பகுதி - B

11) (a) λ, μ பூச்சியமற்ற மாறிலிகளாக இருக்க $f(x) = (\lambda - x)^3 + (\mu - x)^3 + (\lambda + \mu - 2x)^3$ எனக் கொள்வோம்.

(i) காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $f(x)$ இன் இரு ஏகபரிமாணக் காரணிகளைக் காண்க.

(ii) $f(x)$ ஐ மூன்று ஏகபரிமாணக் காரணிகளின் பெருக்கமாக எழுதுக.

(iii) $f(x)$ ஐ $x - \lambda - \mu$ இனால் வகுக்க வரும் மீதியை λ, μ இன் சார்பில் காண்க.

(b) $a < 0,\ b^2 - 4ac > 0$ எனின் $ax^2 + bx + c$ என்ற கோவையானது $\frac{4ac - b^2}{4a}$ என்னும் நேரான உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $f(x) = x^2 + k(x^2 - x + 2)$ என்ற கோவையானது நேரான உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருப்பின் k இன் பெறுமானங்களின் தொடையைக் காண்க.

$y = f(x)$ என்னும் வளையி x அச்சை $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ என்னும் இரு வேறுவேறு புள்ளிகளில் இடைவெட்டுமெனின் $(\alpha^2, 0)$, $(\beta^2, 0)$ என்னும் புள்ளிகளில் x அச்சை வெட்டுவதும் $(0,\ \alpha^2\beta^2)$ என்னும் புள்ளியில் y அச்சை வெட்டுவதுமான இருபடிச் சார்பைக் k இன் சார்பில் காண்க.

12) (a) $NINETEEN$ என்னும் சொல்லின் 8 எழுத்துக்களையும் கொண்டு ஆக்கத்தக்க வெவ்வேறு ஒழுங்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவ்வொழுங்குகளில் எத்தனையில் மூன்று E கள் ஒருமித்தும் எந்த இரு N களும் அருகருகே இல்லாதவாறும் இருக்கும் அதோடு $NINETEEN$ என்ற சொல்லின் 8 எழுத்துக்களிலிருந்தும் ஆக்கத்தக்க 4 எழுத்துக்களின் வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. இவற்றுள் எத்தனை E இல் ஆரம்பித்து E இல் முடிவடையும்?

(b) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் $x^2 + 2x + 2 \equiv Ax(x+1) + B(x+1) + Cx$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க. $\frac{2^2+1}{1.2}.\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{3^2+1}{2.3}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4^2+1}{3.4}.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடரின் r ஆம் உறுப்பு U_r ஐக் காண்க.

$U_r = \left(\frac{1}{2}\right)^r + f(r) - f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐத் துணிக. **இதிலிருந்து** $\sum_{r=1}^{\infty} U_r = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ எனக் காட்டுக.

தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ ஒருங்குகின்றதெனக் காட்டி $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ இன் பெறுமானத்தையும் காண்க.

13) (a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனின் p, q, r, s ஆகியவற்றை a, b, c, d இன் சார்பில் காண்க.

$ad - bc \neq 0$ எனின் $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ எனக் காட்டுக.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்.

(i) A^{-1}, B^{-1} ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) $A\,X\,B = I_2$ எனின் $X = \frac{1}{136}\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ எனக் காட்டுக.

(iii) $2x + 5y = 12$

$-3x + y = -1$

என்னும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை தாய வடிவில் எழுதி இதிலிருந்து இச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(b) சிக்கலெண்கள் $z_1 = 1$ எனவும் $z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு $-\pi < \theta \leq \pi$ ஆகும்.

ஆகண் வரிப்படத்தில் z_1, z_2 என்னும் சிக்கலெண்களை A, B என்னும் புள்ளிகள் வகைக் குறிக்கின்றன. $z_1 + z_2$ ஐ வகைக் குறிக்கும் புள்ளி C ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $z_1 + z_2$ இன் மட்டையும் வீசலையும் காண்க.

$|z_1 + z_2|$ இன் உயர்வுப் பெறுமானத்தையும் அதற்கு ஒத்த சிக்கலெண் z_2 வையும் காண்க.

$|z_1 + z_2|$ இன் இழிவுப் பெறுமானத்தையும் அதற்கு ஒத்த சிக்கலெண் z_2 வையும் காண்க.

$\frac{1}{z_1 + z_2}$ ஐ முனைவாள்கூற்று வடிவத்தில் எழுதி $Re\left(\frac{1}{z_1 + z_2}\right) = \frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

14) (a) $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ எனின் $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ எனக் காட்டுக.

இங்கு a, b மாறிலிகள்

(b) $x \neq -2, 4$ இற்கு $f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$ எனக் கொள்வோம். $f'(x) = -\frac{4x(x+8)}{(x+2)^2\,(x-4)^2}$ எனக் காட்டுக. திரும்பற் புள்ளிகளையும் அணுகுகோடுகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபை பருமட்டாக வரைக.

$0 < k < \frac{16}{9}$ இற்கு $2x^2 - k(x+2)(x-4) = 0$ எனும் சமன்பாடு மெய்த் தீர்வுகளை கொண்டிராது என்பதை உய்த்தறிக.

(c) முக்கோணி ஒன்றின் இருபக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $15,\ 20$ ஆகும். தரப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணமானது $\frac{\pi}{90}$ எனும் வீதத்தில் அதிகரிக்கின்றது.

தரப்பட்ட பக்கங்களுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் $\frac{\pi}{3}$ ஆகும்போது மூன்றாவது பக்கம் அதிகரிக்கும் வீதம் $\frac{\pi}{\sqrt{39}}$ எனக் காட்டுக.

15) (a) $\int_o^a f(x)\ dx = \int_o^a f(a-x)\,dx$ எனக் காட்டுக.

இதனைப் பயன்படுத்தி

$\int_o^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_o^\pi f(\sin x)dx$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\int_o^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனக் காட்டுக.

(b) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int x\ln(1+x^2)\,dx$ ஐக் காண்க.

(c) $x^3 = \lambda(x-1)(4x^2+4x+2) + \mu\,(8x+4) + \gamma$ ஆகுமாறு λ,μ,γ ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க. இங்கு $x \in \mathbb{R}$ ஆகும். **இதிலிருந்து** $\int \frac{x^3}{4x^2+4x+2}dx$ ஐக் காண்க.

16) (a) $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டின் மீது புள்ளி (α,β) இன் ஆடிவிம்ப ஆள்கூறுகளைக் காண்க. $\Delta\,ABC$ இல் AB, AC என்னும் பக்கங்களின் இரு சமவெட்டிச் செங்குத்துக்களின் சமன்பாடுகள் முறையே $2x-y=0,\ x-3y=0$ ஆகும். புள்ளி A ஆனது $x-y=0$ என்னும் கோட்டின் மீது இருப்பதுடன் பக்கம் BC ஆனது $(-2,11)$ என்னும் புள்ளியினூடு செல்லுமாயின் முக்கோணி ABC யின் பக்கங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(b) $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி (x_o, y_o) இல் வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடலியின் சமன்பாடு $xx_0+yy_0-a^2=0$ எனக் காட்டுக.

$x^2+y^2=4$ எனும் வட்டத்திற்கு புள்ளி $(1,\sqrt{3})$ இல் வரையப்பட்ட தொடலி, செவ்வன், நேர் x அச்சு ஆகியவற்றால் அமைக்கப்பெறும் முக்கோணியின் பரப்பளவு $2\sqrt{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

17) (a) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$ என்னும் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை 0 இற்கும் 2π இற்கும் இடையில் காண்க.

(b) $t=\tan\frac{\theta}{2}$ எனின் $\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ என்னும் முடிவுகளைப் பெறுக.

மேலும் $\frac{1+\sin\theta}{3+2\cos\theta}=\frac{(1+t)^2}{5+t^2}$ எனக் காட்டி இதிலிருந்து t இன் எல்லா மெய்ப்பெறுமானங்களிற்கும் $0\le\frac{1+\sin\theta}{3+2\cos\theta}\le\frac{6}{5}$ எனக் காட்டுக.

(c) $\Delta\,ABC$ இல் A இன் உள்ளிரு கூறாக்கி பக்கம் BC ஐ D இல் சந்திக்கிறது. AD இற்குச் செங்குத்தாக D யினூடு வரையப்படும் கோடு AC ஐ E யிலும் AB ஐ F இலும் சந்திக்கிறது; (தேவை எனின் நீட்டப்பட்ட) வழமையான குறியீடுகளின்படி பின்வரும் பேறுகளை நிறுவுக.

(i) $AD=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$,

(ii) $\frac{2}{AE}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.