



පළමු වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2019

First Term Test - Grade 13 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
 A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
 වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
 ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I(A කොටස)

01. $ax^3 + bx^2 + cx + d$ බහු පදය $(x^2 + k^2)$ මගින් බෙදූවිට ශේෂයක් නොමැති නම්, $a:b=c:d$ බව පෙන්වන්න.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines, typical of primary school writing paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

02. $2 + |x - 4| > (x - 4)^2$ යන අසමානතාවය ප්‍රස්ථාර භාවිතයෙන් විසඳන්න.

[illegible]

03. $a \in \mathbb{R}$ සහ $(a-2)x^2 - 3(a+2)x + 6a = 0$ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්වික මූල දෙකක් පවතිනසේ a ට ගතහැකි අගය පරාසය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

04. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin \theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \theta}$ හි අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

05. $y = x(x-2)$ වක්‍රයෙහි $y = -\frac{x}{2}$ රේඛාවෙහි ආවෘත පෙදෙසේ වර්ගඵලය අනුකලනය මගින් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

06. $(t^2, 2t)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4x$ පරාවලයට ඇඳි අභිලම්භයේ සමීකරණය $y + tx = 2t + t^3$ බව පෙන්වන්න. මෙම අභිලම්භයට පරාවලය නැවත $(T^2, 2T)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී හමු වේ නම්, $t^2 + tT + 2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

07. සමාන්තර රේඛා දෙකකින් එක එකක් x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග α කෝණයක් සාදයි. එක් රේඛාවක් (h, k) හරහා ද අනෙක (m, n) හරහා ද යයි. රේඛා අතර ලම්භ දුර $|(h-m)\sin\alpha - (k-n)\cos\alpha|$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

08. $A = (2, -1)$, $B = (4, -3)$ යැයි ගනිමු. AB හි ලම්භ සමච්ඡේදකය මත $C = (3t, -t)$, $t \in R$ පිහිටා ඇත. t හි අගය සොයා, $ACBD$ රොම්බසයක් වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

09. $2 \tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\cos 2x + 3 \sin x = 2$ යන සමීකරණය තෘප්ත කරන x හි අගයන් $[-\pi, \pi]$ පරාසය තුළ සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංග්‍රහිත ගණිතය 13 - I B කොටස

❖ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. a. $ax^2 + bx + c = 0$ හි මූල α, β නම්, $(\alpha - \beta)^2$ හි අගය a, b හා c ඇසුරෙන් සොයන්න.

$(c - b + a)x^2 + (b - 2a)x + a = 0$ හි මූල α, β ඇසුරෙන් ලබා ගන්න.

b. i. $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ හා $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ යන යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් තිබෙයි නම්, ඒවායේ අනෙක් මූලවලින් $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණය තෘප්ත වන බව පෙන්වන්න.

ii. x තාත්වික නම්, $\frac{x^2 + 2x - 1}{2x - 1}$ ප්‍රකාශනයට 1ත් 2ත් අතර තාත්වික අගයයන් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

c. $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 2 = 0$ යයි ගනිමු. $(x - 1)$, $f(x)$ හි සාධකයක් වන අතර $(x + 1)$ න් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -6 ක් වෙයි.

a සහ b නියත සොයන්න.

a සහ b හි මෙම අගයයන් සඳහා $f(x)$ ඒකජ සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. a. $y = |x| - 2$ ශ්‍රිතයේ දළ ප්‍රස්තාරය අඳින්න.

ඒනයිත්, $y = ||x| - 2|$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය අපෝභනය කරන්න.

එම ප්‍රස්තාරය මගින් $\frac{||x| - 2|}{2} > 1$ විසඳන්න.

b. $f(x)$ යනු x හි සිව්වන මාත්‍රයේ බහු පදය ශ්‍රිතයකි. $f(x)$ යන්න $x^2 + 2$ න් හරියට ම බෙදේ.

එම බහුපදය $(x + 1)^2(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $6x^2 - 3x$ වේ. බහුපදය සොයන්න.

$f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල නොපවතින බව පෙන්වන්න.

c. හින්න භාග සොයන්න. $\frac{4x^2 - x + 2}{x(x + 1)^2}$

d. $a, b, c \in \mathbb{R}$ වන විට, $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$ බව පෙන්වන්න. ඒනයිත්, $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

13. චක්‍රයක සමීකරණය $y = \frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)}$ මගින් දෙනු ලැබේ.

i. $\frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ප්‍රකාශ කරන්න. $\frac{(3x+4)^2}{(2x+1)^2(x-2)^2}$ හි ද භින්න භාග ලබා ගන්න.

ii. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{2}{(x-2)^2}$ බව පෙන්වා, ඒ නයිත් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $x = -3$ දී චක්‍රයට හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් ඇති බව පෙන්වන්න. චක්‍රය මත අනෙක් ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයන් හි x අගයයන් ලබා ගන්න.

iii. $\frac{d^2y}{dx^2}$ සොයා, $x = -3$ විට ලැබෙන හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ස්වභාවය නිර්ණය කරන්න.

iv. හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = \frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)}$ චක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

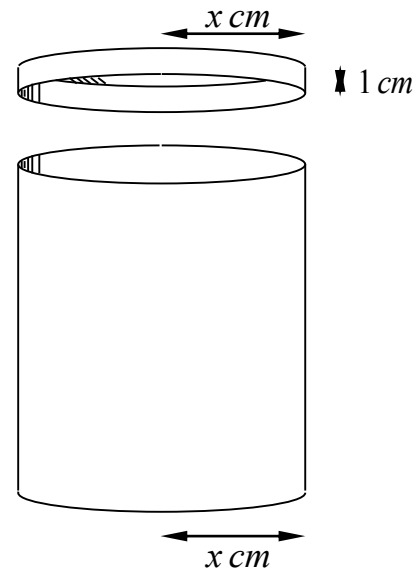
v. $\int \frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)} dx$ සොයා, ඒ නයිත්, චක්‍රයෙන් ද x අක්ෂයෙන් ද $x = 4$ හා $x = 12$ රේඛාවලින් වට වූ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $\ln 15$ ට සමාන බව පෙන්වන්න.

මෙම පෙදෙස x අක්ෂ වටා භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සොයන්න.

14. a. $x \neq 0, x \neq 2$ සඳහා $f(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-4)(x-2)}$ යයි දී ඇත්නම්, $f'(x) = \frac{6(x-3)}{(x-2)^2(x-4)^2}$ බව පෙන්වා
 $f'(x) = 0$ වන සේ වූ x හි අගයන් සොයන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

- c. වර්ගඵලය $80\pi \text{ cm}^2$ වන තුනී ලෝහ තහඩුවකින්
 අපතේ යාමකින් තොරව බිස්කට් ටින් එකක් සැදීමට
 අවශ්‍ය ව ඇත. එහි පියන ටින් එකෙහි අරය වන $x \text{ cm}$
 ම සහිත වන අතර, 1 cm ක් ටින් එක සමඟ සමපාත
 වන පරිදි පියන වැසිය හැකිය. රූපය බලන්න. ටින්
 එකෙහි පරිමාව $V \text{ cm}^3$ වේ. x යනු වෙනස් විය හැකි
 අගයකි.



- i. $V = \pi(40x - x^2 - x^3)$ බව පෙන්වන්න.
 ii. පරිමාව උපරිම වන පරිදි අරය සඳහා ගත හැකි
 අගය අවකලනය භාවිතයෙන් සොයන්න.

15. a. $f(x)$ යන්න හින්න භාග ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

$f(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}$ වේ. $\int f(x) dx$ අගයන්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $\int \frac{1}{(e^t - 1)^2} dt$
 අගයන්න.

- b. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x e^{-2x} dx$ සොයන්න.

- c. $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ බව සාධනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$ අනුකලය අගයන්න.

16. $PQRS$ යන සමාන්තරාස්‍රයේ PQ, QR, RS හා SP පාදවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $ax + by + c_1 = 0, lx + my + n_1 = 0, ax + by + c_2 = 0$ හා $lx + my + n_1 = 0$ වේ. එහි වර්ගඵලය $\frac{|c_1 - c_2||n_1 - n_2|}{|am - bl|}$ බව පෙන්වන්න.

$ABCD$ යන රෝම්බසයේ AB හා AC පාදවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - y + 1 = 0$ හා $2x - y - 1 = 0$ වේ. BC පාදය $(5, -6)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි නම්, BC, CD හා DA හි සමීකරණ සොයන්න.

ඉහත මුල් කොටස භාවිතයෙන් $ABCD$ රෝම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

17. a. $\theta = 36^\circ$ නම්, $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

එමගින් $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{8}$ බව ද පෙන්වන්න.

- b. සුපුරුදු අංකනයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒ නයින්, ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A}$ අභ්‍යන්තර කෝණයේ සමච්ඡේදකයට BC පාදය D හි දී හමු වේ නම්, සුපුරුදු අංකනයෙන් $AD = \frac{2bc}{(b+c)} \cos \frac{A}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$\hat{B}$ හි අභ්‍යන්තර කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ දිග ද ප්‍රකාශ කරන්න.

$\hat{A}$ සහ $\hat{B}$ හි අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක දිගින් සමාන නම්, $\sin B \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) = \sin A \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)$ බව සාධනය කරන්න.

- c. $f(x) = 2\cos^2 x + 4\sin x \cos x - 2\sin^2 x$ යන්න $f(x) = A \sin(2x + \alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි $A > 0$ හා α සුළු කෝණයකි. ඒනයින්, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් $-\pi \leq x \leq \pi$ අඳින්න.



පළමු වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2019

First Term Test - Grade 13 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය II

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
 A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
 වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
 ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

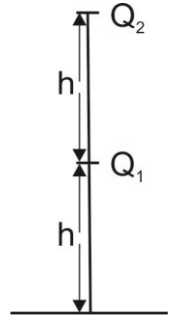
අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

(A කොටස)

- 01) පොළොව මට්ටමේ සිට සමාන උසැති මහල් දෙකකින් යුත් ගොඩනැගිල්ලක පළමු මහලේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට Q_1 අංශුවක් සිරුවෙන් නිදැල්ලේ වැටීමට ඉඩ සලස්වන අතර එම මොහොතේම දෙවන මහලේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ සිට සමාන Q_2 අංශුවක් u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට ප්‍රකේෂ කරනු ලබන්නේ අංශු දෙකම එකම මොහොතේ දී පොළොව මට්ටමේ දී හමුවන ලෙසය. (යාබද රූපය බලන්න) අංශු දෙක හමුවීමට ගතවන කාලය T නම් අංශු දෙකේ වලින සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාර එකම සටහනක අඳින්න. එනමින් $u = \frac{gT}{2}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණය යි.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 02) සුමට තිරස් මේසයක් මත ස්කන්ධය $2m$ වන A නම් සුමට ගෝලයක් u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් එම මේසය මතම නිශ්චලතාවයේ ඇති ස්කන්ධය m වන සමාන තරමේ B සුමට ගෝලයක් සමඟ සරලව ගැටේ. ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e ($0 < e < 1$) නම් ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු B අංශුවේ ප්‍රවේගය ලබා ගන්න. $e = \frac{1}{4}$ නම් B අංශුව මත ඇතිවන ආවේගී බලය $\frac{5mu}{6}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

03) O නම් ලක්ෂ්‍යයකින් තිරසර θ කෝණයක් ආනතව ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කළ වස්තුවක් O ලක්ෂ්‍යයේ සිට තිරසර α ආනත කෝණයකින් පිහිටි P නම් උපරිම ලක්ෂ්‍ය හරහා යයි. $\tan \theta = 2 \tan \alpha$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

04) ස්කන්ධය මෙ.ටො. M වන දුම්ඵලය එන්ජිමක් තිරස් මාර්ගයක $R \text{ N}$ නම් ප්‍රතිරෝධයකින් $H \text{ Kw}$ ජවයකින් යුතුව නියත $v \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයකින් ගමන් කරයි. $R = \frac{H \times 10^3}{v}$ බව පෙන්වන්න.
 මෙම දුම්ඵලය එන්ජිමේ තිරසර 30° කෝණයකින් ආනත මාර්ගයක ඉහළට ඉහත ප්‍රතිරෝධයම යටතේ නියත $v \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන්ම චලනය වීම සඳහා දුම්ඵලය එන්ජිමේ තිබිය යුතු නව ජවය $\left(\frac{Mgv}{2} + H\right) \text{ kw}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

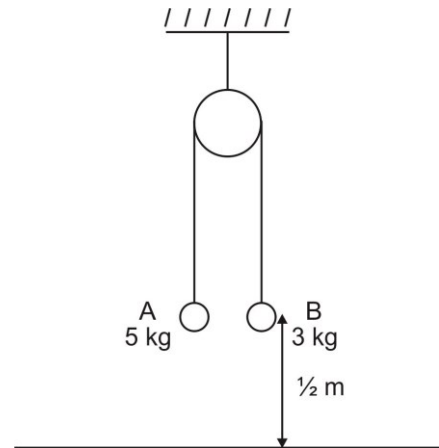
.....

.....

.....

.....

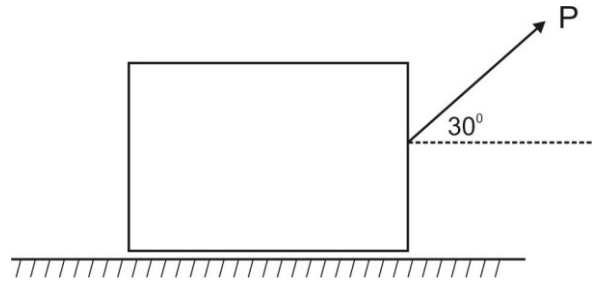
- 05) සිලිමක එල්ලා ඇති සුමට සැහැල්ලු අවල කප්පියක් මතින් පන්නා ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට සිලිවෙලින් ස්කන්ධයන් 5 kg හා 3 kg බැගින් වූ A හා B නම් අංශු දෙකක් අමුණා ආරම්භයේ දී තන්තු දෙකම සිරස්ව එල්ලෙමින් අංශු දෙකම එකම තිරස් මට්ටමේ වන පරිදි තැබූ විට ඒවා පොළොව මට්ටමේ සිට $\frac{1}{2}m$ උසින් පිහිටයි. (යාබද රූපය බලන්න.)
- පද්ධතිය සිරුවෙන් මුදාහල විට පද්ධතියේ පොදු ත්වරණය $\frac{g}{4}$ බව පෙන්වන්න. තව ද මෙම චලිතයේ දී A අංශුව පොළොව මත වැදීමට තරම් තන්තුව දිග නම් ද, B අංශුව කප්පියේ නොවැදීමේ දී B අංශුව පළමු වතාවට මොහොතකට පොළොව මට්ටමේ සිට $\frac{9}{8}m$ උසක් ඉහළ නඟින බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

[illegible]

- 06) O ලක්ෂ්‍ය අනුබද්ධයෙන් A හා B ඒකරේඛීය නොවන ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ. OA මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OA}$ හා දික්කළ OB මත D පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{OD} = 2 \overrightarrow{OB}$ වන පරිදි ද AB මත E පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ වන පරිදි ද වේ.

- i) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{CE}$ හා $\overrightarrow{ED}$ සොයන්න.
- ii) C, E හා D එක රේඛීය බව පෙන්වා $CE:ED$ අනුපාතය සොයන්න.

- 07) රළු තිරස් මේසයක් මත නිසලව ඇති බර w වූ ලී කුට්ටියක් මත තිරසර 30° කෝණයකින් ආනතව P ($< 2w$) බලයක් යොදනු ලැබේ. (යාබද රූපය බලන්න.) මේසය හා ලී කුට්ටිය අතර ස්ථිතික සංගුණකය μ නම් ලී කුට්ටිය චලනය නොවී සමතුලිතව තිබිය හැකි පරිදි යෙදිය හැකි P හි විශාලතම අගය $\frac{2\mu w}{\sqrt{3} + \mu}$ බව පෙන්වන්න.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 08) සුමට හා දැත්තක් සුමට බිත්තියකට $2\sqrt{2}a$ තිරස් දුරකින් පිහිටයි. බර w හා දිග $16a$ වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක් A කෙළවර බිත්තිය හා ස්පර්ශ වෙමින් දණ්ඩ මත ලක්ෂ්‍යයක් හා දැත්ත මත ස්පර්ශ වෙමින් බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි. දණ්ඩ තිරස සමඟ සාදන කෝණය සොයා, හා දැත්තෙන් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව $\sqrt{2}w$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

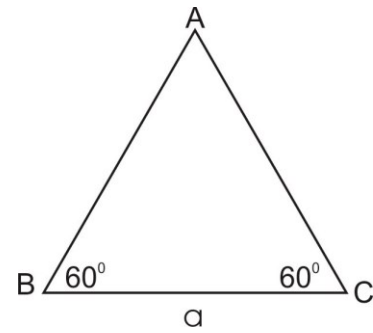
- 09) යාබද රූපයේ දැක්වෙන පාදයක දිග a වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක 3P, 4P හා 5P බල පිළිවෙලින් AB, BC හා CA දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි.

i) සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න.

ii) එම සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව දික්කරන ලද BC රේඛාව C සිට $\frac{3a}{2}$ දුරින් ක්‍රියා කරයි යැයි

උපකල්පනය කර පද්ධතිය යුග්මයකට උග්‍රණය

කිරීම සඳහා B හිදී තනි බලයක් යොදනු ලැබේ. එම යුග්මයේ ක්ෂුරණය සොයන්න.



- 10) සිරස් තලයක සවිකොට ඇති කේන්ද්‍රය O ද අරය a ද වන සුමට ගෝලයක ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ස්කන්ධය m වන P අංශුවක් තබා එය සිරුවෙන් වලිත වීමට සලස්වනු ලැබේ. අංශුව ගෝලය හැර යන අවස්ථාවේ දී OP උඩු සිරස සමඟ සාදන කෝණය ද හැර යන අවස්ථාවේ දී අංශුවේ ප්‍රවේගය ද සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය 13 - II (B කොටස)

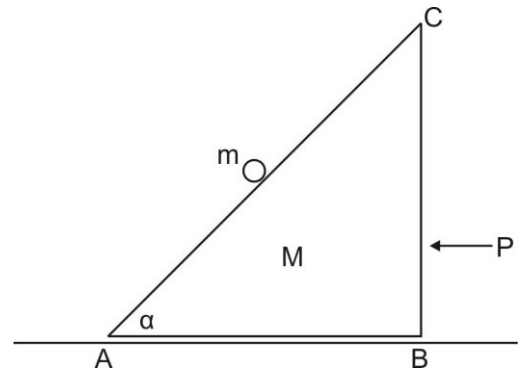
- 11) (a) සෘජු සමකල මාර්ගයක් දිගේ A නම් රථයක් u ඒකාකාර වේගයෙන් ගමන් කරමින් X නම් පොලිස් මුරපොළක් පසු කරයි. එම මොහොතේ සිට T නම් කාලයකට පසු B නම් පොලිස් රථයක් ඉහත A රථය ඇල්ලීම සඳහා X මුරපොළේ සිට නිශ්චලතාවයේ සිට f නම් ත්වරණයකින් සමාන්තර සමකල මාවතක A රථය ලුහු බිදීය. පොලිස් රථයේ ප්‍රවේගය $2u$ වූ පසු එය ඒකාකාර වේගයෙන්ම චලනය වේ. ඉහත චලිත දෙක සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාර එකම සටහනක අඳින්න. එනමින්, B රථය උපරිම ප්‍රවේගය ලබා ගන්නා අවස්ථාව වන විට A හා B රථ දෙක අතර පරතරය UT බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් B රථය විසින් A රථය පසුකරනු ලබන මොහොත දක්වා A රථය X මුරපොළ පසු කරනු ලබන අවස්ථාවේ සිට $2\left(T + \frac{u}{f}\right)$ කාලයක් ගත වන බව සාධනය කරන්න.

- (b) A නම් ගුවන් තොටුපළක සිට සමාන d දුරක් උතුරින් හා දකුණින් පිහිටි තවත් B හා C නම් ගුවන් තොටුපළ දෙකකි. සුලඟට සාපේක්ෂව සමාන u ප්‍රවේග සහිත සමාන ගුවන් යානා දෙකක් පිළිවෙලින් උතුරින් θ නැගෙනහිර දිශාවෙන් නියත v ප්‍රවේගයෙන් හමන සුළඟක් ඇති දිනක එකම මොහොතේ A සිට B හා C බලා පිටත් වේ. සාපේක්ෂ ප්‍රවේග මූලධර්ම භාවිතයෙන් ගුවන් යානා දෙකම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ දෙක එකම සටහනක අඳින්න. එනමින් ඉහත ගමන් දෙක සඳහා පිළිවෙලින් ගතවන කාලයන් t_1 හා t_2 නම්,
- $$t_1 - t_2 = \frac{2dv \cos \theta}{v^2 - u^2} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

ගුවන් යානා දෙකම B හා C සිට අප්‍රමාදව නැවත A කරා පැමිණේ නම් ඒවා එකම මොහොතක පැමිණෙන බව අපෝහනය කරන්න.

- 12) සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය M වන ABC හරස්කඩක් සහිත සුමට කුඤ්ඤයක තිරසර α කෝණයකින් ආනත මුහුනතක් මත ස්කන්ධය m වන අංශුවක් තබා පහත රූපයේ පෙනෙන පරිදි අංශුව සහිත මුහුණත ඉදිරියට චලනය වන පරිදි අනෙක් මුහුණත මත P තිරස් බලයක් යොදනු ලැබේ.



චලිත සමීකරණ පද්ධතිය සඳහා BA දිශාවටත් අංශුව සඳහා CA දිශාවටත් යෙදීමෙන්,

- (i) පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\frac{P - mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$ බව පෙන්වන්න.
- (ii) කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය $\frac{(M+m)g \sin \alpha - P \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}$ බව පෙන්වන්න.
- (iii) m අංශුව ආනත තලය දිගේ ඉහළට චලනය වීම හෝ තලය මත නිශ්චල වීම සඳහා $P \leq \frac{(M+m)g \sin \alpha}{g \cos \alpha}$ බව පෙන්වන්න.
- (iv) පද්ධතිය නිදැල්ලේ මුදාහලේ නම් පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය හා කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය සොයා පොළොවට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය,
- $$\frac{g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \{M^2 + m \sin^2 \alpha (m + 2M)\}^{\frac{1}{2}} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

- 13) (a) අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තාකාර සුමට පිල්ලක් සිරස් තලයක වන ලෙස සවිකොට ඇත. පිල්ලේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ තබා ඇති ස්කන්ධය m වන සුමට අංශුවක් මත තිරසර u ආරම්භක ප්‍රවේගයක් ලබා දීමෙන් අංශුව සිරස් වෘත්තාකාර මාර්ගයක් දිගේ චලනය වීමට ඉඩ හරිනු ලැබේ.

අංශුව සිය වෘත්තාකාර චලිතයේ O කේන්ද්‍රය හරහා යන යටි අත් සිරස සමඟ θ සුළු කෝණයක් තනනවිට අංශුවේ ප්‍රවේගය v යන්න $v^2 = u^2 + 2ag \cos \theta - 2ag$ යන්නෙන් ලැබෙන බවත් අංශුව මත පිල්ල මගින් ඇති කරනු ලබන ප්‍රතික්‍රියාව R යන්න $R = \frac{m}{a} (u^2 + 3ga \cos \theta - 2ga)$ යන්නෙන් ලැබෙන බවත් පෙන්වන්න.

අංශුව සිය වෘත්තාකාර චලිතයේ දී සිය පථය හැරයයි නම් $2ag < u^2 < 5ag$ බව පෙන්වන්න.

තවද අංශුව පූර්ණ වෘත්තාකාර පථයකම චලනය වේ නම් $u^2 > 5ag$ බව පෙන්වන්න.

- (b) යුධ නැවක් සෘජු මාර්ගයක ඒකාකාර u ප්‍රවේගයෙන් යාත්‍රා කරයි. නැවේ චලිත දිශාවටම එල්ල වන ලෙස තිරසර θ ආරෝහණ කෝණයක් ආනතව කෙටි තුවක්කුවක් සවි කොට ඇත. එක්තරා මොහොතක තුවක්කුවේ සිට තිරස්ව d දුරකින් උස h වන බලකොටුවක වැදීමට $\sqrt{3}u$ ප්‍රවේගයෙන් උණ්ඩයක් පිට කරයි. තුවක්කුව මුහුදු මට්ටමේ පිහිටා ඇතැයි උපකල්පනය කොට උණ්ඩය බල කොටුවේ වැදී නම්,

$$gd^2 + 2u^2 (1 + \sqrt{3} \cos \theta)^2 h - 2u^2 \sqrt{3d} \sin \theta (1 + \sqrt{3} \cos \theta) = 0 \quad \text{වන බව පෙන්වන්න.}$$

- 14) (a) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික දෙකකි. α හා β යනු අදිශ රාශි දෙකක් විට $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$ වීම සඳහා අවශ්‍යතාවය $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ වීම බව සාධනය කරන්න.

$OABC$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ වේ. M යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද N යනු AC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ. $OP = \lambda ON$ ද, $AP = \mu AM$ ද, ලෙස ගෙන (මෙහි λ හා μ යනු අදිශ දෙකකි.) λ හා μ හි අගයයන් සොයා $OP:PN$ හා $AP:PM$ අනුපාතයන් සොයන්න.

- (b) ඒකතල බල පද්ධතියක් (නිව්ටන් වලින් මනින ලද) බල තුනකින් සමන්විත වන අතර ඒවා ක්‍රියා කරනුයේ පහත දැක්වෙන නියමිත ලක්ෂ්‍ය වලදී ය.

ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$3\underline{i} + 2\underline{j}$	$4\underline{i} + 2\underline{j}$
B	$(-3\underline{i} + 0\underline{j})$	$-\underline{i} - \underline{j}$
C	$2\underline{i} - 3\underline{j}$	$-3\underline{i} - \underline{j}$

මෙහි $\underline{i}$ හා $\underline{j}$ මගින් පිළිවෙලින් OX හා OY සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කාටීසිය අක්ෂ දිගේ වන ඒකක දෛශිකයන් දැක්වෙන අතර දිග මනින ඒකකය මීටර වේ.

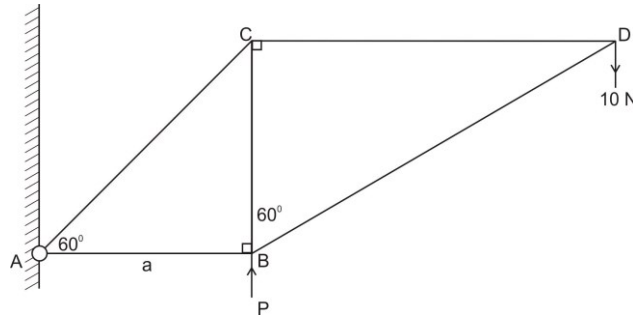
අදාළ යෙදුම් ලක්ෂ්‍යවල බන්ධාංක දක්වමින් මෙම බල සංරචක ආකාරයෙන් නිරූපණ සටහනක දක්වන්න.

පද්ධතිය බල යුග්මයකට පමණක් තුල්‍ය බව පෙන්වා පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ තැබීමට මූල ලක්ෂ්‍යයේ දී යොදනු ලබන $(\frac{5}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{5}{\sqrt{2}} \underline{j})$ බලයට අමතරව යෙදිය යුතු බලයන් එහි ක්‍රියාකාරී ලක්ෂ්‍යයන් සොයන්න.

- 15) (a) දිග $2a$ හා බර w වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර රළු තිරස් පොළොවක් මත ද B කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව ද බිත්තියට ලම්භ සිරස් තලයක පොළොවට $\tan^{-1} \frac{4}{3}$ කෝණයකින් ආනතව ඇත. දණ්ඩ හා පොළොව අතරද, දණ්ඩ හා බිත්තිය අතර ද සර්ඡණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ කි. දණ්ඩ බිත්තිය දෙසට ලිස්සා යාමට ආසන්න සීමාකාරී සමතුලිතතාවයට පැමිණෙන පරිදි $AC = \frac{a}{4}$ වන පරිදි දණ්ඩ මත වූ C ලක්ෂ්‍යයේ දී P තිරස් බලයක් බිත්තිය දෙසට යොදනු ලැබේ.

$$P = \frac{5W}{3} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

- (b) පහත රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි රාමු සැකිල්ල AB, BC, AC, CD හා BD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත.



$AB = a$ හා $\hat{CAB} = \hat{CBD} = 60^\circ$ බව දී ඇත. $10N$ ක් වූ භාරයක් D හි එල්ලා ඇති අතර A සන්ධිය සිරස් බිත්තියකට අසලි කර B හිදී යෙදූ සිරස් P බලයක් මගින් AB හා CD තිරස්ව ද BC සිරස්ව ද වන පරිදි රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තිබේ. P හි අගය සොයන්න. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යා බල සටහනක් ඇඳ එනයිත් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා මෙම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න නිර්ණය කරන්න.

- 16) (a) එක එකක දිග $2a$ හා බර w වන AB, BC, CD හා DA වන ඒකාකාර සුමට දඬු හතරක් A, B, C හා D හිදී සුමට ලෙස සන්ධි කර රොම්බසයක් සාදා ඇත. AB හා AD දඬු දෙක ඉහළින් පිහිටන සේ AB හා AD දඬු $2l$ තිරස් දුරකින් ඇත්ව එකම තිරස් මට්ටමක වූ සුමට නා දැති දෙකක් මත තිබෙන පරිදි C ට ඉහළින් A පිහිටන සේ C හිදී $2w$ බරක් එල්ලා රොම්බසය සමමිතික ලෙස සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටා ඇත. $\hat{BAD} = 120^\circ$ කි.

(i) නා දැත්තක් මගින් දණ්ඩක් මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

(ii) B සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාව $\frac{\sqrt{43} w}{2}$ බව පෙන්වා එම ප්‍රතික්‍රියාව තිරසර දරන ආනතිය සොයන්න.

(iii) $l = \sqrt{3} a$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

- (b) බර W හා දිග $2a$ වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක් A කෙළවර සිරස් බිත්තියකට නිදහසේ අසලි කර B කෙළවර $2a$ දිගැති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් බිත්තිය මත වූ C ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. C ලක්ෂ්‍ය ඇත්තේ A ලක්ෂ්‍යයට $d (< 4a)$ දුරක් සිරස්ව ඉහළින් වන සේය. දණ්ඩ බිත්තියට ලම්භ සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි.

(i) තන්තුවේ ආතතිය $\frac{Wa}{d}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) A අසලිවේ ප්‍රතික්‍රියාව $\left(\frac{2a^2 + d^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{w}{d}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) A අසලිවේ ප්‍රතික්‍රියාව තිරසර දරණ ආනතිය සොයන්න.

- 17) (a) ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 200 ක් වූ දුම්රිය එන්ජිමක් $30000N$ ක නියත ප්‍රතිරෝධයකට එරෙහිව සමතල දුම්රිය මාර්ගයක $72 kmh^{-1}$ ක ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ගමන් කරයි. එම දුම්රිය එන්ජිමෙහි ජවය කිලෝ වොට්වලින් ගණනය කරන්න.

ඉන්පසු එම දුම්රිය එන්ජිම, ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 100 ක් වූ දුම්රිය මැදිරියක් සබඳුම් දණ්ඩක් මගින් සම්බන්ධ කරගෙන එම සමතල මාර්ගයේම ඇදගෙන යයි. එන්ජිමේ ප්‍රතිරෝධය ඉහත අගයේම ද මැදිරියේ ප්‍රතිරෝධය $10000N$ ක් ද වේ. දුම්රියේ එන්ජිම ඉහත ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරයි නම්, දුම්රියේ වේගය $36 kmh^{-1}$ ක් විට දුම්රියේ ත්වරණය ද සබඳුම් දණ්ඩේ ආතතිය ද සොයන්න.

අනතුරුව එම මැදිරිය සහිත දුම්රිය $\sin^{-1}\left(\frac{1}{30}\right)$ ආතතියක් සහිත කන්දක ඉහළට ඉහත ප්‍රතිරෝධ බල එලෙසම පවතිමින් ඉහත ජවයෙන්ම $\frac{1}{10} ms^{-2}$ ත්වරණයෙන් ගමන් කරයි නම්, එවිට දුම්රියේ ප්‍රවේගය $\frac{15}{4} ms^{-1}$ බව පෙන්වන්න. (ගුරුත්වජ ත්වරණය $10 ms^{-2}$ බව සලකන්න.)

- (b) සමාන අරයන් සහිත A හා B සුමට ගෝල දෙකක් සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම දිශාවට චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටෙයි. A හි ස්කන්ධය $3m$ ද, B හි ස්කන්ධය $2m$ ද වේ. ඒවායේ ප්‍රවේග පිළිවෙලින් $2u$ හා u වේ. ගෝල අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වෙයි. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු ගෝල චල ප්‍රවේග සොයන්න. ගැටුමෙහි ආවේගය $J = \frac{6mu(1+e)}{5}$ බව පෙන්වන්න.

ගැටුම නිසා සිදුවන වාලක ශක්ති හානිය $\frac{J}{2} (1 - e)u$ බව පෙන්වන්න.

First Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part A - Grade 13

(01) $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + k^2)(Ax + B)$ (5)

$x^3 \rightsquigarrow a = A$ — (1)

$x^2 \rightsquigarrow b = B$ — (2)

$x \rightsquigarrow c = k^2 A$ — (3)

constant $\rightsquigarrow d = k^2 B$ — (4)

$\frac{(1)}{(2)} \quad \frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ — (5)

$\frac{(3)}{(4)} \quad \frac{c}{d} = \frac{A}{B}$ — (6) (5)

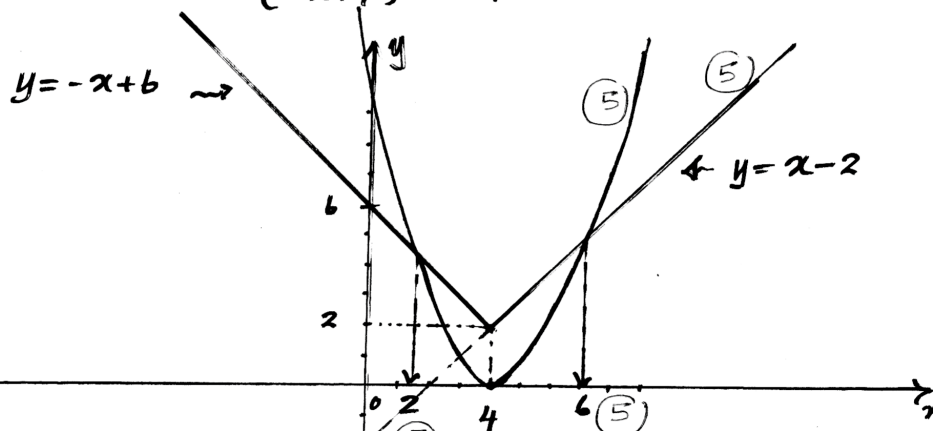
(5) = (6) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (5)

$a:b = c:d$

25

(02)

$|x-4| = \begin{cases} x-4 & ; x \geq 4 \\ -x+4 & ; x < 4 \end{cases}$



$-x+4 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x-5)(x-2) = 0$

$x=5$ $x=2$

$x-2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-6)(x-3) = 0$

$x=6$ $x=3$

25

$x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$ (5)

$$(03) (a-2)x^2 - 3(a+2)x + 6a = 0.$$

For real and distinct roots.

$$a \neq 2 \text{ and } \Delta > 0 \quad (5)$$

$$\{-3(a+2)\}^2 - 4(a-2)6a > 0 \quad (5)$$

$$9(a^2 + 4a + 4) - 24a(a-2) > 0$$

$$3(a^2 + 4a + 4) - 8a(a-2) > 0$$

$$3a^2 + 12a + 12 - 8a^2 + 16a > 0$$

$$-5a^2 + 28a + 12 > 0$$

$$5a^2 - 28a - 12 < 0$$

$$(a-6)(5a+2) < 0 \quad (5)$$

	$(-\infty, -2/5)$	$(-2/5, 6)$	$(6, \infty)$
$(a-6)(5a+2)$	+	-	+

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{2}{5}, 2\right) \cup (2, 6) \quad (5)$$

25

$$(04) \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin \theta}{(\pi/2 - \theta) \cos \theta}.$$

$$\text{let } \theta - \pi/2 = x$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/2 + x.$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin \theta}{(\pi/2 - \theta) \cos \theta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\pi/2 + x)}{-x \cos(\pi/2 + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \quad (5)}{x \sin x}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \quad (5)}{x \sin x (1 + \cos x)}$$

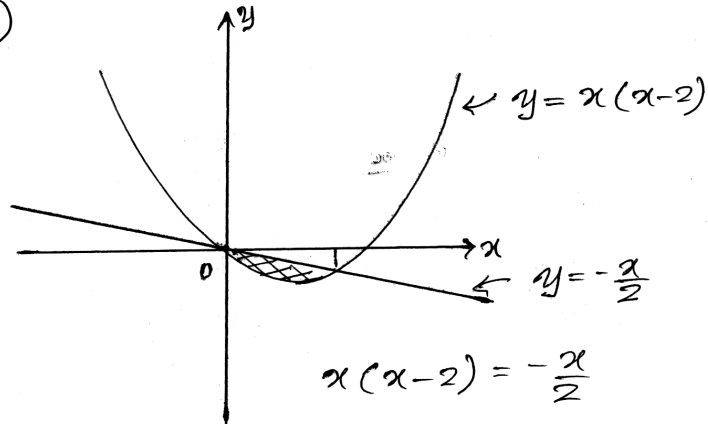
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \quad (5)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \text{ (5)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ (5)}$$

25

(05)



$$x(x-2) = -\frac{x}{2}$$

$$2x^2 - 4x + x = 0$$

$$x(2x-3) = 0$$

$$x=0 \text{ or } x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Area} = \int_0^{3/2} -x(x-2) dx - \int_0^{3/2} -\frac{x}{2} dx \text{ (10)}$$

$$= \left\{ -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right\}_0^{3/2} + \left\{ \frac{x^2}{4} \right\}_0^{3/2} \text{ (5)}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{3} \times \frac{27}{8} + \frac{9}{4} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{9}{4} \right\} \text{ (5)}$$

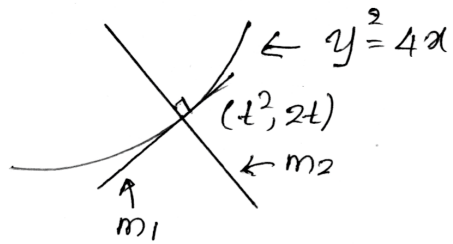
$$= \left\{ -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} \right\} + \frac{9}{16}$$

$$= 9 \left\{ \frac{1}{8} \right\} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{27}{16} \text{ (5)}$$

25

(06)



$$y^2 = 4x$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{(t^2, 2t)} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t} \quad (5)$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = -t \quad (5)$$

$\therefore$ Eqⁿ of the normal

$$\frac{y - 2t}{x - t^2} = -t \quad (5)$$

$$y - 2t = -tx + t^3$$

$$y + tx = 2t + t^3$$

Since $(T^2, 2T)$ is on the normal

$$2T + tT^2 = 2t + t^3 \quad (5)$$

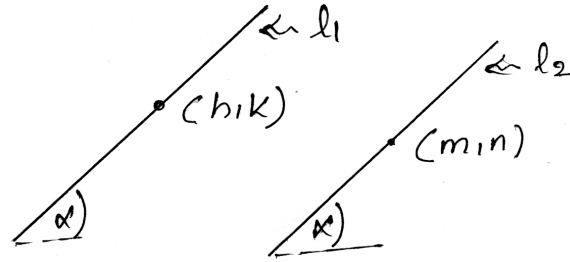
$$t^3 + 2t - tT^2 - 2T = 0$$

$$(t - T)(t^2 + tT + 2) = 0$$

$$t - T \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t^2 + tT + 2 = 0}} \quad (5)$$

(07)



Eqⁿ of the straight line l_1

$$\frac{y-k}{x-h} = \tan \alpha$$

$$y \cos \alpha - k \cos \alpha = x \sin \alpha - h \sin \alpha$$

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha + h \sin \alpha - k \cos \alpha = 0 \quad (10)$$

Similarly

Eqⁿ of the straight line l_2

$$y \cos \alpha - x \sin \alpha + m \sin \alpha - n \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$\therefore$ Perpendicular distance =

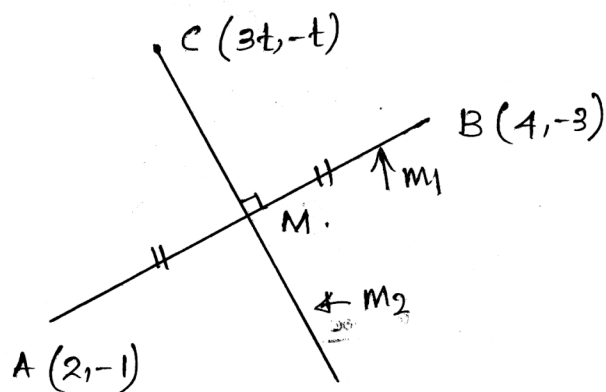
$$= \left| \frac{h \sin \alpha - k \cos \alpha - m \sin \alpha + n \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \right| \quad (5)$$

$$= \left| (h-m) \sin \alpha + (n-k) \cos \alpha \right|$$

$$= \underline{\underline{|(h-m) \sin \alpha - (k-n) \cos \alpha|}} \quad (5)$$

25

(68)



$$m_1 = \frac{-1+3}{2-4}$$

$$= \frac{2}{-2}$$

$$= -1$$

$$M \equiv \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-3-1}{2} \right)$$

$$m_1 m_2 = -1$$

$$(-1) m_2 = -1$$

$$\equiv (3, -2) \text{ (5)}$$

$$\underline{m_2 = 1}$$

$\therefore$ Eqⁿ of the perpendicular bisector:

$$\frac{y+2}{x-3} = 1$$

$$y+2 = x-3$$

$$y-x+5=0 \text{ (5)}$$

Since $C(3t, -t)$ is on the line $y-x+5=0$

$$-t - 3t + 5 = 0$$

$$4t = 5$$

$$\underline{t = \frac{5}{4} \text{ (5)}} \Rightarrow C \equiv \left(\frac{15}{4}, -\frac{5}{4} \right) \text{ (5)}$$

Let $D \equiv (\bar{x}, \bar{y})$

$$3 = \frac{\bar{x} + \frac{15}{4}}{2}$$

$$-2 = \frac{\bar{y} - \frac{5}{4}}{2}$$

$$6 = \bar{x} + \frac{15}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{5}{4} - 4$$

$$\bar{x} = \frac{24-15}{4} = \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-11}{4}$$

$$\underline{D \equiv \left(\frac{9}{4}, -\frac{11}{4} \right) \text{ (5)}}$$

$$(09) \quad 2 \underbrace{\tan^{-1}(x-1)}_{\alpha} + \underbrace{\tan^{-1}(x)}_{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{let } \alpha = \tan^{-1}(x-1) \quad \text{and} \quad \beta = \tan^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = x-1 \quad \text{and} \quad \Rightarrow \tan \beta = x$$

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (5)$$

$$\tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (5)$$

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\tan \beta} \quad (5)$$

$$\frac{2(x-1)}{1 - (x-1)^2} = \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$2x(x-1) = 1 - x^2 + 2x - 1$$

$$2x^2 - 2x = -x^2 + 2x$$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x(3x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{4}{3}$$

#

$$\therefore x = \frac{4}{3} \quad (5)$$

$$(10) \cos 2x + 3 \sin x = 2$$

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2$$

(5)

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - 2\sin x - \sin x + 1 = 0$$

$$2\sin x (\sin x - 1) - 1 (\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1 \quad \text{or} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \quad x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}; n \in \mathbb{Z}$$

(5)

(5)

$$\text{When } n=0$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{When } n=0$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{6}}$$

$$\text{When } n=1$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{When } n=1$$

$$\underline{x = \frac{5\pi}{6}}$$

(5)

25

First Term Test - 2019

Combined Mathematics I- Part B - Grade 13

$$(11) \text{ (a)} \quad ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ (5)} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ (5)}$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \text{ (5)} \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \text{ (5)} - 2\alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \text{ (5)} \\ &= \frac{b^2}{a^2} - \frac{4ac}{a^2} \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \text{ (5)} \end{aligned}$$

$$(c-b+a)x^2 + (b-2a)x + a = 0$$

$$\text{roots are } \frac{(2a-b) \pm \sqrt{b^2 - 4ab + 4a^2 - (4ac - 4ab + 4a^2)}}{2(c-b-a)}$$

$$= \frac{(2a-b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(c-b-a)} \text{ (10)}$$

$$= \frac{(2 - b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4c/a}}{2(c/a - b/a - 1)} \text{ (5)}$$

$$= \frac{2 + \alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha - \beta)^2}}{2(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)} \text{ (5)}$$

(5)

$$\therefore \text{ roots are } \frac{1+\alpha}{(\alpha+1)(\beta+1)} \text{ and } \frac{1+\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} //$$

(b)(i) Let the roots of $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ are α, β . Also let $bx^2 + b^2x + 1 = 0$'s roots are α, θ . (5)

$$\therefore ax^2 + a^2x + 1 = 0 \text{ --- (1) and (5)}$$

$$bx^2 + b^2x + 1 = 0 \text{ --- (2)}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow (a-b)x^2 + (a^2-b^2)x = 0$$

$$\therefore (a-b)x(x+a+b) = 0$$

$$\therefore x = -a - b$$

$$\text{Also } \alpha + \beta = -a \Rightarrow \beta = b \text{ and } \theta = a. \quad (5)$$

$$\alpha + \theta = -b \quad (5)$$

$\therefore$ the quadratic equation whose roots are β, θ , is given by

$$x^2 - (\beta + \theta)x + \beta\theta = 0 \quad (5)$$

$$\text{i.e. } x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

But, since $\beta = b$ is a root of (1)

$$ab^2 + a^2b + 1 = 0$$

$$\text{i.e. } (a+b) = -\frac{1}{ab} \quad (10)$$

$$\therefore x^2 + \frac{1}{ab}x + ab = 0$$

$$\text{i.e. } abx^2 + x + a^2b^2 = 0 \quad (5)$$

40

$$(ii) \text{ Let } y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1}$$

$$\text{i.e. } x^2 + (2-2y)x + y-1 = 0 \quad (5)$$

for real values of

$$(2-2y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y-1) \geq 0 \quad (5)$$

$$\text{i.e. } 4(y-1)^2 - 4(y-1) \geq 0$$

$$\text{i.e. } 4(y-1)(y-1-1) \geq 0$$

$$\therefore 4(y-1)(y-2) \geq 0 \quad (5)$$

$\therefore$ This inequality and equation are satisfied when $y \geq 2$ or $y \leq 1$.
(10) 25

$$(c). f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 2$$

$$f(1) = a + b + 3 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \quad (5)$$

$$f(-1) = -a + b + 1 = -6 \Rightarrow -a + b = -7 \quad (5)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 2b = -10 \Rightarrow b = -5$$

$$\therefore \textcircled{1} \Rightarrow a = -3 - (-5) = 2$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \quad (5)$$

$$f(x) = (x-1)(2x^2 + Ax - 2) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= 2x^3 + Ax^2 - 2x - 2x^2 - Ax + 2 \\ \Rightarrow &= 2x^3 + (A-2)x^2 - (A+2)x + 2 \\ &= 2x^3 - 5x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

Comparing coefficients.

$$\underline{x^2} \quad A-2 = -5 \Rightarrow A = -3 \quad (5)$$

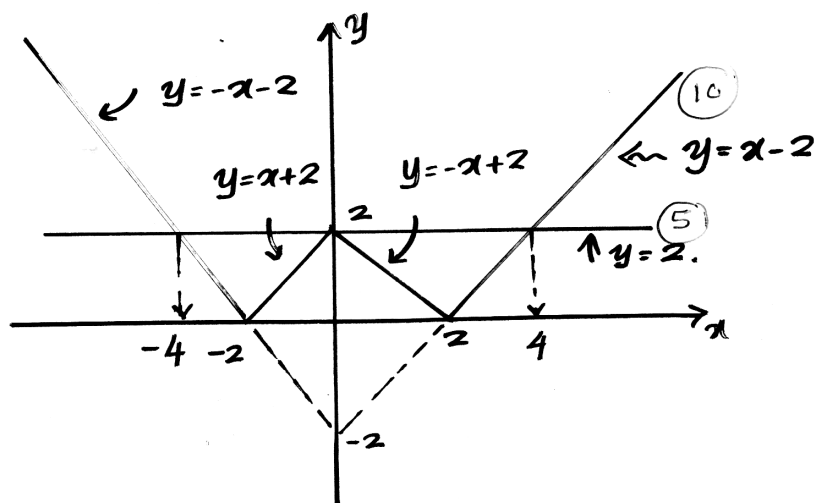
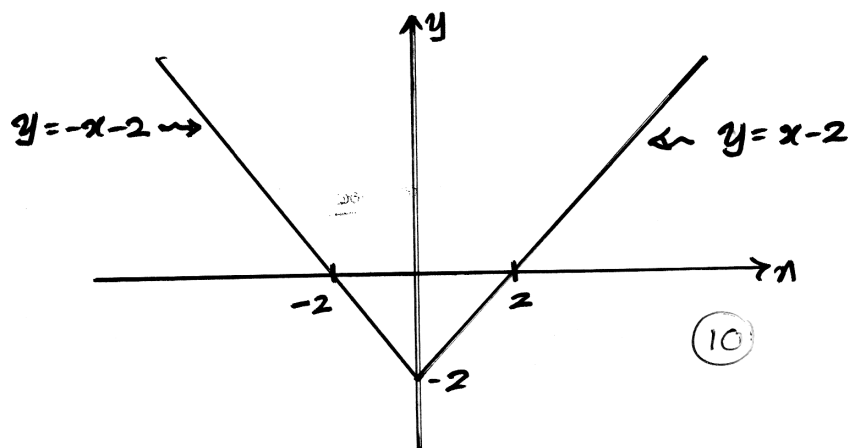
$\therefore f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 2)$

$$\therefore f(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 2) \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{(x-1)(x-2)(2x+1)}} \quad (10)$$

40

(12) a. $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$



$$\frac{|x-2|}{2} > 1$$

$$|x-2| > 2$$

$$\underline{x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)} \quad (5)$$

30

$$f(x) = \underline{(x^2+2)(x^2-x+1)} \quad (5)$$

$$f(x) = 0$$

$$(x^2+2)(x^2-x+1) = 0$$

$$x^2+2 \neq 0 \quad x^2-x+1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1$$

$$= -3 \quad (5)$$

$$\Delta < 0$$

$\therefore$ The eqⁿ has not real roots.



$$(c) \quad \frac{4x^2-x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad (10)$$

$$4x^2-x+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

$$x^2 \rightsquigarrow 4 = A + B \quad (1)$$

$$x \rightsquigarrow -1 = 2A + B + C \quad (2)$$

$$\text{constant} \rightsquigarrow \underline{2 = A} \quad (5)$$

$$(1) \Rightarrow \underline{B = 2} \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow -1 = 4 + 2 + C$$

$$\underline{C = -7} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{\frac{4x^2-x+2}{x(x+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{7}{(x+1)^2}}}$$



$$(b) f(x) = (x^2+2)(Ax^2+Bx+C)$$

$$= (x+1)^2(x-2)(Mx+N) + bx^2-3x \quad (15)$$

$$\begin{aligned} (x^2+2)(Ax^2+Bx+C) &\equiv (x+1)^2(x-2)(Mx+N) + bx^2-3x \\ &\equiv (x^2+2x+1)(x-2)(Mx+N) + bx^2-3x \\ &\equiv (x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)(Mx+N) \\ &\quad + bx^2-3x \\ &\equiv (x^3-3x-2)(Mx+N) + bx^2-3x \end{aligned}$$

$$x^4 \leadsto A = M \quad (1)$$

$$x^3 \leadsto B = N \quad (2)$$

$$x^2 \leadsto C + 2A = -3M + 6$$

$$C + 2A = -3A + 6$$

$$C + 5A = 6 \quad (3)$$

$$x \leadsto 2B = -3N - 2M - 3$$

$$= -3B - 2A - 3$$

$$5B + 2A = -3 \quad (4)$$

$$\text{constant} \leadsto 2C = -2N$$

$$C = -N \quad (15)$$

$$C + B = 0 \quad (5)$$

$$(3) \text{ and } (5) \Rightarrow -B + 5A = 6 \quad (A)$$

$$5B + 2A = -3 \quad (4)$$

$$(A) \times 5 + (4) \quad 27A = 30 - 3$$

$$\underline{A = 1} \quad (5)$$

$$(4) \quad 5B + 2 = -3$$

$$\underline{B = -1} \quad (5)$$

$$(5) \Rightarrow \underline{C = 1} \quad (5)$$

$$d) \log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

$$\text{Let } \log_a c = x, \log_b c = y \text{ and } \log_b a = z$$

$$\Rightarrow c = a^x - (1) \quad \Rightarrow b^y = c - (2) \quad \Rightarrow b^z = a - (3)$$

$$(1) = (2) \quad a^x = b^y$$

$\downarrow$ from (3)

$$(b^z)^x = b^y$$

$$b^{xz} = b^y$$

$$xz = y$$

$$x = \frac{y}{z}$$

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \log_a c &= \frac{\log_c c}{\log_c a} \quad (5) \\ &= \frac{1}{\log_c a} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x$$

$$= \frac{1}{\log_a a \cdot \log_a b} + \frac{1}{\log_a b \cdot \log_a c} + \frac{1}{\log_a c \cdot \log_a a}$$

$$= \frac{\log_a c + \log_a a + \log_a b}{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c}$$

$$= \frac{\log_a abc}{\log_a a \cdot \log_a b \cdot \log_a c} = \frac{\frac{1}{\log_{abc} a}}{\frac{1}{\log_a a} \cdot \frac{1}{\log_b a} \cdot \frac{1}{\log_c a}} = \frac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} a} \quad (20)$$

$$(13). \frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$3x+4 = A(x-2) + B(2x+1)$$

$$x \rightsquigarrow 3 = A + 2B \rightsquigarrow (1)$$

$$\text{Constant} \rightsquigarrow 4 = -2A + B \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \times 2 + (2); 10 = 5B$$

$$\underline{\underline{B=2}}$$

$$(1) \Rightarrow 3 = A + 4$$

$$\underline{\underline{A=-1}}$$

$$\frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2x+1} \quad (5)$$

$$\frac{(3x+4)^2}{(2x+1)^2(x-2)^2} = \left\{ \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2x+1} \right\}^2$$

$$= \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)(2x+1)} + \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{(x-2)^2} - \frac{4}{5} \left\{ \frac{1}{x-2} - \frac{2}{2x+1} \right\} + \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{8}{5(2x+1)} - \frac{4}{5(x-2)} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2}}} \quad (10)$$

15

$$ii) \quad y = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times (-1)(x-2)^{-2} - (-1)(2x+1)^{-2} \times 2$$

$$= \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{2}{(x-2)^2} \quad (5)$$

For turning point; $\frac{dy}{dx} = 0$ (6)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2(x-2)^2 - 2(2x+1)^2}{(2x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{2\{x^2 - 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1\}}{(2x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{-2\{3x^2 + 8x + 3\}}{(2x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{-2\{(3x+1)(x+3)\}}{(2x+1)^2(x-2)^2} \\ &= \frac{-2(3x+1)(x+3)}{(2x+1)^2(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{When } \underline{\underline{x = \frac{1}{3}}} \text{ and } \underline{\underline{x = -3}} \quad (5)$$



$$(III) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4(2x+1)^{-3} \times 2 - 2 \times (-2)(x-2)^{-3}$$

$$= \frac{-8}{(2x+1)^3} + \frac{4}{(x-2)^3} \quad (5)$$

When $x = -3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-8}{(2x+1)^3} + \frac{4}{(x-2)^3}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-3} = \frac{4}{(-3-2)^3} - \frac{8}{(-6+1)^3}$$

$$= \frac{8}{125} - \frac{4}{125}$$

$$= \frac{4}{125}$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-3} > 0 \quad (5)$$

Local minimum point

(5)

15

(iv) Vertical asymptote ; $x = -\frac{1}{2}$ and $x = 2$. (5)

Horizontal asymptote ;

$$x \xrightarrow{\lim} -\infty \quad y \xrightarrow{\lim} 0 \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{\lim} +\infty \quad y \xrightarrow{\lim} 0$$

	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$	$x = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 2$	$2 < x < \infty$
Sign of $f'(x)$	-	0	+	+	0	-	-

When $x = -3$

$$y = -\frac{1}{5}$$

When $x = \frac{1}{3}$ (25)

$$y = -\frac{9}{5}$$

There are two turning points

$(-3, -\frac{1}{5})$ - Local min.

$(\frac{1}{3}, -\frac{9}{5})$ - Local max (5)

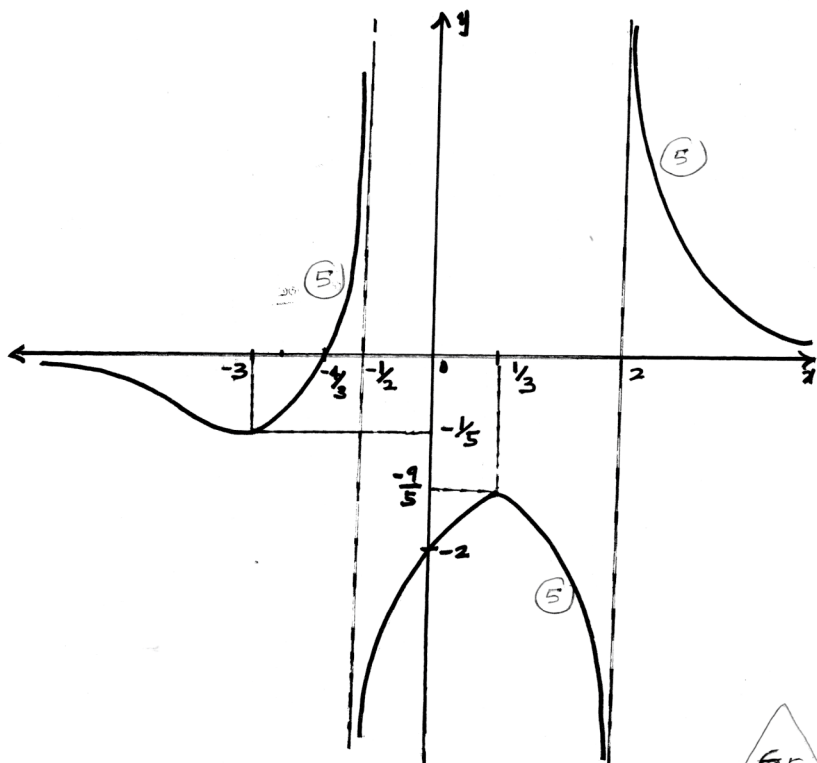
$$x \rightarrow -\frac{1}{2}^- \quad y \rightarrow \infty$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{2}^+ \quad y \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow 2^- \quad y \rightarrow -\infty \quad (5)$$

$$x \rightarrow 2^+ \quad y \rightarrow +\infty$$

$$\text{When } x=0 \quad y = \frac{4}{1x(-2)} = -2 \rightarrow (0, -2) (5)$$



65

$$v. \text{ Area} = \int_4^{12} \frac{3x+4}{(2x+1)(x-2)} dx \quad (5)$$

$$= \int_4^{12} \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2x+1} dx$$

$$= 2 \int_4^{12} \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{2} \int_4^{12} \frac{2}{2x+1} dx \quad (5)$$

$$= 2 \left\{ \ln|x-2| \right\}_4^{12} - \frac{1}{2} \left\{ \ln|2x+1| \right\}_4^{12} \quad (5)$$

$$= 2 \ln \left| \frac{10}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{25}{9} \right|$$

$$= 2 \ln|5| - \ln \left| \frac{5}{3} \right|$$

$$= \ln|25 \times \frac{3}{5}| = \ln|15| \quad (5)$$

20

$$\text{Volume} = \int_4^{12} \pi \cdot \frac{(3x+4)^2}{(2x+1)^2(x-2)^2} dx \quad (5)$$

$$= \pi \int_4^{12} \frac{8}{5(2x+1)} - \frac{4}{5(x-2)} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} \int_4^{12} \frac{2}{2x+1} dx - \frac{4}{5} \int_4^{12} \frac{1}{x-2} dx + 4 \int_4^{12} (x-2)^{-2} dx \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_4^{12} (2x+1)^{-2} \times 2 dx \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} (\ln|2x+1|)_4^{12} - \frac{4}{5} (\ln|x-2|)_4^{12} \right.$$

$$\left. + 4 \left[\frac{-1}{x-2} \right]_4^{12} + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2x+1} \right]_4^{12} \right\} \quad (5)$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} \ln \left| \frac{25}{9} \right| - \frac{4}{5} \ln \left| \frac{10}{6} \right| + 4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right] \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} \ln \left| \frac{25}{9} \times \frac{6}{10} \right| + 4 \left[\frac{5-1}{10} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{25-9}{225} \right] \right\} \quad (5)$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} \ln \left| \frac{5}{3} \right| + 4 \times \frac{4}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{225} \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5} \ln \left| \frac{5}{3} \right| + \frac{16}{10} + \frac{8}{225} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{5} \left\{ 4 \ln \left| \frac{5}{3} \right| + 8 + \frac{8}{45} \right\}$$

$$= \frac{4\pi}{5} \left\{ \ln \left| \frac{5}{3} \right| + 2 + \frac{2}{45} \right\}$$

$$= \frac{4\pi}{5} \left\{ \frac{92}{5} + \ln \left(\frac{5}{3} \right) \right\} \quad (5)$$

25

$$(14) (a) \quad f(x) = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-4)(x-2)} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 6x + 8}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 6x + 8)(2x - 6) - (x^2 - 6x + 5)(2x - 6)}{(x-4)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(2x-6)(3)}{(x-4)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{6(x-3)}{(x-4)^2(x-2)^2} \quad \triangle 25$$

For turning points

$$f'(x) = 0 \quad (5) \quad x = 3$$

$$f(x) = \frac{1 - 6/x + 5/x^2}{1 - 6/x + 8/x^2}$$

for $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow 1$
 $x \rightarrow +\infty$; $f(x) \rightarrow 1$ $\Rightarrow y=1$ is a horizontal asymptote. (5)

$x=4$ and $x=2$ are vertical asymptotes. (10)

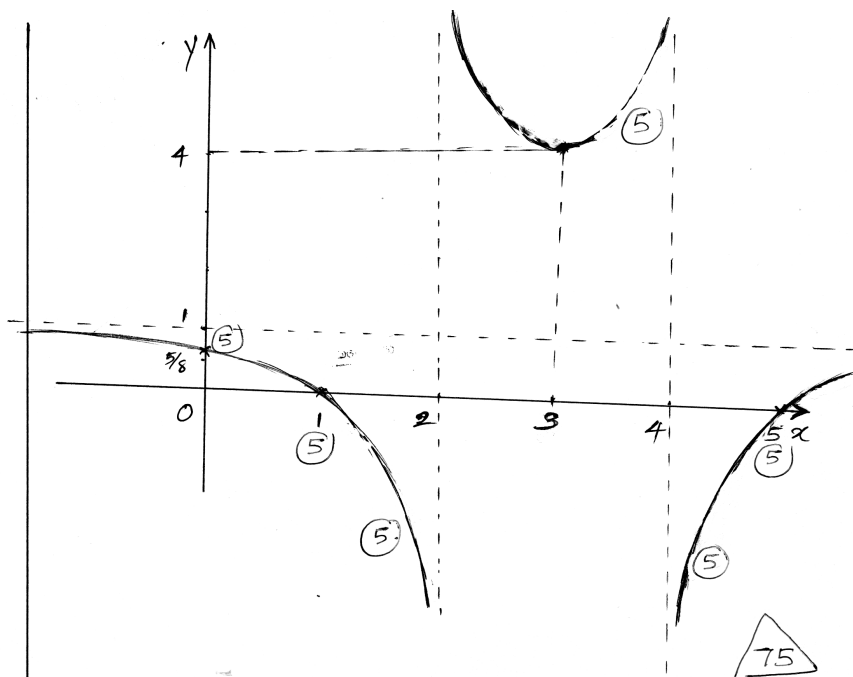
x	$-\infty < x < 2$	$2 < x \leq 3$	$3 < x < 4$	$4 < x < \infty$
sign of $f'(x)$	(-) ↘	(-) ↘	(+) ↗	(+) ↗

When $x=3$, $f(x) = 4$ (20)

When $x=1$, $x=5$, $f(x) = 0$

When $x=0$ $f(x) = 5/8$

$(3, 4)$ is a local minimum point. (5)



(b) (i) $V = \pi x^2 h$; h is the height of the

But $A = 80\pi = 2\pi x^2 + (h+1)2\pi x$

$$\Rightarrow \frac{40 - x^2}{x} - 1 = h$$

$$\Rightarrow h = \frac{40 - x^2 - x}{x} \quad (10)$$

$$\therefore V = \pi x^2 \frac{(40 - x^2 - x)}{x}$$

$$= \pi (40x - x^2 - x^3) \quad (10)$$

$$(ii) \frac{dV}{dx} = \pi (40 - 2x - 3x^2) \quad (5)$$

$$= \pi (10 - 3x)(4 + x) \quad (5)$$

When $\frac{dV}{dx} = 0$; $x = 10/3$ or $x = -4$ ~~✗~~

$$\therefore x = 10/3 \quad (5)$$

x	$0 < x < 10/3$	$x = 10/3$	$10/3 < x$
$\frac{dV}{dx}$	+	0	-
			(10)

$\therefore$ When $x = 10/3$ cm, V is maximum. (5)

50

$$(15) \quad a. \quad \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad (10)$$

$$1 \equiv A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$x^2 \rightsquigarrow A+B=0 \quad (1)$$

$$x \rightsquigarrow 0 = -2A - B + C \quad (2)$$

$$\text{constant} \rightsquigarrow \underline{1 = A} \quad (5)$$

$$\underline{B = -1} \quad (5) \quad \underline{C = 1} \quad (5)$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad \triangle 25$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int (x-1)^{-2} dx \quad (10) \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \quad (20) \\ &\underline{\underline{\hspace{10cm}}} \quad \triangle 30 \end{aligned}$$

$$\text{Let } x = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\int \frac{1}{e^t(e^t-1)^2} \times e^t dt = \ln|e^t| - \ln|e^t-1| - \frac{1}{e^t-1} + C$$

$$\underline{\underline{\int \frac{1}{(e^t-1)^2} dt = t - \ln|e^t-1| - \frac{1}{e^t-1} + C}} \quad \triangle 10$$

$$\begin{aligned}
 (b) \int x e^{-2x} dx &= \int x \frac{d}{dx} \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) dx \\
 &= -\frac{x e^{-2x}}{2} + \int \frac{1}{2} e^{-2x} \times 1 dx \\
 &= -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4} \int e^{-2x} \times (-2) dx \\
 &= \underline{\underline{-\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C}}
 \end{aligned}$$

25

$$(c) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

10

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx \rightarrow (1)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(\frac{\pi}{2}-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x) + \cos(\frac{\pi}{2}-x)} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\cos x + \sin x} dx \rightarrow (2)$$

$$\begin{aligned}
 (1) + (2) \quad 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)} dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} 1 - \sin x \cos x dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} 1 dx - \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx
 \end{aligned}$$

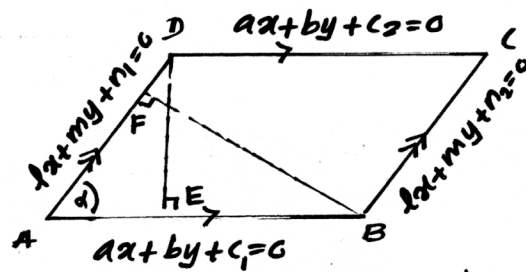
$$= (x)_0^{\pi/2} - \left\{ \frac{\sin^2 x}{2} \right\}_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - \left\{ \frac{\sin^2 \pi/2}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - 1}}$$

50

(16)



$$\text{Area} = |AB \times DE|$$

$$= \left| \frac{DE \times BF}{\sin \alpha} \right| \rightarrow (A)$$

$$\sin \alpha = \frac{BF}{AB}$$

$$AB = \frac{BF}{\sin \alpha}$$

$$BF = \left| \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{l^2 + m^2}} \right| \rightarrow (1) \quad DE = \left| \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \rightarrow (2)$$

$$AB \rightarrow m_1$$

$$ax + by + c_1 = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c_1}{b}$$

$$m_1 = -\frac{a}{b}$$

$$AD \rightarrow m_2$$

$$lx + my + n_1 = 0$$

$$y = -\frac{l}{m}x - \frac{n_1}{m}$$

$$m_2 = -\frac{l}{m}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{a}{b} + \frac{l}{m}}{1 + \frac{a}{b} \times \frac{l}{m}} \right|$$

$$= \left| \frac{bl - ma}{bm + al} \right|$$

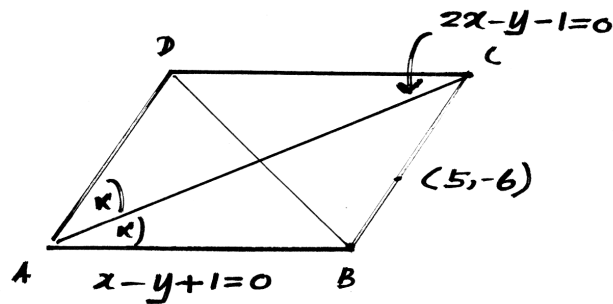
$$= \sqrt{(bl - ma)^2 + (bm + al)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(m^2 + l^2)}$$

$$\sin \alpha = \frac{bl - ma}{\sqrt{(a^2 + b^2)(m^2 + l^2)}} \rightarrow (3)$$

Substitute (1), (2) and (3) in (4)

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{\left| \frac{n_2 - n_1}{l^2 + m^2} \right| \left| \frac{c_2 - c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}{\left| \frac{bl - ma}{\sqrt{(a^2 + b^2)(m^2 + l^2)}} \right|}} \\ &= \left| \frac{(n_2 - n_1)(c_2 - c_1)}{am - bl} \right| \\ &= \frac{|n_2 - n_1| |c_2 - c_1|}{|am - bl|} \end{aligned}$$

60



Let the gradient of AD is m_1

$$\tan \hat{DAC} = \tan \hat{BAC}$$

$$\left| \frac{m - 2}{1 + m \cdot 2} \right| = \left| \frac{1 - 2}{1 + 2} \right|$$

$$\frac{m - 2}{1 + 2m} = \pm \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \underline{m = 1} \leftarrow \text{Gradient of AD. (10)}$

$$\textcircled{+} \Rightarrow m = -7$$

$\therefore$ The gradient of AD and BC is -7

$\therefore$ The eqⁿ of BC

$$\frac{y+6}{x-5} = -7 \Rightarrow \underline{y+7x-29=0} \quad \textcircled{15}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-y-1=0 \\ y+7x-29=0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = \left(\frac{10}{3}, \frac{17}{3} \right) \quad \textcircled{5}$$

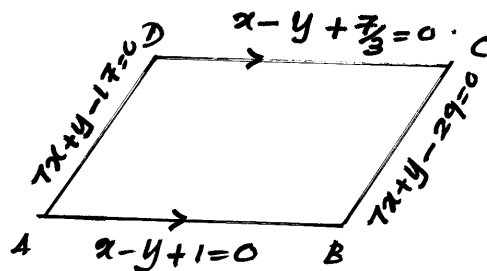
$\therefore$ The eqⁿ of DC:

$$\frac{y-\frac{17}{3}}{x-\frac{10}{3}} = 1 \Rightarrow \underline{3y-3x-7=0} \quad \textcircled{15}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-y-1=0 \\ x-y+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = (2, 3) \quad \textcircled{5}$$

$\therefore$ The eqⁿ of AD:

$$\frac{y-3}{x-2} = -7 \Rightarrow \underline{y+7x-17=0} \quad \textcircled{15}$$



$$\text{Area} = \frac{|29-17| \left| \frac{7}{3}-1 \right|}{|1 \times 1 + 7 \times 1|}$$

$$= \left(12 \times \frac{4}{3} \right) \times \frac{1}{8} = \frac{16}{8} \times 1 = \underline{2}$$

65

25

$$17) \quad \theta = 36^\circ$$

$$5\theta = 180^\circ$$

$$3\theta + 2\theta = 180^\circ$$

$$3\theta = 180^\circ - 2\theta$$

$$\sin 3\theta = \sin (180 - 2\theta)$$

$$\underline{\sin 3\theta = \sin 2\theta} \quad (10)$$

$$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad (5)$$

$$4\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 3\sin\theta = 0$$

$$\sin\theta \{4\sin^2\theta + 2\cos\theta - 3\} = 0 \quad (5)$$

$$\sin\theta \{4(1 - \cos^2\theta) + 2\cos\theta - 3\} = 0$$

$$\sin\theta \{4 - 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 3\} = 0$$

$$\sin\theta \{4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1\} = 0 \quad (5)$$

$$\sin\theta = 0 \quad \text{or} \quad 4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\sin 36 = 0 \quad \text{or} \quad \cos\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4}$$

$$\begin{aligned} * \quad & (5) \\ & = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$$\cos 36 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad (5) \quad \text{or} \quad \cos 36 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

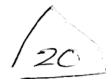
$$\# \quad (5)$$

$$(0 < \cos 36 < 1)$$

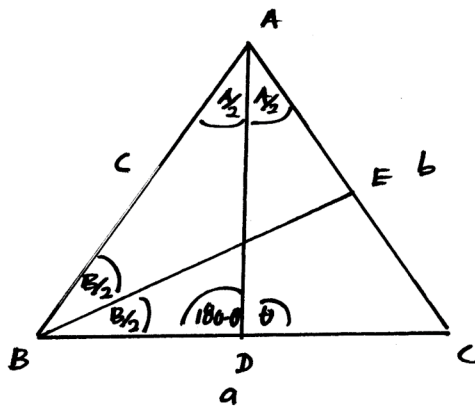
$$\therefore \underline{\underline{\cos 36 = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}}$$



$$\begin{aligned}
 \sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ &= -\frac{1}{2} \{ -2 \sin 12^\circ \sin 48^\circ \} \sin 54^\circ \\
 &= -\frac{1}{2} \{ \cos 60^\circ - \cos 36^\circ \} \sin 54^\circ \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right\} \sin (90-36) \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{2-\sqrt{5}-1}{4} \right\} \sin (90-36) \\
 &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right\} \cos 36^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{8} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\
 &= \frac{5-1}{32} \\
 &= \frac{1}{8} \quad (5)
 \end{aligned}$$



b. Sin Rule



$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin(A/2)} \Rightarrow BD = \frac{AD \sin(A/2)}{\sin B} \quad (5)$$

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{DC}{\sin(A/2)} \Rightarrow DC = \frac{AD \sin(A/2)}{\sin C} \quad (5)$$

$$BD + DC = a$$

$$\frac{AD \sin(\frac{A}{2})}{\sin B} + \frac{AD \sin(\frac{A}{2})}{\sin C} = a$$

$$AD \sin(\frac{A}{2}) \left\{ \frac{\sin B + \sin C}{\sin B \sin C} \right\} = a$$

$$AD \sin(\frac{A}{2}) \left\{ \frac{kb + kc}{k^2 bc} \right\} = a$$

$$AD = \frac{kabc}{(b+c) \sin(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{2bc \sin(\frac{A}{2}) \cos(\frac{A}{2})}{(b+c) \sin(\frac{A}{2})}$$

$$= \frac{2bc \cos(\frac{A}{2})}{(b+c)}$$

$$BE = \frac{2ac \cos(\frac{B}{2})}{a+c}$$

$$\text{If } AD = BE$$

$$\frac{2bc \cos(\frac{A}{2})}{b+c} = \frac{2ac \cos(\frac{B}{2})}{a+c}$$

$$\frac{b \cos(\frac{A}{2})}{b+c} = \frac{a \cos(\frac{B}{2})}{a+c}$$

$$\frac{k \sin B \cos(\frac{A}{2})}{k \sin B + k \sin C} = \frac{k \sin A \cos(\frac{B}{2})}{k \sin A + k \sin C}$$

$$\frac{\sin B \cos(\frac{A}{2})}{2 \sin(\frac{B+C}{2}) \cos(\frac{B-C}{2})} = \frac{\sin A \cos(\frac{B}{2})}{2 \sin(\frac{A+C}{2}) \cos(\frac{A-C}{2})}$$

$$\frac{\sin B \cos(\frac{A}{2})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) \cos(\frac{B-C}{2})} = \frac{\sin A \cos(\frac{B}{2})}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) \cos(\frac{A-C}{2})}$$

$$\frac{\sin B \cos(\frac{A}{2})}{2 \cos(\frac{A}{2}) \cos(\frac{B-C}{2})} = \frac{\sin A \cos(\frac{B}{2})}{2 \cos(\frac{B}{2}) \cos(\frac{A-C}{2})}$$

$$\underline{\underline{\sin B \cos(\frac{A-C}{2}) = \sin A \cos(\frac{B-C}{2})}}$$

50

$$c) f(x) = 2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x$$

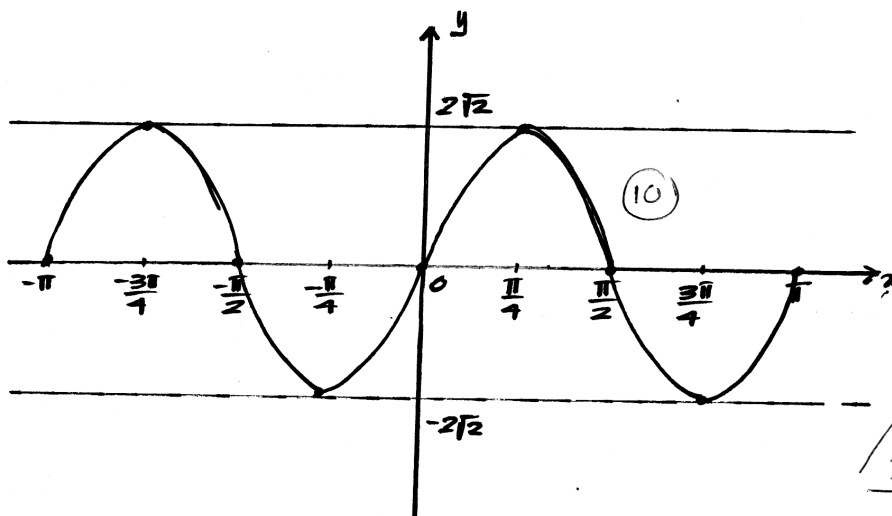
$$\stackrel{(5)}{=} 2 \cos 2x + 2 \sin 2x.$$

$$= 2\sqrt{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right\}$$

$$= 2\sqrt{2} \left\{ \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \sin 2x \cos \frac{\pi}{4} \right\}$$

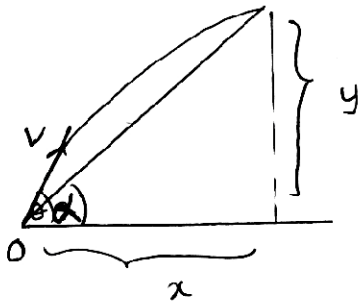
$$\stackrel{(5)}{=} \underline{\underline{2\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}}$$

$$\underline{\underline{A = 2\sqrt{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}}} \quad (5)$$



30

3)



$$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = (v \sin \theta)^2 - 2gy$$

$$y = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (5)$$

$$\uparrow v = u + at$$

$$0 = v \sin \theta - gt$$

$$t = \frac{v \sin \theta}{g} \quad (5)$$

$$\rightarrow s = ut$$

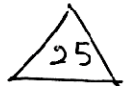
$$x = v \cos \theta \times \frac{v \sin \theta}{g} \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

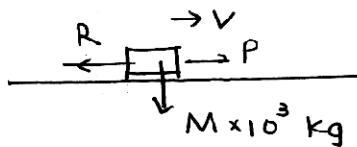
$$= \frac{\frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}} \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan \theta}{2}$$

$$2 \tan \alpha = \tan \theta \quad (5)$$



4)



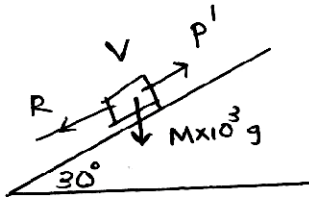
$$P = R \quad (5)$$

$$H = PV$$

$$H \times 10^3 = PV$$

$$P = \frac{H \times 10^3}{V}$$

$$\therefore R = \frac{H \times 10^3}{V} \quad (5)$$



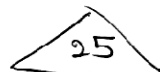
$$\uparrow P' = R + M \times 10^3 g \sin 30^\circ$$

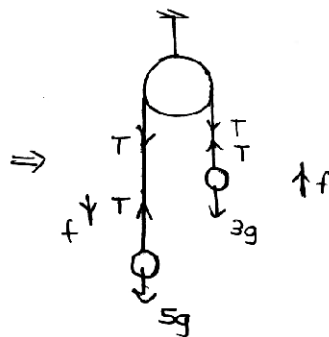
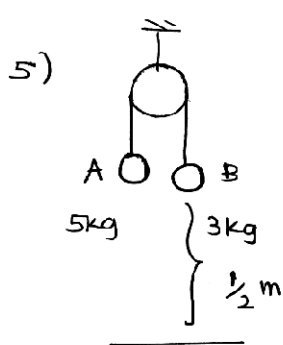
$$P' = \frac{H \times 10^3}{V} + \frac{M \times 10^3 g}{2} \quad (5)$$

$$H = PV$$

$$H' \times 10^3 = P' V = H \times 10^3 + \frac{M \times 10^3 g}{2} \times V \quad (5)$$

$$H' = H + \frac{MgV}{2} \quad (5)$$





$F = ma$

ⓐ $5g - T = 5f$ — ① ⑤

ⓑ $T - 3g = 3f$ — ② ⑤

$2g = 8f$

$f = \frac{g}{4}$ ⑤

When A hits the ground velocities of A and B are equal.

ⓐ $v^2 = u^2 + 2as$

$v^2 = 0 + 2 \times \frac{g}{4} \times \frac{1}{2}$

$v = \frac{\sqrt{g}}{2}$ ⑤

ⓐ $\uparrow v^2 = u^2 + 2as$

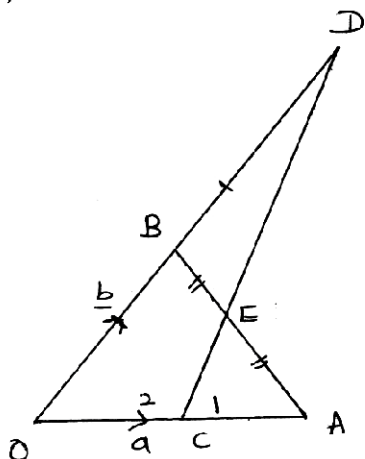
$0 = \frac{g}{4} - 2gh$

$h = \frac{1}{8} m$

$\therefore$ the height reached by B = $1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} m$ ⑤



6)



$\vec{ED} = \vec{EB} + \vec{BD}$

$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{b}$

$= \frac{1}{2}(3\underline{b} - \underline{a})$ ⑤

$\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE}$ ⑤

$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

$= \frac{1}{3}\underline{a} + \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$

$= -\frac{\underline{a}}{6} + \frac{\underline{b}}{2}$

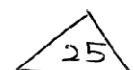
$= \frac{3\underline{b} - \underline{a}}{6}$ ⑤

$\vec{CE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (3\underline{b} - \underline{a})$

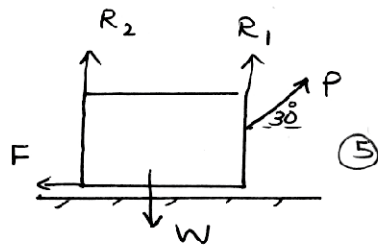
$\vec{CE} = \frac{1}{3} \vec{ED}$ ⑤

$\therefore C, E, D$ are collinear.

$CE : ED = 1 : 3$ ⑤



7



$$\uparrow R_1 + R_2 + \frac{P}{2} = W \quad (5)$$

$$R_1 + R_2 = W - \frac{P}{2}$$

$$\rightarrow F = \frac{\sqrt{3}}{2} P \quad (5)$$

For the equilibrium

$$\mu \geq \frac{|F|}{R_1 + R_2} \quad (5)$$

$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}P/2}{2W - P/2}$$

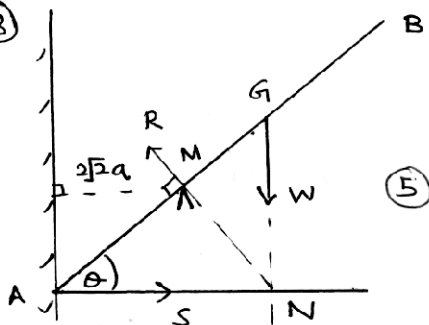
$$\mu \geq \frac{\sqrt{3}P}{2W - P}$$

$$P \leq \frac{2\mu W}{\sqrt{3} + \mu} \quad (5)$$

$$P_{\max} = \frac{2\mu W}{\sqrt{3} + \mu}$$

25

8



$$AN = 8a \cos \theta$$

$$AM = 8a \cos^2 \theta$$

$$8a \cos^3 \theta = 2\sqrt{2}a \quad (5)$$

$$\cos^3 \theta = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \pi/4 \quad (5)$$

For the rod AB

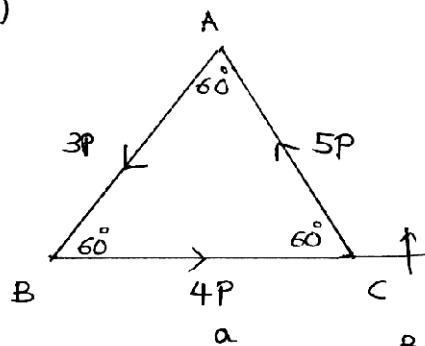
$$A) \quad R \times 8a \cos^2 \theta = W \times 8a \cos \theta \quad (5)$$

$$R \times \cos \frac{\pi}{4} = W$$

$$R = \sqrt{2}W \quad (5)$$

25

9)



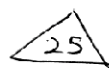
$$\rightarrow X = 4P - (5P + 3P) \frac{1}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\uparrow Y = (5P - 3P) \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}P \quad (5)$$

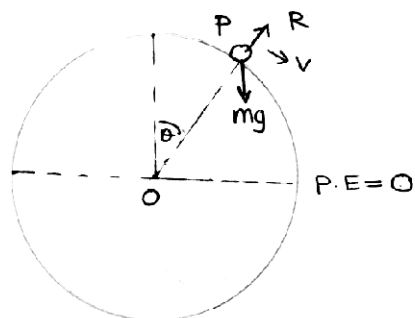
$$R = \sqrt{3}P \uparrow \quad (5)$$

$$\curvearrowleft Q = \sqrt{3}P \left(a + \frac{3a}{2} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}ap}{2} \quad (5)$$



10)



Applying the principle of Conservation of energy for P,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga \cos \theta = mga \quad (5)$$

$$v^2 = 2ga(1 - \cos \theta)$$

$$\nabla F = ma$$

$$mg \cos \theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad (5)$$

$$R = mg \cos \theta - \frac{m}{a} (1 - \cos \theta) 2ga$$

$$R = mg (3 \cos \theta - 2)$$

When the particle leaves the sphere, $R = 0 \quad (5)$

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \quad (5)$$

$$v^2 = 2ga \left(1 - \frac{2}{3} \right)$$

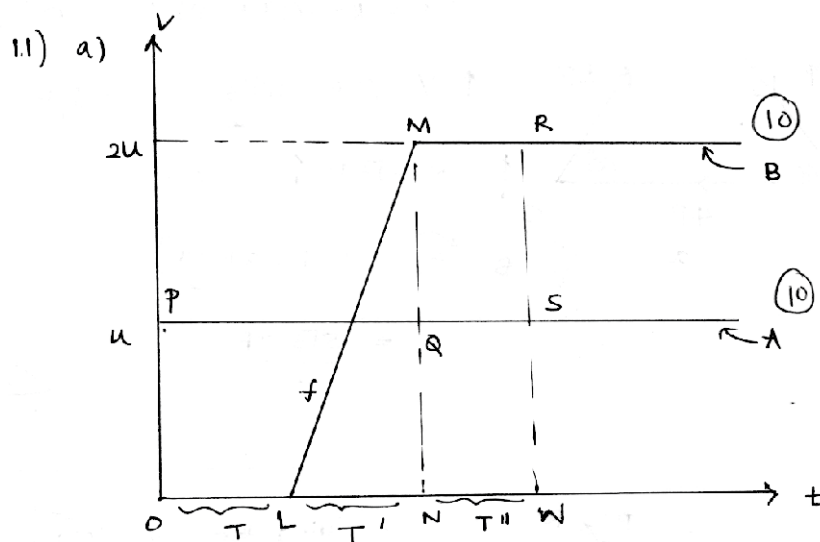
$$v = \sqrt{\frac{2ga}{3}} \quad (5)$$



First Term Test - 2019

Combined Mathematics II - Part B - Grade 13

Part B



$$\frac{2u}{T'} = f \quad (5)$$

distance between the cars when B reaches the maximum velocity.

$$\text{Area of OPQN} - \text{Area of LMN} \quad (5)$$

$$= (T+T')u - \frac{1}{2}T' \times 2u \quad (5)$$

$$= \left(T + \frac{2u}{f}\right)u - \frac{1}{2} \times \frac{2u}{f} \times 2u$$

$$= uT + \frac{2u^2}{f} - \frac{2u^2}{f}$$

$$= uT \quad (5)$$

when B passes A,

$$\text{Area of OPSW} = \text{Area of LMRW} \quad (5)$$

$$(T+T'+T'')u = \left(\frac{1}{2} \times T' \times 2u\right) + 2uT'' \quad (5)$$

$$Tu = T''u$$

$$T = T'' \quad (5)$$

$$\therefore \text{Total time} = T + \frac{2u}{f} + T = 2T + \frac{2u}{f} = 2\left(T + \frac{u}{f}\right) \quad (5)$$



$$b) \quad \underline{V}_{P_1, E} = \uparrow \quad \underline{V}_{P_1, W} = u \quad \underline{V}_{W, E} = \cancel{v}$$

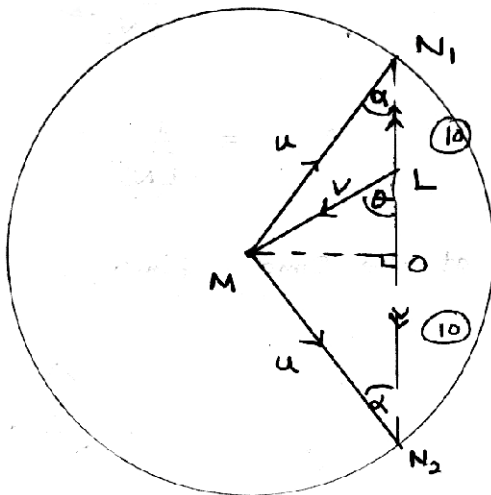
$$\underline{V}_{P_1, E} = \underline{V}_{P_1, W} + \underline{V}_{W, E}$$

$$\uparrow_{L}^{N_1} = u_{MN_1} + \begin{array}{c} \nearrow L \\ \searrow V \\ M \end{array} \quad (5)$$

$$\underline{V}_{P_2, E} = \downarrow \quad \underline{V}_{P_2, W} = u \quad \underline{V}_{W, E} = \cancel{v}$$

$$\underline{V}_{P_2, E} = \underline{V}_{P_2, W} + \underline{V}_{W, E}$$

$$\downarrow_{L}^{N_2} = u_{MN_2} + \begin{array}{c} \nearrow L \\ \searrow V \\ M \end{array} \quad (5)$$



for $\triangle OMN_1$

$$u \sin \alpha = v \sin \theta$$

$$\sin \alpha = \frac{v \sin \theta}{u} \quad (5)$$

$$\begin{array}{c} u \\ \alpha \\ \sqrt{u^2 - v^2 \sin^2 \theta} \end{array} \quad \begin{array}{c} v \sin \theta \\ \end{array}$$

If the time taken for the first plane is t_1 ,

$$t_1 = \frac{d}{LN_1} \quad (5)$$

If the time taken for the second plane is t_2 ,

$$t_2 = \frac{d}{LN_2} \quad (5)$$

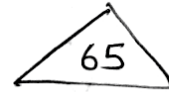
$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{d}{LN_1} - \frac{d}{LN_2} \\ &= d \left\{ \frac{1}{(u \cos \alpha - v \cos \theta)} - \frac{1}{(u \cos \alpha + v \cos \theta)} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$t_1 - t_2 = d \left\{ \frac{u \cos \alpha + v \cos \theta - (u \cos \alpha - v \cos \theta)}{u^2 \cos^2 \alpha - v^2 \cos^2 \theta} \right\}$$

$$= \frac{2dv \cos \theta}{u^2 \cos^2 \alpha - v^2 \cos^2 \theta} \quad (5)$$

$$= \frac{2dv \cos \theta}{u^2 \left(\frac{u^2 - v^2 \sin^2 \theta}{u^2} \right) - v^2 \cos^2 \theta} \quad (5)$$

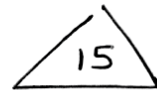
$$= \frac{2dv \cos \theta}{u^2 - v^2}$$



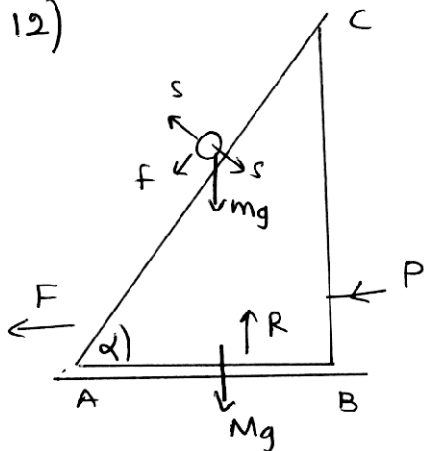
Time taken for P_1 to come back to the point A = $\frac{d}{LN_2}$

" " " P_2 " " = $\frac{d}{LN_1} \quad (10)$

$\therefore$ both planes reaches A at the same time. (5)



12)

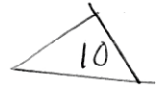


$$\frac{a}{M, E} = \frac{F}{F}$$

(10)

for the system,
 $F = ma$

$$\frac{a}{m, E} = \frac{f}{f} + \frac{F}{F}$$



$$P = MF + m(F + f \cos \alpha) \quad (10)$$

$$P = (M+m)F + m \cos \alpha f \quad (1)$$

$$(m) \quad mg \sin \alpha = m(f + F \cos \alpha) \quad (10)$$

$$g \sin \alpha = f + F \cos \alpha \quad (2)$$

$$(1) - (2) \times m \cos \alpha$$

$$P - mg \sin \alpha \cos \alpha = F(M+m - m \cos^2 \alpha) \quad (5)$$

$$F = \frac{P - mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

by (2),

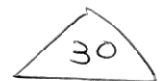
$$g \sin \alpha - F \cos \alpha = f$$

$$g \sin \alpha - \left(\frac{P - mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \right) \cos \alpha = f \quad (5)$$

$$f = \frac{Mg \sin \alpha + mg \sin^3 \alpha - P \cos \alpha + mg \sin \alpha \cos^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

$$= \frac{Mg \sin \alpha + mg \sin^3 \alpha - P \cos \alpha + mg \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}{M + m \sin^2 \alpha}$$

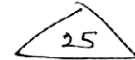
$$= \frac{(M+m)g \sin \alpha - P \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5)$$



III for the particle to move upwards along the plane or to
 $f=0$ or $f>0$ (10) come to rest

$$\frac{(M+m)g \sin \alpha - P \cos \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \geq 0 \quad (10)$$

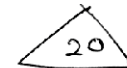
$$\frac{(M+m)g \sin \alpha}{\cos \alpha} \geq P \quad (5)$$



IV when $P=0$,

$$F = \frac{-mg \sin \alpha \cos \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \quad (10)$$

$$f = \frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \quad (10)$$



∴ The acceleration of the particle
 relative to the earth } = (10)

$$= \frac{F+f \cos \alpha}{f \sin \alpha}$$

$$= \sqrt{(F+f \cos \alpha)^2 + (f \sin \alpha)^2} \quad (10)$$

$$= \sqrt{F^2 + 2FF \cos \alpha + f^2}$$

(5)

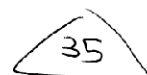
$$= \sqrt{\left(\frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M+m \sin^2 \alpha}\right)^2 + 2 \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \times \frac{(M+m)g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} + \frac{(M+m)^2 g^2 \sin^2 \alpha}{(M+m \sin^2 \alpha)^2}} \quad (5)$$

$$= \frac{g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \sqrt{m^2 \cos^2 \alpha + (M+m)^2 + 2m(M+m) \cos^2 \alpha}$$

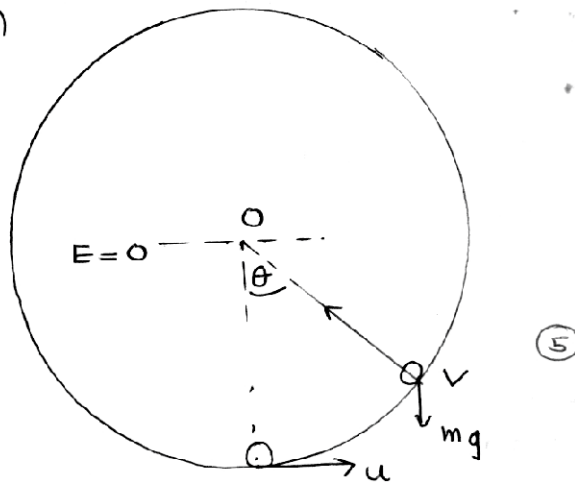
$$= \frac{g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \sqrt{M^2 + m^2 - m^2(1-\sin^2 \alpha) + 2mM(1-\cos^2 \alpha)}$$

$$= \frac{g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \sqrt{M^2 + m^2 \sin^2 \alpha + 2mM \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{g \sin \alpha}{M+m \sin^2 \alpha} \sqrt{(M+m \sin^2 \alpha)(M+m)} \quad (5)$$



13) a)



Principle of Conservation of energy,

$$-mga + \frac{1}{2}mu^2 = -mgac\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (10)$$

$$-2ga + u^2 = -2gac\cos\theta + v^2$$

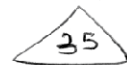
$$v^2 = u^2 + 2gac\cos\theta - 2ga \quad (5)$$

$$F=ma$$

$$R - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a} \quad (10)$$

$$R = mg\cos\theta + \frac{m}{a}(u^2 + 2gac\cos\theta - 2ga)$$

$$= \frac{m}{a}(u^2 + 3gac\cos\theta - 2ga) \quad (5)$$



for the particle to leave the circular path $R=0$. (5)

$$\frac{m}{a}(u^2 + 3gac\cos\theta - 2ga) = 0$$

$$3ga\cos\theta = 2ga - u^2$$

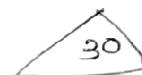
$$\cos\theta = \frac{2ga - u^2}{3ga} \quad (5)$$

when it leaves the circular path $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (5)

$$\cos\frac{\pi}{2} < \cos\theta < \cos\pi \quad (5)$$

$$0 > \frac{2ga - u^2}{3ga} > -1 \quad (5)$$

$$2ga < u^2 < 5ga \quad (5)$$



to complete the circular path when $\theta = \pi$,

$$V > 0, R > 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} V_{\theta=\pi}^2 &= u^2 + 2ga (\cos \pi) - 2ga \\ &= u^2 - 2ga - 2ga \\ &= u^2 - 4ga \end{aligned}$$

$$V_{\theta=\pi} > 0$$

$$u^2 - 4ga \geq 0$$

$$u^2 > 4ga \quad (5)$$

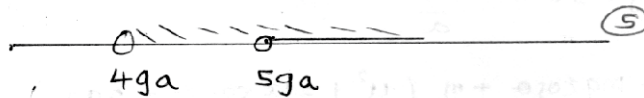
$$R_{\theta=\pi} = \frac{m}{a} (u^2 + 3ga \cos \pi - 2ga)$$

$$= \frac{m}{a} (u^2 - 5ga)$$

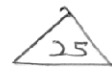
$$R_{\theta=\pi} > 0$$

$$\frac{m}{a} (u^2 - 5ga) > 0$$

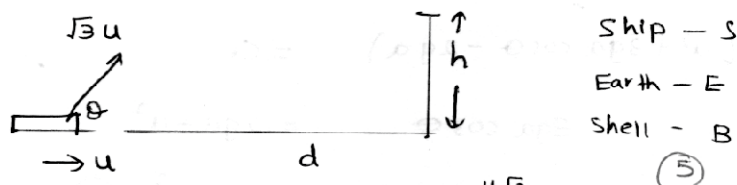
$$u^2 > 5ga \quad (5)$$



To satisfy both conditions $u^2 > 5ga \quad (5)$



b)



$$\underline{V}_{S,E} = \underline{u}$$

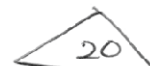
$$\underline{V}_{B,S} = \underline{u\sqrt{3}}$$

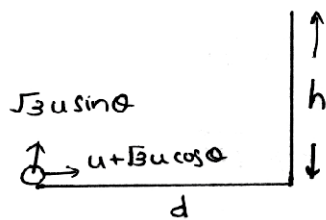
$$\underline{V}_{B,E} = \underline{V}_{B,S} + \underline{V}_{S,E}$$

$$= \underline{u\sqrt{3}} + \underline{u} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}u \sin \theta \\ &u + \sqrt{3}u \cos \theta \end{aligned}$$

(5)





$$\rightarrow S = ut.$$

$$d = (u + \sqrt{3}u \cos \theta) \cdot t \quad (10)$$

$$t = \frac{d}{u + \sqrt{3}u \cos \theta} \quad (5)$$

$$\uparrow S = ut + \frac{1}{2} at^2$$

$$h = \sqrt{3}u \sin \theta \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \quad (10)$$

$$h = \sqrt{3}u \sin \theta \times \left(\frac{d}{u + \sqrt{3}u \cos \theta} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{d}{u + \sqrt{3}u \cos \theta} \right)^2 \quad (10)$$

$$2h(u + \sqrt{3}u \cos \theta)^2 = (u + \sqrt{3}u \cos \theta) \sqrt{3}u \sin \theta d - g d^2$$

$$g d^2 + 2u^2 h (1 + \sqrt{3} \cos \theta)^2 - 2\sqrt{3} \sin \theta u^2 d (1 + \sqrt{3} \cos \theta) = 0 \quad \triangle 40$$

$$g d^2 + 2u^2 (1 + \sqrt{3} \cos \theta)^2 h - 2u^2 \sqrt{3} d \sin \theta (1 + \sqrt{3} \cos \theta) = 0 \quad (5)$$

$$14) a) \quad \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}$$

$$\text{let } \alpha \neq 0.$$

$$\frac{\underline{a}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \underline{b} = \underline{0}$$

$$\underline{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \underline{b} \quad \#$$

Since $|\underline{a}| \neq 0$, $|\underline{b}| \neq 0$ and $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are non parallel vectors.

$$\therefore \alpha = 0. \quad (5)$$

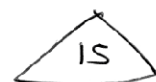
$$\text{let } \beta \neq 0$$

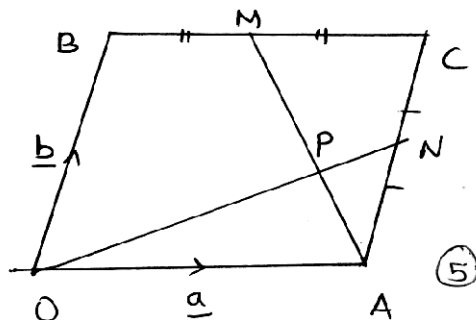
$$\frac{\alpha}{\beta} \underline{a} + \underline{b} = \underline{0}$$

$$\underline{b} = -\frac{\alpha}{\beta} \underline{a} \quad \#$$

$$\therefore \beta = 0 \quad (5)$$

$$\text{for } \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0}, \quad \alpha = 0 \text{ and } \beta = 0 \quad (5)$$





$$\vec{OP} = \lambda \vec{ON}$$

$$\vec{AP} = \mu \vec{AM}$$

OAN Δ

$$\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{AN} \quad (5)$$

$$\vec{OP} = \lambda \vec{ON}$$

$$\vec{OP} = \lambda (\vec{OA} + \vec{AN})$$

$$= \lambda \left(\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} \right) \quad (5)$$

OAP Δ

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} \quad (5)$$

$$= \vec{OA} + \mu \vec{AM}$$

$$= \underline{a} + \mu (\vec{AC} + \vec{CM})$$

$$= \underline{a} + \mu \left(\underline{b} - \frac{\underline{a}}{2} \right) \quad (5)$$

$$\vec{OP} = \lambda \left(\underline{a} + \frac{\underline{b}}{2} \right) = \underline{a} + \mu \left(\underline{b} - \frac{1}{2} \underline{a} \right) \quad (5)$$

$$\left(\lambda - 1 + \frac{\mu}{2} \right) \underline{a} + \left(\frac{\lambda}{2} - \mu \right) \underline{b} = \underline{0} \quad (5)$$

$$\lambda - 1 + \frac{\mu}{2} = 0 \quad (5) \quad \text{or} \quad \frac{\lambda}{2} - \mu = 0 \quad (5) \quad \left(\text{since } |\underline{a}| \neq 0 \right. \\ \left. |\underline{b}| \neq 0 \right.$$

a and b are
non parallel
vectors)

$$2\mu + \frac{\mu}{2} = 1$$

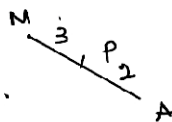
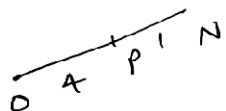
$$\lambda = 2\mu$$

$$\frac{5\mu}{2} = 1$$

$$\mu = \frac{2}{5} \quad (5), \quad \lambda = \frac{4}{5} \quad (5)$$

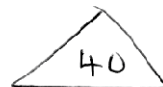
$$OP = \frac{4}{5} ON$$

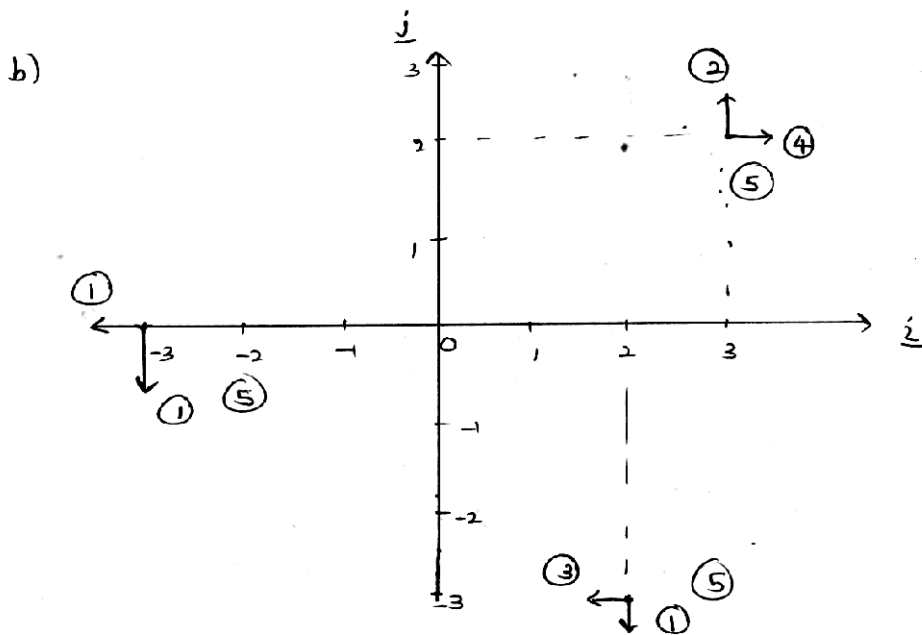
$$AP = \frac{2}{5} AM$$



$$OP : PN = \underline{\underline{4 : 1}} \quad (5)$$

$$AP : PM = \underline{\underline{2 : 3}} \quad (5)$$





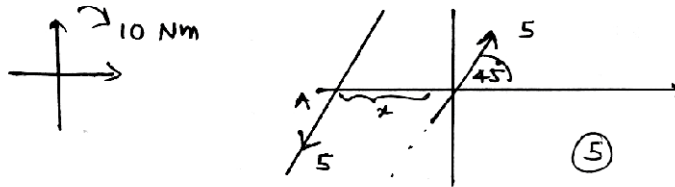
for the system to reduce to a couple only $R=0$, $G \neq 0$ 15
 $x=0$ and $y=0$ 5

$$\rightarrow x = 4 - 1 - 3 = 0 \quad (5)$$

$$\uparrow y = 2 - 1 - 1 = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (G) &= (4 \times 2) - (2 \times 3) - (1 \times 3) + (3 \times 3) + (1 \times 2) \quad (10) \\ &= 8 - 6 - 3 + 9 + 2 \\ &= 10 \text{ Nm} \quad (5) \end{aligned}$$

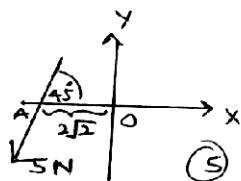
For the equilibrium a couple of moment 10 Nm should be 30
5 added.



$$x \times 5 \sin 45 = 10 \quad (5)$$

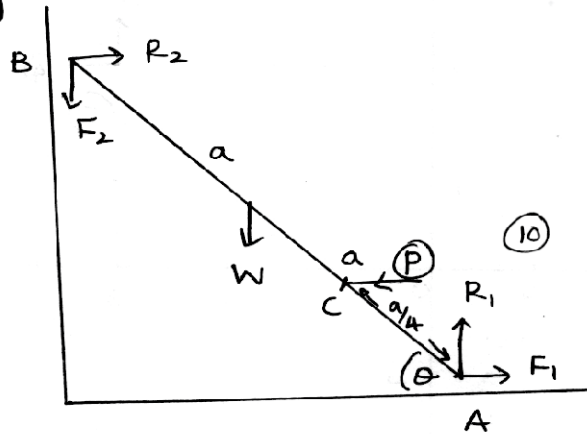
$$x = \frac{10\sqrt{2}}{5}$$

$$x = 2\sqrt{2} \text{ m} \quad (5)$$

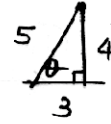


For equilibrium a force of 5 N should be added at a distance $2\sqrt{2} \text{ m}$ to the left of O. in the given direction. 25

15) a)



$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$



$$F_1 = \frac{1}{2} R_1 \quad (5)$$

$$R_1 - F_2 = W \quad (5)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} R_2 \quad (5)$$

$$R_1 = W + \frac{R_2}{2}$$

$$\rightarrow P = F_1 + R_2 \quad (5)$$

$$P = \frac{R_1}{2} + R_2$$

$$P = \frac{1}{2} \left(W + \frac{R_2}{2} \right) + R_2$$

$$P = \frac{W}{2} + \frac{5R_2}{4} \quad (5)$$

$$\leftarrow A) \quad P \times \frac{a}{4} \sin \theta + W \times a \cos \theta + F_2 \times 2a \cos \theta - R_2 \times 2a \sin \theta = 0$$

$$P \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + W \times \frac{3}{5} + \frac{R_2}{2} \times 2 \times \frac{3}{5} - R_2 \times 2 \times \frac{4}{5} = 0 \quad (15)$$

$$P + 3W + 3R_2 - 8R_2 = 0$$

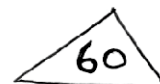
$$R_2 = \frac{P + 3W}{5} \quad (5)$$

$$P = \frac{W}{2} + \frac{5}{4} \left(\frac{P + 3W}{5} \right)$$

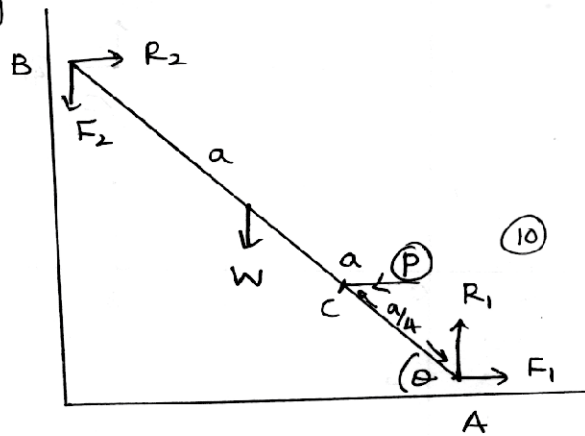
$$= \frac{W}{2} + \frac{P}{4} + \frac{3W}{4}$$

$$\frac{3P}{4} = \frac{5W}{4}$$

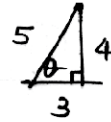
$$P = \frac{5W}{3} \quad (5)$$



15) a)



$$\tan \theta = \frac{4}{3}$$



$$F_1 = \frac{1}{2} R_1 \quad (5)$$

$$\uparrow R_1 - F_2 = W \quad (5)$$

$$F_2 = \frac{1}{2} R_2 \quad (5)$$

$$R_1 = W + \frac{R_2}{2}$$

$$\rightarrow P = F_1 + R_2 \quad (5)$$

$$P = \frac{R_1}{2} + R_2$$

$$P = \frac{1}{2} \left(W + \frac{R_2}{2} \right) + R_2$$

$$P = \frac{W}{2} + \frac{5R_2}{4} \quad (5)$$

$$\leftarrow A) \quad P \times \frac{a}{4} \sin \theta + W \times a \cos \theta + F_2 \times 2a \cos \theta - R_2 \times 2a \sin \theta = 0$$

$$P \times \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} + W \times \frac{3}{5} + \frac{R_2}{2} \times 2 \times \frac{3}{5} - R_2 \times 2 \times \frac{4}{5} = 0 \quad (15)$$

$$P + 3W + 3R_2 - 8R_2 = 0$$

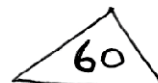
$$R_2 = \frac{P + 3W}{5} \quad (5)$$

$$P = \frac{W}{2} + \frac{5}{4} \left(\frac{P + 3W}{5} \right)$$

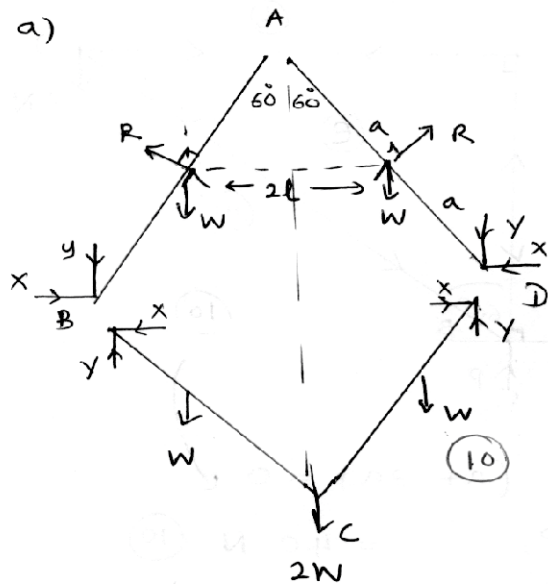
$$= \frac{W}{2} + \frac{P}{4} + \frac{3W}{4}$$

$$\frac{3P}{4} = \frac{5W}{4}$$

$$P = \frac{5W}{3} \quad (5)$$



16) a)



for the system

$$\uparrow 2R \cos 30 = 6W \quad (5)$$

$$R = \frac{6W}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

for the rods BC and CD $\uparrow 2Y = 4W$

$$Y = 2W \quad (5)$$

rod BC ,



$$X \times 2a \cos 60^\circ - Y \times 2a \sin 60^\circ + W \times a \cos 30^\circ = 0 \quad (15)$$

$$X \times 2 \times \frac{1}{2} - Y \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + W \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$X = 2\sqrt{3}W - \frac{\sqrt{3}W}{2} = \frac{3\sqrt{3}W}{2} \quad (5)$$

$$R = \sqrt{4W^2 + \frac{27}{4}W^2}$$

$$\tan \theta = \frac{2W}{3\sqrt{3}W/2}$$

$$= \frac{\sqrt{43}W}{2} \quad (5)$$

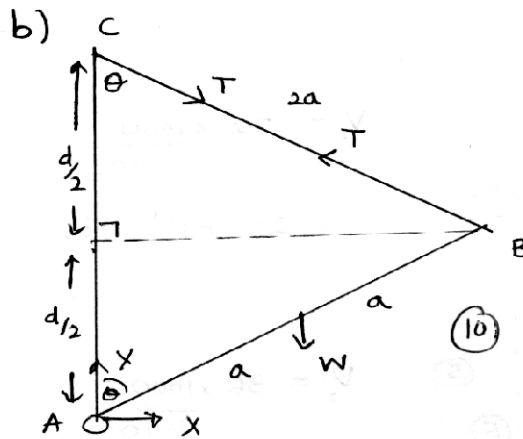
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \right) \quad (5)$$

for the rod AB $\curvearrowright_A$

$$R \times b - X \times 2a \cos 60^\circ - Y \times 2a \sin 60^\circ - W \times a \sin 60^\circ = 0 \quad (15)$$

$$\frac{6W}{\sqrt{3}} \times \frac{2l}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}W}{2} \times 2a \times \frac{1}{2} - 2W \times 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2} - W \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$l = \sqrt{3}a \quad (10)$$



$$\cos \theta = \frac{\frac{d}{2}}{2a} = \frac{d}{4a}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{16a^2 - d^2}}{4a} \quad (10)$$

i) AB, $\curvearrowleft A$ $T \times d \sin \theta = W \times a \sin \theta \quad (10)$

$$T = \frac{Wa}{d} \quad (5)$$

ii) $\rightarrow X = T \sin \theta \quad (5)$

$$= \frac{Wa}{d} \times \frac{\sqrt{16a^2 - d^2}}{4a} = \frac{\sqrt{16a^2 - d^2}}{4d} W \quad (5)$$

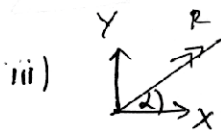
$$\uparrow Y = -T \cos \theta + W \quad (10)$$

$$Y = W - \frac{Wa}{d} \times \frac{d}{4a} = \frac{3W}{4} \quad (5)$$

The reaction at the hinge A, $R = \sqrt{\left(\frac{16a^2 - d^2}{16d^2}\right) + \frac{9}{16}} W$

$$R = \sqrt{\frac{16a^2 + 8d^2}{16d^2}} W$$

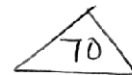
$$= \left(\frac{2a^2 + d^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{W}{d} \quad (10)$$



$$\tan \alpha = \frac{\frac{3W}{4}}{\frac{\sqrt{16a^2 - d^2}W}{4d}}$$

$$= \frac{3d}{\sqrt{16a^2 - d^2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{3d}{\sqrt{16a^2 - d^2}} \right) \quad (10)$$



(17) a)



$$\rightarrow F - R = 0$$

$$F = 30000 \text{ N} \quad (5)$$

$$V_1 = \frac{72 \times 1000}{3600}$$

$$= 20 \text{ m s}^{-1} \quad (5)$$

$$P = FV_1$$

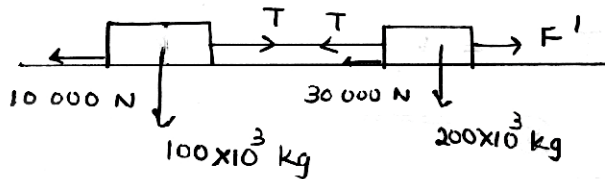
$$= 30000 \times 20$$

$$= 600000 \text{ W} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{600 \text{ kW}}} \quad (5)$$

$$V_2 = \frac{36 \times 1000}{3600}$$

$$= 10 \text{ m s}^{-1}$$



$$P = FV_2$$

$$600 \times 10^3 = F' \times 10$$

$$F' = 60000 \text{ N} \quad (5)$$

$$\rightarrow F' - 40000 = 300 \times 10^3 a \quad (10)$$

$$60000 - 40000 = 300 \times 10^3 a$$

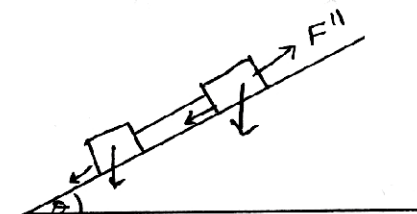
$$a = \frac{2}{30} = \underline{\underline{\frac{1}{15} \text{ m s}^{-2}}} \quad (5)$$

for the cabin, $\rightarrow F = ma$

$$T - 10000 = 100 \times 10^3 \times \frac{1}{15} \quad (5)$$

$$T = 10000 + \frac{20000}{3}$$

$$= \frac{50000}{3} \text{ N} \quad (5)$$



$$\sin \theta = \frac{1}{30}$$



$$\rightarrow F'' - 30000 - 300 \times 10^3 \times 10 \times \frac{1}{30} = 300 \times 10^3 \times \frac{1}{10} \quad (10)$$

$$F'' = 30000 + 100000 + 30000$$

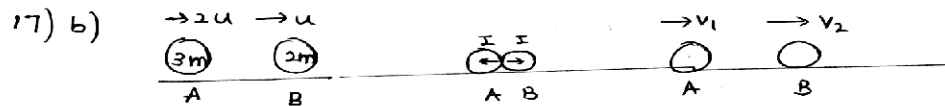
$$= \underline{\underline{160000 \text{ N}}} \quad (5)$$

$$P = FV$$

$$600 \times 10^3 = 160 \times 10^3 V \quad (5)$$

$$V = \frac{60}{16} = \frac{15}{4} \text{ m s}^{-1} \quad (5)$$

25



For the system, $\rightarrow I = \Delta mV$

$$3mV_1 + 2mV_2 - 3m(2u) - 2m(u) = 0 \quad (10)$$

$$3V_1 + 2V_2 = 8u \quad (1) \quad (5)$$

Newton's Law of restitution,

$$V_2 - V_1 = e(2u - u) \quad (10)$$

$$V_2 - V_1 = eu \quad (2)$$

$$5V_1 = 8u - 2eu$$

$$V_1 = \frac{2u(4-e)}{5} \quad (5)$$

$$5V_2 = 8u + 3eu$$

$$V_2 = \frac{u(8+3e)}{5} \quad (5)$$

35

for sphere A, $\rightarrow I = \Delta mV$

$$-I = 3m(V_1 - 2u) \quad (5)$$

$$I = 3m \left[2u - \frac{2u}{5}(4-e) \right]$$

$$I = \frac{6mu}{5}(1+e) \quad (5)$$

for sphere B, $\rightarrow I = \Delta mV$

$$I = 2m(V_2 - u) \quad (5)$$

loss of kinetic energy.

$$E = \frac{1}{2} 3m(2u)^2 + \frac{1}{2} 2mu^2 - \frac{1}{2} (3m)V_1^2 - \frac{1}{2} (2m)V_2^2 \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} 3m(2u - V_1)(2u + V_1) + \frac{1}{2} (2m)(u - V_2)(u + V_2) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} I(2u + V_1) - \frac{1}{2} I(u + V_2) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} I(u + V_1 - V_2)$$

$$= \frac{1}{2} I(u - eu)$$

$$= \frac{1}{2} I(1-e)u \quad (5)$$

40