத் திருப்தியாக்குகின்றன எனவும் காட்டுக.

மேலும், வட்டம் s' இன் மையம் y-அச்சு மீது உள்ளதெனத் தரப்படின், s' இன் மையங்களின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

17. (a) சமன்பாடு $y = \frac{1+\sin x}{5+4\cos x}$ ஐ வடிவம் $\cos(x+\alpha) = R$ இல் எடுத்துரைக்க. இங்கு $R,\ \alpha$ என்பன y சார்பில் துணியப்படவேண்டியவை. **இதிலிருந்து,** $x \in \boldsymbol{R}$ இற்கு $0 \leq \frac{1+\sin x}{5+4\cos x} \leq \frac{10}{9}$ எனக் காட்டுக. சமன்பாடு $\frac{1+\sin x}{5+4\cos x} = \frac{1}{3}$ ஐத் தீர்க்க.

(b) வழமையான குறியீடுகளுடன் யாதாயினும் ஒரு முக்கோணி ABC இற்கு சைன் நெறியைக் கூறி நிறுவுக.

வழமையான குறியீடுகளுடன் முக்கோணி ABC இல் கோணம் A இன் உள்ளிருகூறாக்கி BC ஐ D இல் சந்திக்கின்றது எனத் தரப்பட்டுள்ளது. முக்கோணிகள் $ABC,\ ABD,\ ACD$ ஆகியவற்றிற்கு சைன் நெறியைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம்

(i) $AB:AC = BD:DC$ எனவும்

(ii) $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ எனவும்

காட்டுக.

(c) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \frac{\pi}{2}$ எனின், $xy + yz + zx = 1$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

தேசிய வெளிக்கள நிலையம் தொண்டைமானாறு
நான்காம் தவணைப் பரீட்சை - 2024
National Field Work Centre, Thondaimanaru.
4th Term Examination - 2024

FWC

இணைந்த கணிதம் - II
Combined mathematics - II

Three Hours 10 min

Gr -13 (2024)

10	T	A

சுட்டெண்

அறிவுறுத்தல்கள்:

- பகுதி A இன் எல்லாவினாக்களுக்கும் விடைஎழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்கும் விடைகளைத் தரப்பட்ட இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிகத் தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- பகுதி B இல் உள்ள 7 வினாக்களில் விரும்பிய 5 வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்ட நேரம் முடிவடைந்ததும் பகுதி A ஆனது பகுதி B யிற்கு மேலே இருக்கக் கூடியதாக இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் பகுதி B யை மாத்திரம் பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

இணைந்த கணிதம்		
பகுதி	வினா எண்	கிடைத்த புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
வினாத்தாள் I இன் மொத்தம்		

இணைந்த கணிதம் A	
இணைந்த கணிதம் B	
இறுதிப் புள்ளிகள்	

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

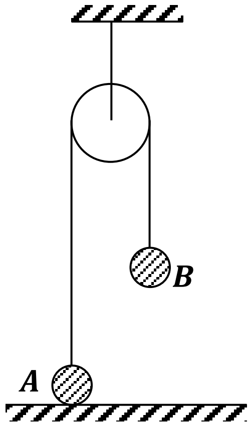
பகுதி - A

01) சம ஆரையும் முறையே $2m$, $3m$ திணிவுகள் உடைய P, Q ஆகிய கோளங்கள் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் குறித்த இடைத் தூரத்தில் வைக்கப்பட்டு அவற்றின் மையமிணை கோட்டின் வழியே ஒன்றை ஒன்று நோக்கி முறையே $2u, u$ வேகங்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. மோதுகையினால் ஏற்படும் கணத்தாக்கின் பருமன் $5mu$ எனில் மோதுகைக்கு சற்றுப் பின் P , Q இன் வேகங்களையும் இரு கோளங்களுக்கு இடையிலான மீளமைவுக் குணகத்தையும் காண்க.

02) கிடைத்தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி O இல் இருந்து $\sqrt{27ag}$ கதியுடன் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் எறியப்படும் துணிக்கையானது புள்ளி A ஊடு செல்கின்றது. புள்ளி A ஆனது O இல் இருந்து கிடை, நிலைக்குத்துத் தூரங்கள் முறையே $9a$, $6a$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி ஆகவும் α_1 , α_2 $(\alpha_1 > \alpha_2)$ என்பன கிடையுடன் துணிக்கையின் சாத்தியமான எறியற் கோணங்கள் ஆகவும் இருப்பின் $\alpha_2 = \frac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

03) தரையில் இருந்து $2a$ உயரத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட இலேசான ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்லும் $3a$ நீளமான இலேசான நீளா இழையின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட $2m, 3m$ திணிவுள்ள துணிக்கைகள் A, B படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு A ஆனது கிடை நிலத்தில் தங்கவும் B ஆனது கப்பிக்கு அருகிலும் பிடிக்கப்பட்டு மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் இழையில் ஏற்படும் கணத்தாக்கை துணிவதற்குப் போதிய சமன்பாடுகளைப் பெறுக. கணத்தாக்கை காண்க.



....

04) $600\ kg$ திணிவுள்ள கார் ஒன்று கிடையுடன் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{16}\right)$ சாய்வுள்ள நேரான பாதையில் மேல்நோக்கி $72\ km/h$ மாறா கதியில் பயணிக்கின்றது. காரின் இயக்கத்திற்கான மாறா தடை விசை R ஆகவும் காரின் எஞ்சின் ஆனது $25\ kW$ மாறா வலுவுடனும் இயங்கின் தடை விசை R ஐக் காண்க.

இயக்கத்திற்கான தடை விசை மாறாது இருக்க காரின் எஞ்சின் ஆனது $30\ kW$ மாறா வலுவுடன் அதே பாதையில் மேல்நோக்கி $20\ ms^{-1}$ கதியுடன் இயங்கும் போது காரின் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

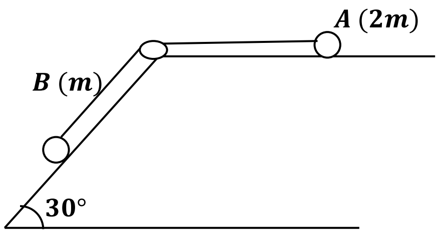
....

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

05) m திணிவுள்ள ஓர் துணிக்கை ஆனது மையம் O உம் ஆரை a ஐயும் உடைய ஒரு நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஒப்பமான கோள ஓட்டின் மீது உட்புறமாக மாறாக் கதி $\sqrt{\frac{3ag}{2}}$ உடன் கிடை வட்டத்தில் இயங்குகின்றது எனில் O இற்கு கீழே துணிக்கை ஆனது இயங்கும் ஆழத்தைக் காண்க.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

06) A, B துணிக்கைகளின் திணிகள் முறையே $2m$, m ஆகும். அவை ஒரு இலேசான நீளா இழையின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது ஒப்பமான இலேசான கப்பியின் ஊடாக சென்று துணிக்கை A ஆனது ஒரு கரடான கிடைத் தளத்திலும் துணிக்கை B ஆனது கிடையுடன் $30°$ சாய்வுள்ள ஓர் ஒப்பமான தளத்திலும் தங்க இழையின் பகுதிகள் கிறுக்கமாக இருக்க தொகுதி மெதுவாக விடப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் துணிக்கைகளின் ஆர்முடுகல், இழையில் உள்ள இழுவை ஆகியவற்றை துணிவதற்கு போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக. துணிக்கை A க்கும் தளத்துக்கும் இடையிலுள்ள உராய்வு குணகம் μ.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

07) அலகுக் காவிகள் a, b இற்கு இடைப்பட்ட கோணம் $60°$. O குறித்து A, B, C இன் தானக்காவிகள் முறையே $4\,\underline{a},\ 3\,\underline{b},\ \frac{2}{3}\,\underline{a} + \frac{5}{3}\,\underline{b}$ ஆகும். $OA \perp BC$ எனக் காட்டுக.

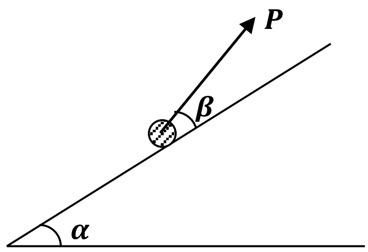
08) உற்பத்தி O குறித்து A, B, C இன் தானக் காவிகள் முறையே $\underline{i} + \underline{j}$, $2\underline{i} + \underline{j}$, $K\underline{i} + \underline{j}$ ஆகும். $A\hat{O}C$ இன் கோண இருகூறாக்கி OB எனில் K இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

09) W நிறையும் $2a$ நீளமும் கொண்ட ஒரு சீரான கோல் AB இன் முனை A ஆனது கிடைத் தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு பிணைக்கப்பட்டு, a நீளமுள்ள ஒரு இலேசான இழை CD இன் ஒரு முனை D ஆனது A இற்கு நேர் மேலே உள்ள புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு மற்றைய முனை C ஆனது AB இல் கோர்க்கப்பட்டு இலேசான ஒப்பமான வளையத்துக்கு இணைக்கப்பட்டும் வளையம் ஆனது AB இன் நடுப்புள்ளியில் இருக்க நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் பேணப்படுகின்றது. இழையில் உள்ள இழுவையையும், பிணையல் A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

10) படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு W நிறையுடைய துணிக்கை கிடையுடன் α சாய்வுள்ள கரடான தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு துணிக்கைக்கு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சாய்தளத்தில் உயர் சரிவுடன் β கோணத்தில் விசை P ஆனது பிரயோகிக்கப்படும் போது மேல்நோக்கி வழுக்கும் தறுவாயில் இருப்பின் β ஐ மாற்றும் போது விசை P இன் இழிவுப் பெறுமானம் $W\sin(\alpha+\lambda)$ எனக் காட்டுக. இங்கு λ ஆனது துணிக்கைக்கும் தளத்துக்கும் இடையிலான உராய்வுக் கோணம் ஆகும்.



....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

இணைந்த கணிதம் - II
Combined mathematics - II

Gr -13 (2024) | **10** | **T** | **B**

பகுதி - B

11) (a) ஒரு மனிதன் கார் ஒன்றை ஓர் நேரான பாதை வழியே இயக்கிச் செல்கின்றான். ஒரு குறித்த கணத்தில் $(t = 0)$ காரில் பெற்றோல் முடிவடைந்து விடுகின்றது. அக்கணத்தில் காரின் கதி $12\, ms^{-1}$ ஆக இருப்பதுடன் கார் ஆனது சீராக அமர்முடுகி $t = 8\, s$ இல் ஓய்வுக்கு வருகின்றது. உடனடியாக மனிதன் காரில் இருந்து இறங்கி $0.7\, ms^{-1}$ சீரான கதியுடன் கார் இயங்கிய திசைக்கு எதிர்த் திசையில் சீரான கதியுடன் இயங்கி $420\, m$ தூரத்தில் உள்ள பெற்றோல் நிலையத்தை அடைந்து அங்கு பெற்றோல் வாங்குவதற்கு $250\, s$ செலவிடுகின்றான். பின் உடனடியாக பெற்றோல் நிலையத்தில் இருந்து ஓர் மோட்டார் சைக்கிளில் ஏறி காரை வந்து அடைகின்றான். மோட்டார் சைக்கிள் பெற்றோல் நிலையத்தில் ஓய்வில் இருந்து புறப்பட்டு சீரான ஆர்முடுகலுடன் இயங்கி $20\, ms^{-1}$ கதியை அடைந்து சீராக அமர்முடுகி கார் நிற்கும் இடத்தை $t = T$ செக்கனில் அடைகிறது.

(i) $0 \leq t \leq T$ நேர ஆயிடையில் மனிதனின் இயக்கத்திற்கான வேக நேர வரைபை வரைக.

(ii) $6 < t < 8$ இல் காரின் அமர்முடுகலையும், கார் இயங்கிய தூரத்தையும் காண்க.

(iii) T ஐக் காண்க.

(iv) மோட்டார் சைக்கிளின் ஆர்முடுகலின் பருமன் அமர்முடுகலின் பருமனின் இரு மடங்கு எனில் மோட்டார் சைக்கிளின் அமர்முடுகலைக் காண்க.

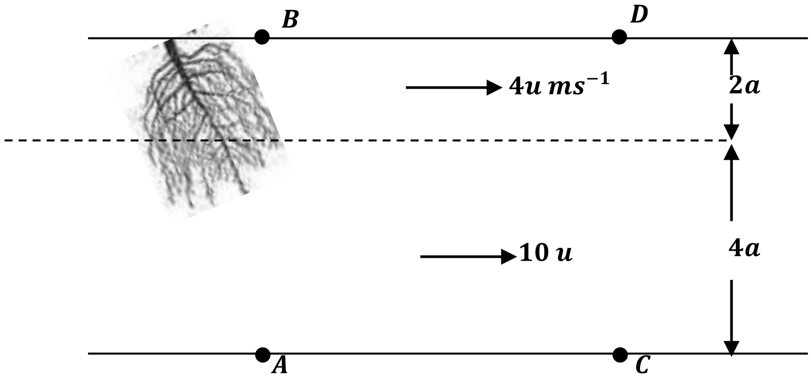
(b) சமாந்தரமான நேர்க் கரைகள் உள்ள அகலம் $6a$ ஐ உடைய ஓர் ஆறு சீரான வேகம் $8u$ உடன் பாய்கின்றது. A, B என்பன அவற்றின் கரைகளில் நேர் எதிர் எதிர் புள்ளிகள் ஆகும்.

M என்னும் ஓர் மனிதன் A இல் இருந்து B ஐ அடையும் வண்ணம் ஆறு சார்பாக $17\, u$ சீரான கதியில் நீந்துகின்றான்.

(i) ஆறு சார்பாக மனிதன் M இயங்கும் திசையையும் B ஐ அடைவதற்கு அவனுக்கும் எடுக்கும் நேரத்தையும் சார்புவேக கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி வேக முக்கோணி வரைவதன் மூலம் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

மனிதன் M ஆனவன் B ஐ அடைந்த பின்பு ஏற்படும் புயல் காரணமாக B இன் கரையில் உள்ள மரம் படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு ஆற்றில் வீழ்ந்து ஆற்று நீரோட்டத்தின் வேகத்தை மாற்றுகின்றது.



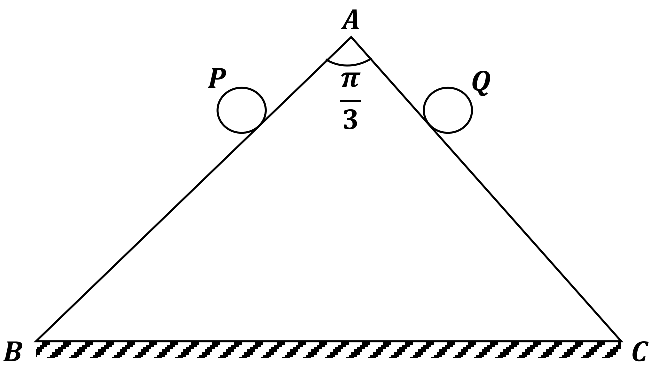
படத்தில் காட்டியவாறு C, D என்பன ஆற்றங்கரைகளில் எதிர் எதிர் புள்ளிகளாக மனிதன் N ஆனவன் புள்ளி C இல் இருந்து ஆறு சார்பாக $17\,u$ சீரான கதியுடன் மனிதன் M நீந்திய திசையில் நீந்துகிறான்.

(ii) ஆற்றின் வேகம் $10\,u$ ஆக உள்ள பகுதியில் மனிதன் N இன் வேகத்தைக் காண்க.

(iii) ஆற்றின் வேகம் $4\,u$ ஆக உள்ள பகுதியில் மனிதன் N இன் வேகத்தைக் காண்க.

(iv) மனிதன் N, D யை அடைவானெனக் காட்டுக.

12) (a)



உருவில் உள்ள முக்கோணி ABC ஆனது $4\,m$ திணிவு உடைய ஒரு சீரான ஒப்பமான ஆப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஊடான ஒரு நிலைக்குத்து குறுக்குவெட்டாகும். $AB = AC$, $B\hat{A}C = 60°$ ஆகும். AB, AC என்பன அதனை கொண்டுள்ள முகங்களின் அதி உயர் சரிவுக் கேர்டுகள் ஆகும். முகம் BC ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தில் இருக்குமாறு ஆப்பானது வைக்கப்பட்டுள்ளது. AB, AC ஐ கொண்டுள்ள முகங்களில் முறையே $2m$, m திணிவுள்ள P, Q ஆகிய துணிக்கைகள் வைக்கப்பட்டு தொகுதி ஓய்வில் இருந்து மெதுவாக விடுவிக்கப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் ஆப்பு, துணிக்கைகள் P, Q ஆகியவற்றின் ஆர்முடுகல்களை துணிவதற்கும், கிடை நிலத்தினால் ஆப்பில் தாக்கும் மறுதாக்கத்தை துணிவதற்கும் போதிய சமன்பாடுகளை எழுதுக.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

(b) P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளின் திணிவுகள் முறையே $9m\ kg$, $\lambda m\ kg$ $(\lambda < 9)$. இவை இலேசான நீளா இழைகளின் நுனிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டு இழையானது உயரமாக நிலைப்படுத்த கப்பியின் மேலாக சென்று P, Q ஆகிய திணிவுகளை தாங்குகின்றது. ஆரம்பத்தில் P ஆனது கிடை தரையில் இருந்து $3.15\ m$ உயரத்தில் இருக்குமாறும் இழையில் பகுதிகள் நிலைக்குத்தாகவும் இறுக்கமாகவும் இருக்குமாறும் பிடிக்கப்பட்டு மெதுவாக விடப்படுகின்றது. தொடரும் இயக்கத்தில் P ஆனது தரையை $1.5\ s$ இல் அடிக்கின்றது. அப்போது Q ஆனது கப்பியின் மட்டத்தை அடையவில்லை எனில்,

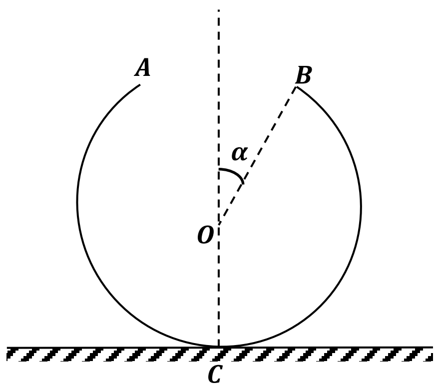
(i) P ஆனது தரையை அடிப்பதற்கு முன் அதன் ஆர்முடுகலைக் காண்க.

(ii) P ஆனது தரையை அடிப்பதற்கு முன் இழையில் உள்ள இழுவையைக் காண்க. $(g = 9.8\ ms^{-2})$

(iii) $\lambda = 5$ எனக் காட்டுக.

(iv) P ஆனது தரையை அடித்து பின்னதைக்கவில்லை எனவும் Q ஆனது கப்பியை அடையவில்லை எனவும் தரப்படின் P ஆனது தரையை அடித்ததில் இருந்து எவ்வளவு நேரத்தில் இழை இறுகும் எனக் காண்க.

13) மையம் O உம் ஆரை r ஆகவும் உள்ள ஓர் ஒப்பமான பொள் கோளத்தின் பகுதி படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. முகம் AB ஆனது தட்டையான வட்ட வளையம் ஆகும். இக்கோள வடிவம் ஓர் ஒப்பமான கிடை மேசை மீது படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு நிலைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. C ஆனது அதிதாழ் புள்ளி ஆகும். AB கிடையாக உள்ளது. OB ஆனது மேல்முக நிலைக்குத்துடன் α கோணத்தை ஆக்குகின்றது. இங்கு $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ஆகும்.



m திணிவுள்ள ஒப்பமான சிறிய மாபிள் புள்ளி C இல் உட்புறமாக வைக்கப்பட்டு கிடையாக U வேகம் நிலைக்குத்துத் தளம் COB இல் கொடுக்கப்படுகின்றது. மாபிள் ஆனது B ஐ அடையும் வரை கோளத்துடன் தொடுகையில் இருப்பதுடன் B இல் அதன் கதி V_0 ஆகும்.

(i) மாபிள் ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் θ கோணத்தில் உள்ள போது கதி V எனில் $V^2 = U^2 - 2gr(1 - \cos\theta)$ எனக்காட்டி செவ்வன் மறுதாக்கம் R ஐக் காண்க.

(ii) V_0 ஐக் காண்க.

(iii) $U^2 = 4gr$ எனில் B இல் கோள ஓட்டினால் மாபிளில் தாக்கும் செவ்வன் மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

(iv) மாபிள் B ஐ அடைவதற்கு U இன் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(v) மாபிள் ஆனது B இன் ஊடாக வெளியேறி மீண்டும் A ஐ அடைவதற்கு U இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

14) (a) சம ஆரையுள்ள ஒப்பமான கோளங்கள் A, B இன் திணிவுகள் முறையே m, $4m$ ஆகும். அவை ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளம் ஒன்றில் வைக்கப்பட்டு A இற்கு B ஐ நோக்கி அவற்றின் மையம் இனை கோட்டின் வழியே u வேகம் கொடுக்கப்படுகின்றது. A ஆனது B உடன் மோதி பின்னதைப்பதுடன் A, B க்கு இடையிலான u, e சார்பில் காண்க.

அ) A, B ஒன்றுடன் ஒன்று மோதிய சற்றுப் பின் அவற்றின் வேகங்களை u, e சார்பில் காண்க.

ஆ) தொடரும் இயக்கத்தில் B ஆனது ஒப்பமான நிலைக்குத்துச் சுவரை மோதி பின்னதைக்கின்றது. சுவர் ஆனது B இன் இயக்கத் திசைக்கு செங்குத்து ஆகும். கோளம் B இற்கும் சுவருக்கும் இடையிலான மீளமைவுக் குணகம் $\frac{4}{5}$ ஆகவும் B ஆனது இரண்டாவது தடைவ A உடன் மோதுகின்றது எனத் தரப்படின்

(i) $\frac{1}{4} < e < \frac{9}{16}$ எனக் காட்டுக.

(ii) $e = \frac{1}{2}$ எனில் A, B க்கு இடையிலான முதலாவது மோதுகையில் இழந்த இயக்க சக்தியைக் காண்க.

(b) $\underline{i}$, $\underline{j}$ என்பன நிலைக்குத்துத் தளம் ஒன்றில் முறையே கிடையாக, நிலைக்குத்தாக மேல் நோக்கிய கிடைத் தரையில் உள்ள நிலையான புள்ளி O குறித்த அலகுக் காவிகள் ஆகும். A ஆனது O குறித்த தானக்காவி $10j$ ஆகுமாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் O இற்கு மேலே உள்ள புள்ளி ஆகும். ஒரு துணிக்கை P ஆனது A இல் இருந்து $\left(3\underline{i} + 4.8\underline{j}\right) ms^{-1}$ வேகத்துடன் அதே நிலைக்குத்துத் தளத்தில் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை ஆனது T செக்கனில் தரையை அடிப்பின் $(g = 9.8)$

(i) $0 \leq t \leq T$ இற்கு O குறித்து புள்ளி P இன் தானக்காவி $\underline{r}$ எனில் $\underline{r} = 3t\underline{i} + (10 + 4.8t - 4.9t^2)\underline{j}$ எனக் காட்டுக.

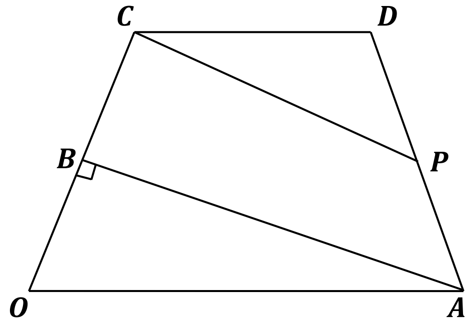
(ii) T ஐக் காண்க.

$t = t$ இல் துணிக்கை P இன் வேகத்தைக் காண்க.

(iii) துணிக்கை P ஆனது புள்ளி B ஐக் கடக்கும் கணத்தில் P இன் இயக்கத் திசை கிடையுடன் கீழ்முகமாக 45° எனில் துணிக்கை P ஆனது A இல் இருந்து B ஐ அடைய எடுக்கும் நேரத்தையும் B ஐக் கடக்கும் போது துணிக்கை P இன் கதியையும் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

15) (a) $\Delta\, OAB$ செங்கோண முக்கோணி, $O\hat{B}A = \frac{\pi}{2}$. $OB = BC$ ஆகுமாறு OB ஆனது C வரை நீட்டப்பட்டு $\overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{OA}$ $(k > 0)$ ஆகுமாறு உள்ள புள்ளி D ஆகும். CP சமாந்தரம் BA ஆகுமாறு P ஆனது AD இல் உள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும். $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{DP} = \lambda\,\overrightarrow{DA}$ எனில்



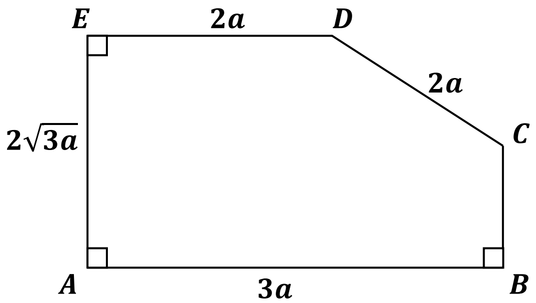
(i) $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DA}$ ஐ a, b, k சார்பில் காண்க.

(ii) $\overrightarrow{BA}$ ஐ $\underline{a}$, $\underline{b}$ சார்பிலும் $\overrightarrow{CP}$ ஐ $\underline{a}$, $\underline{b}, \lambda$, k சார்பிலும் கண்டு அதில் இருந்து λ ஐ k சார்பில் கண்க.

(iii) $\underline{a}\,.\,\underline{b} = |\underline{b}|^2$ எனக் காட்டுக.

(iv) $OB = \frac{1}{4}\,OA$ எனில் $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{DA} = (-16k^2 + 12k - 2\,)\,|\underline{b}|^2$ எனக் காட்டி $OD \perp DA$ எனில் k, λ ஐக் காண்க.

(b)



$ABCDE$ ஓர் ஐங்கோணி. $B\hat{A}E = A\hat{B}C = A\hat{E}D = \frac{\pi}{2}$, $AB = 3a$, $CD = DE = 2a$, $AE = 2\sqrt{3}a$ ஆகும். பக்கங்கள் $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CD}$ வழியே முறையே $8\sqrt{3}$, 12, $\alpha\sqrt{3}$, β விசைகள் தாக்குகின்றன.

(i) இவ்விசைத் தொகுதியின் விளையுள் AD இற்கு சமாந்தரமாக 30 எனில் α, β ஐக் காண்க.

(ii) A பற்றி இவ்விசைத் தொகுதியின் திருப்பத்தைக் காண்க.

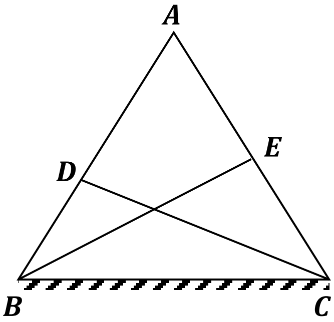
(iii) விளையுள் AB ஐ வெட்டும் புள்ளியைக் காண்க.

(iv) இவ்விசைத்தொகுதியானது A இன் ஊடாக செல்லும் தனிவிசையாக ஒடுக்க சேர்க்க வேண்டிய இணையைக் காண்க.

(v) அவ் இணை G தொழிற்படும் போது $\overrightarrow{AB}$ இற்கு சமாந்தரமாக C இன் ஊடு தாக்கும் ஓர் விசை P இனால் விளையுள் ஆனது DC க்கு செங்குத்தாக அமையின் விசை P ஐயும் விளையுள் விசையையும் காண்க.

(All Rights Reserved/ முழுப்பதிப்புரிமை உடையது)

16) (a) ஒவ்வொன்றும் W நிறையும் $5a$ நீளமும் கொண்ட AB, AC என்னும் சீரான கோல்கள் A இல் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டு B, C ஆகிய முனைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடை நிலத்தில் $8a$ இடைத்தூரத்தில் தங்க வைக்கப்பட்டு BE, CD ஆகிய இரு இலேசான நீளா இழைகளினால் படத்தில் காட்டப்பட்டவாறு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமனிலையில் பேணப்படுகின்றது.



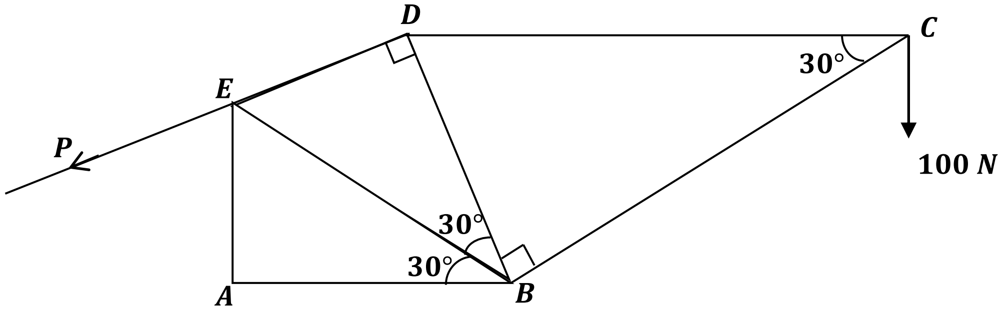
இங்கு D, E என்பன முறையே AB, AC இன் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும்.

(i) $BCD = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ எனக் காட்டுக.

(ii) இழையில் உள்ள இழுவை $T = \frac{\sqrt{17}\,w}{8}$ எனக் காட்டுக.

(iii) மூட்டு A இல் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

(b)



படத்தில் AB, BC, CD, DE, EA, BD ஆகிய ஏழு இலேசான கோல்கள் அவற்றின் முனைகள் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டு உருவாக்கப்பட்ட சட்டப்பட்டல் காட்டப்பட்டுள்ளது. இது A இல் ஒப்பமாக பிணைக்கப்படும். மூட்டு C இல் வைக்கப்பட்ட $100\,N$ விசையினாலும், மூட்டு E இல் தாக்கும் DE வழியான விசை P இனாலும் DC என்பது கிடையாக இருக்க AE நிலைக்குத்தாக நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமனிலையில் பேணப்படுகின்றது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி C, D, B, A ஆகிய மூட்டுக்களுக்கு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து,

(i) கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களின் பருமன்களைக் காண்க.

(ii) விசை P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

17) (a) ℓ நீளமும் W நிறையும் உடைய சீரான கோல் AB இன் முனை A கரடான கிடைத்தளத்திலும், மறுமுனை B கிடை நிலத்தில் இருந்து h உயரத்தில் உள்ள ஓர் ஒப்பமான முளையின் மீதும் தங்க எல்லைச் சமனிலையில் உள்ளது. தரைக்கும் கோலுக்கும் இடையிலான உராய்வுக் குணகம் $\frac{\ell \sin 2\theta \sin\theta}{4h - \ell \sin 2\theta \cos\theta}$ எனக் காட்டுக.

(b) AB என்பது W நிறையும் $12\,a$ நீளமும் உடைய சீரான கோல் முனை A ஒப்பமான நிலைக்குத்து சுவர் மீது பொறுத்திருக்க கோலில் உள்ள புள்ளி C இல் கட்டப்பட்ட இழையின் மறுநுனி A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள புள்ளி D இற்கு கட்டப்பட்டுள்ளது. B, D என்பன ஒரே மட்டத்திலுள்ளன. CB இன் நீளம் யாது?