

Second Term Test - Grade 13 - 2019

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I (A කොටස)

01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය යොදා ගනිමින්, සියළු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $13^n - 4^n$ යන්න 9න් ඉතිරි නැතිව බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

02. $3 - x \leq |3x - 1|$ යන අසමානතාව තෘප්ත කරන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

03. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi - x)^2}$ හි අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

04. ගැහැණු 7කින් හා පිරිමි 8කින් යුත් කණ්ඩායමකින්, අඩු වශයෙන් ගැහැණු 5ක් වත් ඇතුළත් 12දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් සෑදිය හැකි ආකාර ගණන කීය ද?

i. මෙම කමිටුවලින් බහුතරය ගැහැණු වන කමිටු කීයක් සෑදිය හැකි ද?

ii. ඉහත කමිටුවලින් බහුතරය පිරිමි වන කමිටු කීයක් සෑදිය හැකි ද?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

05. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන Ur ලියන්න.

$f(r) = (r-1)^2 r^2$ නම් $f(r+1) - f(r) = 4Ur$ බව පෙන්වන්න. එමගින් $\sum_{r=1}^n Ur$ අගයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

06. xy - ඛණ්ඩාංක තලයේ පිහිටි $y = 3x$, $y = 0$ හා $y = -x^2 + 4$ ශ්‍රිතවල ප්‍රස්තාරවලින් වටවූ වර්ගඵලය x - අක්ෂය වටා භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I (B කොටස)

11. a. $\lambda(x^2 + x + 1) = 2x + 1; \lambda \in R$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල දෙක තාත්වික හා ධන වන පරිදි λ හි අගයයන් සොයන්න.

$\lambda = 1\frac{1}{9}$ වන විට, ඉහත වර්ගජ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, α^2 හා β^2 මූල වන වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න.

$\frac{1}{\alpha^2}$ හා $\frac{1}{\beta^2}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණයද ලබා ගන්න.

- b. $m^2(x^2 - x) + 2mx + 3 = 0$ යන සමීකරණයෙහි විසඳුම් α හා β නම් සහ m_1 හා m_2 යනු $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3}$

යන සම්බන්ධතාවයේ m සඳහා වූ අගයයන් දෙකක් නම්, $\frac{m_1^2}{m_2} + \frac{m_2^2}{m_1}$ හි අගය $-\frac{68}{3}$ බව පෙන්වන්න.

- c. $f(x) = 2x^3 + rx^2 - 12x - 7; x \in R$ යැයි ගනිමු. $(x - \alpha)^2$; $\alpha \in R$ යනු $f(x)$ හි සාධකයක් නම්, $\alpha = -1$ බව පෙන්වන්න. r හි අගය සොයන්න. $f(x)$ යන්න සාධක ඇසුරෙන් සොයන්න.

12. a. $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{(1 - r^{n+1})}{1 - r}$ බව පෙන්වන්න. එමගින්

$(1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \dots$ ශ්‍රේණියේ පද n දක්වා එකතුව

$\left(\frac{1}{1-x} \right) \left\{ n - \frac{x^n(1-x)}{1-x} \right\}$ බව පෙන්වන්න.

- b. ශ්‍රේණියක r වන පදය $U_r = \frac{r^2 - r - 1}{(r+1)!}$ මගින් දැක්වේ.

$r = 1, 2$ සහ 3 යෙදීමෙන්,

$U_r = \frac{\lambda}{(r-1)!} + \frac{\mu}{r!} + \frac{\delta}{(r+1)!}$ වන පරිදි λ, μ, δ සොයන්න.

$r = 4$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යාපනය කරන්න.

ඒ නයින් $\sum_{r=1}^n U_r$ සොයන්න.

මෙම ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

13. a. ANURADHAPURA යන වවනගේ අක්ෂර සියල්ල යොදා ගැනීමෙන් ලබා ගත හැකි සංකරණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.

ඒවා අතරින් කොපමණ සංඛ්‍යාවක් A අක්ෂර හතරම එකට එක්වී පිහිටා තිබේද? කොපමණ සංඛ්‍යාවක් ඒවා මුලට පවතීද?

- b. පාසලක වාර්ෂික විවිධප්‍රසංගය සඳහා රංගනයන් 3ක් ද, ගායනයන් 6ක් ද නර්තනයන් 4ක් ද වැඩසටහන් ලෙස සංවිධානය කර තිබිණි. කෙසේ වෙතත් ප්‍රධාන ආරාධිත අමුත්තා තම ඉදිරිපත් කිරීම් සඳහා අපේක්ෂිතව තිබූ කාලයට වඩා වැඩි කාලයක් ගත කළ බැවින්, නියමිත කාලය තුළ වැඩසටහන නිම කිරීම සඳහා රංගනයන් 2ක් ද, ගායනයන් 4ක් ද නර්තනයන් 3ක් ද පමණක් ඇතුළත් කිරීමට තීරණය විය.

- මෙම වැඩසටහන් ඕනෑම පිළිවෙලකට ඉදිරිපත් කිරීමට අවකාශ ඇති නම්,
- එකම වර්ගයේ වැඩසටහන් එක ලඟ ඕනෑම පිළිවෙලකට ඉදිරිපත් කිරීමට අවකාශ ඇති නම්,
- එකම වර්ගයේ වැඩසටහන් නියමිත අනුපිළිවෙලකට ඕනෑම පිළිවෙලකට ඉදිරිපත් කිරීමට අවකාශ ඇති නම්, වැඩසටහන් පෙළගැස්ම සැකසිය හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

- c. එකම රූපයක $y = x^2 + 5$ හා $y = |5x + 1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් ඇඳින්න. ඒ නයින්, $|5x + 1| < x^2 + 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

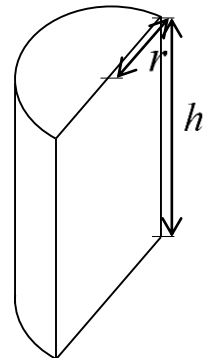
14. a. $x \neq 2$ සඳහා $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}$ යයි දී ඇත්නම්, $f'(x) = -\left\{ \frac{(3x-1)(x-1)}{(x-2)^2(x^2+1)^2} \right\}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් වක්‍රයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සොයන්න. y අක්ෂය හමුවන ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න. හැරුම්

ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}$ වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

- b. දෙන ලද ලෝහ ප්‍රමාණයක් මගින් රූපයේ පරිදි ඝන අර්ධ සිලින්ඩරයක් සෑදීමට ඇත. එහි අර්ධ වෘත්තාකාර කෙළවරවල අරය r ද උස h ද ලෙස ගනිමින්, ඝනයේ පරිමාව V සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න. ඉහත මාන ඇසුරෙන්, ඝනයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලබා ගන්න.

එම පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S , r හා V ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය අවම වන පරිදි පැවතිය යුතු r හා h හි අගයයන් අතර අනුපාතය $\pi : \pi + 2$ බව පෙන්වන්න.



15. a. $\frac{1}{(t-9)(t-4)}$ යන්න හින්න භාග වලින් දක්වා $\int \frac{1}{(t-9)(t-4)} dt$ සොයන්න.

$x^2 = t$ ආදේශය භාවිතයෙන් $\int \frac{x}{(x^2-4)(x^2-9)} dx$ අනුකලනය කරන්න.

b. a නියතයක් වන විට $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx \text{ සහ } J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \cos^2 x}{1+a^x} dx \text{ යැයි ගනිමු.}$$

$I + J = \pi$ බව පෙන්වන්න.

මෙය උපයෝගී කර ගනිමින් සහ I සහ J හි තවත් ඒකජ සංයෝජනයක් සලකමින් I සහ J අනුකල සොයන්න.

ඉහත ආකාරයේ ක්‍රමයක් සැලකීමෙන් $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \sin^2 x}{1+a^x} dx$ හි අගය සොයන්න.

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x}{1+a^x} dx$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

d. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos x dx$ සොයන්න. ඒනයිත්, $y = x^2 \cos x$ වක්‍රයෙන් ද $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ හා $y=0$ රේඛා 3න් ද මායිම් වන වර්ගඵලය සොයන්න.

16. a. $P(h, k)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා $l \equiv ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව සාප්‍රකෝණී ලෙස ඇඳි සරල රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක බණ්ඩාංක $(h + at, k + bt)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක AB හා AC පාදවල ලම්බ සමවිච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙලින්, $x - y + 5 = 0$ හා $x + 2y = 0$ වේ. A ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක $(1, -2)$ වේ. BC පාදයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිකේන්ද්‍රය O නම් O හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය, A හා O හරහා යන වෘත්තයේ සමීකරණය ලබා ගන්න.

b. $x^2 + y^2 + 10y + 21 = 0$, $x^2 + y^2 - 10y - 39 = 0$ වෘත්තවලට ඇඳි බාහිර පොදු ස්පර්ශකවල සමීකරණ සොයන්න. මේ ස්පර්ශක දෙ වැනි වෘත්තය ස්පර්ශක කරන ලක්ෂ්‍ය දෙකේ බණ්ඩාංක නිර්ණය කරන්න.

17. a. සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වන සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. කොසයින් නීතිය ද ප්‍රකාශ කරන්න.

D යනු ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද $AD \perp AC$ යැයි ද ගනිමු.

ABD ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය යෙදීමෙන්, $AD = -\frac{a \sin B}{2 \cos A}$ බව ද ADC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින්

නීතිය යෙදීමෙන්, $AD = \frac{a}{2} \sin C$ බව ද පෙන්වන්න. ඒනයිත්, $3b^2 = a^2 - c^2$ බව පෙන්වන්න.

තව ද $\cos A \cos C = \frac{2(c^2 - a^2)}{3ac}$ බව පෙන්වන්න.

b. $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයිත් $\tan \theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ සමීකරණය විසඳන්න.

Second Term Test - Grade 13 - 2019

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.

- A කොටස

වැඩිපුර බඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.

● B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිව භාර දෙන්න.

- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

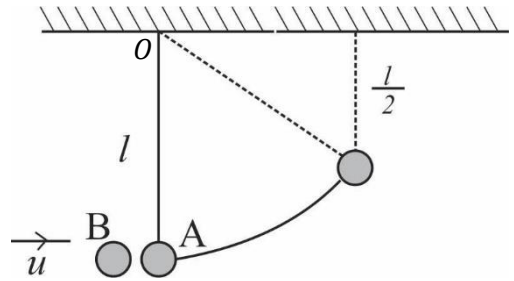
අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

(A කොටස)

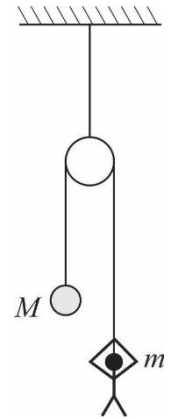
- 01) l දිගැති ලුහු අවිනන්ය තන්තුවක එක් කෙළවරකට A නමැති m ස්කන්ධයක් ඇති වස්තුවක් සම්බන්ධ කර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර සිවිලිමක පිහිටි O අවල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා පද්ධතිය O ට සිරස්ව පහළින් A පිහිටන පරිදි සමතුලිතව තබා ඇත. B වෙනත් ඒ හා සමාන ස්කන්ධයක් තිරසරව u ප්‍රවේගයෙන් විත් A හා සරළව ගැටේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e ($0 < e < 1$) නම් ගැටුමෙන් පසු A හි



ප්‍රවේගය $\frac{u}{2}(1+e)$ බව පෙන්වන්න. ගැටුමෙන් පසු A ස්කන්ධය සිව්ලිමට සිරස්ව පහළින් $\frac{l}{2}$ දුරක් උපරිම උසකට චලනය වේ නම් ගැටුමෙන් පසු A ගේ ප්‍රවේගය $\sqrt{gl}$ බව පෙන්වන්න. $u = \frac{4}{3}\sqrt{gl}$ නම් $e = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

- 02) පොළොවේ සිට H සිරස් උසින් පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට අංශුවක් තිරසර සමඟ 60° ක කෝණයක් ඉහලට ආනත දිශාවකට u ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කෙරේ. අංශුව O සිට a තිරස් දුරින් පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයකදී පොළොව මත පතිත වේ. $u^2 = \frac{2ga^2}{\sqrt{3}a+H}$ බව හා අංශුව O තිරස් මට්ටමේ සිට ඉහළ යන උපරිම උස $\frac{3a^2}{4(\sqrt{3}a+H)}$ බව පෙන්වන්න.

- 03) රූපයේ දැක්වෙන්නේ O හිදී තිරස් සිවිලිමකට සම්බන්ධ කර ඇති කුඩා සුමට කප්පියක් මගින් යන සැහැල්ලු අවිනාශ තන්තුවක එක් කෙරළවරක් M ස්කන්ධයකට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවරෙහි m ළමයෙකු එල්ලී තන්තුව දිගේ ගමන් කරන අවස්ථාවකි. ළමයා තන්තුවට සාපේක්ෂව f ඒකාකාර ත්වරණයෙන් ඉහළ නගී නම් තන්තුවේ ත්වරණය සෙවීමට අවශ්‍ය වලින සමීකරණ ලියන්න. එනමින් තන්තුවේ ත්වරණය සොයන්න.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- 04) ස්කන්ධය $M \text{ kg}$ වූ මෝටර් රථයක් සමතල මාර්ගයක නියත $V \text{ ms}^{-1}$ වේගයෙන් ගමන් කරයි. එවිට එන්ජිමේ ජවය $H \text{ kw}$ වේ. ඉන්පසු එම මෝටර් රථය තිරසර α කෝණයක ආනතයකින් යුත් මාර්ගයක එම ජවයෙන්ම $\frac{v}{3} \text{ ms}^{-1}$ නියත වේගයෙන් ගමන් කරයි. එවිට මෝටර් රථයේ ප්‍රතිරෝධය සමතල මාර්ගයේ ප්‍රතිරෝධය මෙන් දෙගුණයකි. $1000H = Mgv \sin \alpha$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජනවරණය යි.

[illegible]

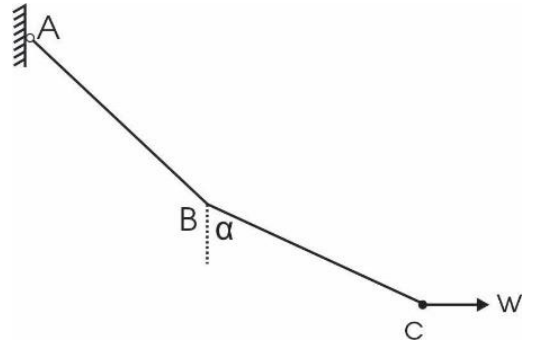
- 05) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු නිශ්ශුන්‍ය දෛශික 2කි. $|\underline{a} + \underline{b}| = |\underline{a}| = |\underline{b}|$ නම් $|\underline{a}|$ හා $|\underline{b}|$ අතර කෝණය සොයන්න.
- $|\underline{a} - \underline{b}| = |\underline{a}| = |\underline{b}|$ වන පරිදි $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික දෙක පැවතිය යුතු ආකාරය විස්තර කරන්න.

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features multiple horizontal rows, each defined by two parallel dashed lines. The rows are evenly spaced across the entire page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings present.

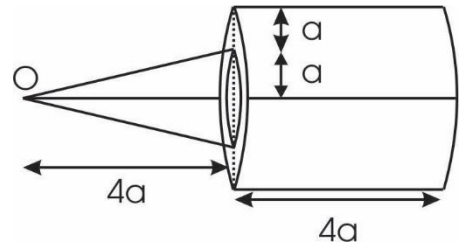
- 06) සුමට සිරස් බිත්තියකට $3a$ තිරස් දුරින් O නම් ලක්ෂ්‍යයක නා දැක්කක් සවි කර ඇත. දිග $4l$ හා බර $2W$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර බිත්තිය සමඟ ස්පර්ශව නා දැක්ක මත සමතුලිතව ඇත. දණ්ඩ බිත්තිය සමඟ θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) කෝණයක් සාදයි නම් $\sin \theta = \left(\frac{3a}{2l}\right)^{\frac{1}{3}}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි ($3a < 2l$)

[illegible]

- 09) AB, BC යනු බර W බැගින් වන ඒකාකාර දඬු 2 කි. B හිදී ඒවා සුමටව සුවල ලෙස එකට අසව් කර තිබේ. A කෙළවර අවල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව සුවල ලෙස විවර්තනය කර ඇත. C කෙළවරට ABC එකම තලයේ පිහිටන පරිදි W තිරස් බලයක් යොදා ඇත. සමතුලිතව ඇති විට BC දණ්ඩේ යටි අත් සිරසට ආනතිය α නම් $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න. තවද BC දණ්ඩ මත B හිදී ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\sqrt{2}W$ බව පෙන්වන්න.



- 10) යාබද රූපයේ දැක්වෙන්නේ එකට සවිකර ඇති අරය a ද උස $4a$ ද වන සෘජු කේතුවකින් හා අරය $2a$ ද උස $4a$ ද වන ඒකාකාර සිලින්ඩරයකින් යුත් සෘජු ඝන සංයුක්ත වස්තුවකි. වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත කේතුවේ ශීර්ෂය වන O සිට $\frac{75a}{13}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



සංයුක්ත ගණිතය 13 - II (B කොටස)

- 11) (a) මෝටර් රථ ධාවන තරඟයක යෙදෙන A හා B මෝටර් රථ 2 ක් පිළිවෙලින් $u, 2u$ ආරම්භක ප්‍රවේගවලින් සිය වලිනයන් ආරම්භ කරයි. රථ දෙක තරඟය නිම වන තුරු පිළිවෙලින් $2a, a$ ඒකාකාර ත්වරණ පවත්වා ගනිමින් තරඟය ජය පරාජයකින් තොරව නිම කරයි. තරඟය අතරවාරයේ රථ දෙක අතර ඇති විය හැකි උපරිම දුර ආරම්භයේ සිට T කාලයක දී ඇතිවේ නම් A හා B රථ දෙකෙහි වලිනයන් සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක ඇඳ එනයිත්,

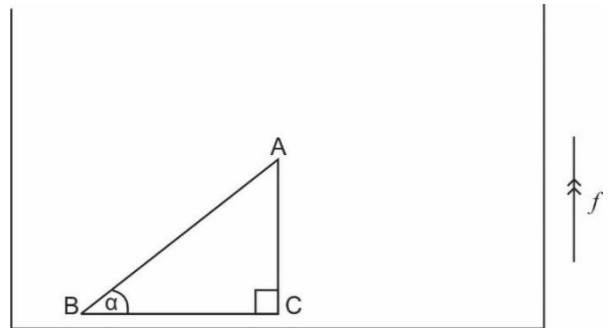
- i. $T = \frac{u}{a}$ බව පෙන්වන්න.
- ii. තරඟය නිම කිරීමට ගතවන කාලය t නම් $t = 2T$ බව පෙන්වන්න.
- iii. රථ දෙක ගමන් කළ දුර (ධාවන පථයේ දිග) $\frac{6u^2}{a}$ බව පෙන්වන්න.

- (b) P හා Q මෝටර් රථ දෙකක් තිරස් මාර්ග දෙකක, P මෝටර් රථය $V \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් බටහිර සිට නැගෙනහිර දෙසට ද Q මෝටර් රථය $14 \text{ ms}^{-1} (< V)$ ප්‍රවේගයෙන් දකුණින් 30° බටහිර දිශාවක සිට ද මෝටර් රථ දෙකම මාර්ග දෙක හමුවන O නම් ලක්ෂ්‍යයක් වෙත ගමන් කරයි. P මෝටර් රථයට සාපේක්ෂව Q මෝටර් රථය තත්පර 6 ක දී මීටර $12\sqrt{79}$ ක් ගමන් කර ඇත්නම්, ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණයක් භාවිතයෙන් V යන්න,

$$V^2 - 14V - 120 = 0 \text{ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.}$$

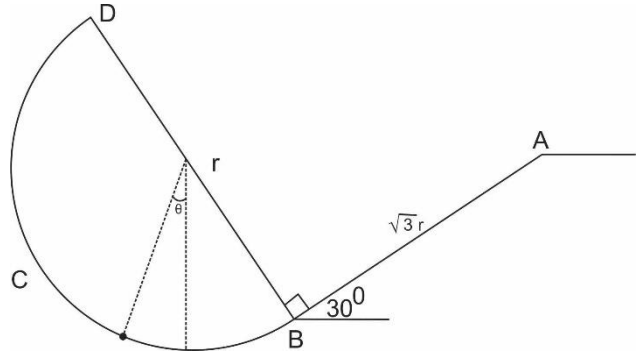
එනයිත්, V හි අගය සොයන්න. P මෝටර් රථයට සාපේක්ෂව Q මෝටර් රථය ගමන් කළ යුතු දිශාව බටහිරින් උතුරට $\tan^{-1}\left(\frac{7\sqrt{3}}{13}\right)$ ක කෝණයක් බව ද පෙන්වන්න.

- 12) (a) දී ඇති රූප සටහනෙහි ABC ත්‍රිකෝණය ස්කන්ධ M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $\angle ABC = \alpha, \angle ACB = \frac{\pi}{2}$ වේ. සුමට තිරස් පළල වේදිකාවක් සහිත උත්තෝලකයක පතුල මත BC මුහුණත මත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. (කුඤ්ඤයට වේදිකාවේ පතුල මත තිරස්ව චලනය විය හැකි බව සලකන්න.) උත්තෝලකය f ඒකාකාර ත්වරණයෙන් ඉහළ නගින අතර ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවක් AB රේඛාව මත A ලක්ෂ්‍යය තබා සිරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන තෙක් කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය සෙවීමට අවශ්‍ය වලින සමීකරණ ලියන්න. ඉහත සමීකරණ ඇසුරෙන්,



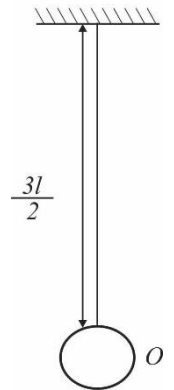
- i. කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $F = \frac{2m(g+f) \sin \alpha \cos \alpha}{(M+2m \sin^2 \alpha)}$ බවත්,
- ii. කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව අංශුවේ ත්වරණය $\frac{(g+f) \sin \alpha (M+2m)}{(M+2m \sin^2 \alpha)}$ බවත් පෙන්වන්න.

- (b) රූපයේ දැක්වෙන්නේ ත්‍රාසජනක ක්‍රීඩාවක් සඳහා සකස් කර ඇති සුමට සරල රේඛීය පෘෂ්ඨයක් හා සම්බන්ධ කර ඇති වෘත්තාකාර සුමට පෘෂ්ඨයක් සහිත මාර්ගයකි. එහි AB සරල රේඛීය කොටසේ දිග $\sqrt{3}r$ වන අතර එය තිරසරව 30° ආනත වන අතර එයට සම්බන්ධ කර ඇති BCD වෘත්තාකාර වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ අරය r වේ. වෘත්තාකාර කොටසේ විෂ්කම්භය සරල රේඛීය කොටසට ලම්භක වන පරිදින් AB හා BCD කොටස් එකම සිරස් තලයක ඇත. A වේදිකාවෙන් පහළට සිරුවෙන් ගමන් අරඹන m ස්කන්ධය ඇති ළමයෙක් මාර්ගය දිගේ $ABCD$ එකම සිරස් තලයක චලිත වෙයි. ඔහු වෘත්තාකාර පෘෂ්ඨය මත O කේන්ද්‍රය සමඟ සිරසට θ කෝණයක් සාදන පිහිටුමක දී ඔහුගේ ප්‍රවේගය V නම්,



- $V^2 = 2gr \cos \theta$ බව පෙන්වන්න.
- ඔහුගේ චලිතය ප්‍රත්‍යාවර්ථ වීමට පෙර තලය දිගේ ගමන් කළ මුළු දුර $\frac{r}{3} [2\pi + 3\sqrt{3}]$ බව පෙන්වන්න. මෙම චලිතය ආරක්‍ෂාකාරී (වෘත්තාකාර පථය දිගේ) බව පෙන්වන්න.

- 13) (a) ස්වභාවික දිග l වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක් සිවිලිමක පිහිටි O අවල ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කර අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වන කුඩයක් ගැට ගසා ඇත. කුඩය තුළට m ස්කන්ධය ඇති වදුරෙකු බැස සිටින අතර පද්ධතිය O ට සිරස්ව $\frac{3l}{2}$ දුරක් පහළින් සමතුලිතව පවතී.



- තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථ මාපාංකය $4mg$ බව පෙන්වන්න.
- අනතුරුව වදුරා කුඩය තුළ සිට සිරුවෙන් ඉවත්ව යයි. පසුව ඇතිවන චලිතයේදී O සිට $x (> l)$ දුරක් පහතින් කුඩය පිහිටි විට x දුර $\ddot{x} + \frac{4g}{l} \left[x - \frac{5l}{4} \right] = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.
දැන් $x - \frac{5l}{4} = X$ යැයි ගනිමු.
එවිට ඉහත චලිතය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරය ලබන බව පෙන්වා චලිතය සරල අනුවර්තී බව පෙන්වන්න.
- චලිතයේ දෝලන කේන්ද්‍රය හා විස්ථාරය සොයා චලිතය පූර්ණ සරල අනුවර්තී බව පෙන්වන්න.
- චලිතයේ ආවර්ත කාලය $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න.
- වදුරා කුඩය රැගෙන O වෙතට විත් කුඩය සමඟ පහළට ගුරුත්වය යටතේ නිදහසේ චලනය වන පරිදි $\sqrt{2gl}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට පතී. එවිට වදුරා O ට පහළින් y දුරකින් ($y > l$) සිටින විට y දුර,
 $ly^2 + 2g(y-l)^2 - 2gyl - 2gl^2 = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.
- ඉහත සමීකරණය ඇසුරින් O සිට වදුරා සහිත කුඩය ලඟා වන උපරිම දුර O සිට $3l$ බව පෙන්වන්න.

- 14) (a) O අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යැයි ගනිමු. AB මත D ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $AD : DB = 1:3$ වන පරිදිය. $OD : DE = 1:2$ වන පරිදි OD රේඛාව E දක්වා දික්කර ඇත. $\overrightarrow{DE} = \frac{3\underline{a} + \underline{b}}{2}$ හා $\overrightarrow{AE} = \frac{5\underline{a} + 3\underline{b}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

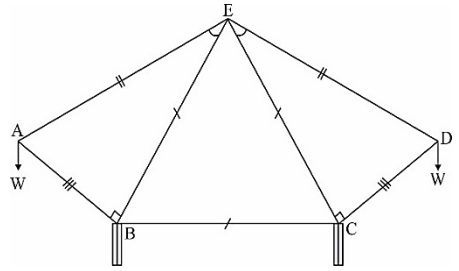
දැන් OE සරල රේඛාවට සමාන්තරව B හරහා සරල රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. එය දික්කළ AE සරල රේඛාව F හිදී හමුවේ.

$\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{OE}$ ද $\overrightarrow{AF} = \mu \overrightarrow{AE}$ ලෙස ගෙන, $\lambda = \frac{8}{3}$ හා $\mu = 4$ බව පෙන්වන්න.

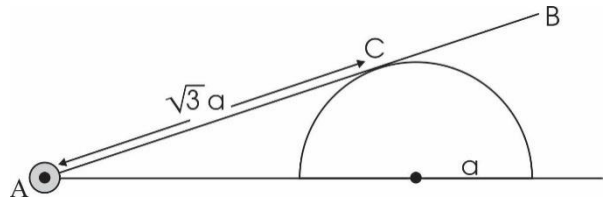
එනමින් $AE : EF$ අනුපාතය සොයන්න. $\overrightarrow{BF}$ ද සොයන්න.

- (b) OXY තලයේ වූ $A \equiv (8,0), B \equiv (8,6), C \equiv (0,6)$ වූ ලක්ෂ්‍ය 3 කි. O යනු මූල ලක්ෂ්‍ය වේ. OA, AB, CB හා OC පාද ඔස්සේ පිළිවෙලින් නිව්ටන් P, Q, R හා S වල අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. මෙහි සියලු දුරවල් මැන ඇත්තේ මීටර් වලිනි. මෙම බල පද්ධතියේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $2x - 3y - 6 = 0$ ඔස්සේ වූ තනි බලයකට උභ්‍යන්තය වේ. O මූලය වටා බල පද්ධතියේ වාමාර්ත සුර්ණය $42Nm$ වේ. $S = 2$ නම්, P, Q හා R බල වල විශාලත්ව සොයන්න. දැන් අතිරේක බලයක් පද්ධතියට එකතු කිරීමෙන් නව පද්ධතිය වාමාර්තව $70Nm$ වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වේ. අතිරේක බලයෙහි විශාලත්වය දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

- 15) (a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ සැහැල්ලු දඬු 7කින් යුක්ත වූ රාමු සැකිල්ලකි. A හා D සන්ධි වල දී W භාරයන් එල්ලා ඇත. B හා C සුමට ආධාරක මත $ABCD$ රාමු සැකිල්ල එකම සිරස් තලයක පවතින පරිදි සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත. $BC = BE = EC$ වේ. $AB = CD$ හා $EA = ED$ වේ. $\angle AEB = \angle CED = 30^\circ$ වන අතර $\angle ACD = \angle ABE = 90^\circ$ කි. B හා C හිදී ප්‍රතික්‍රියා සොයා දඬුවල ප්‍රත්‍ය බල ආතති තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර ඒවායේ විශාලත්වයන් සොයන්න.

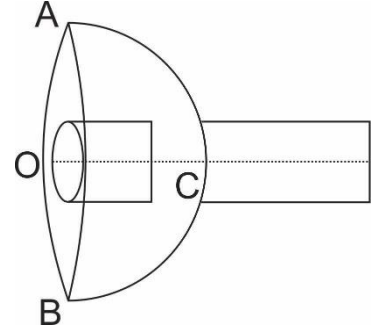


- (b) බර w වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග $2a$ වන අතර එය A හිදී සුමටව අසව් කර ඇත. මෙම දණ්ඩ අරය a හා බර w වන ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර තැටියක වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ දී C හිදී ස්පර්ශවන පරිදි තබා ඇත්තේ $AC = \sqrt{3}a$ වන පරිදිය. C හිදී ස්පර්ශය සුමට වන අතර අර්ධ වෘත්ත තැටියේ තල ආධාරකය රළු තිරස් ගෙබිමක ගැටෙමින් පද්ධතිය සමතුලිතව පවතී. ගෙබිම හා තල ආධාරකය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්, $\mu \geq \frac{4-\sqrt{3}}{13}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.



16)

අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න.



අරය $3a$ හා ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයකින් අරය a වූ උස $2a$ සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩර කොටසක් කපා ඉවත්කරනු ලැබේ. දැන් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ඉතිරි කොටසෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨයට C හිදී අරය a උස $3a$ වූ හා ඝනත්වය $k\sigma$ වූ සිලින්ඩරයක් සවිකරනු ලබන්නේ ඒවයේ සමමිතික අක්ෂ සමපාත වන පරිදිය. දැන් ලැබෙන R ඝන වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත O සිට $\frac{(73+54K)a}{4(16+3k)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අනතුරුව එම R ඝන වස්තුව AOB සරල රේඛාව අඩංගු පෘෂ්ඨය තිරසර α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) කෝණයකින් ආනත රළු තලයක් මත AOB රේඛාව උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන ලෙස ද සමතුලිතව තබනු ලැබේ. R වස්තුව හා තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම් $\mu \geq \tan \alpha$ බව ද, $\tan \alpha < \frac{12(16+3k)}{73+54k}$ බව ද පෙන්වන්න.

17) (a) A හා B යනු S නියැදි අවකාශයේ ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. පහත දැක්වෙන එක එකක් අර්ථ දක්වන්න.

- A හා B නිරවශේෂ සිද්ධි වේ.
- A හා B අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර සිද්ධි වේ.

(b) A හා B යනු දෙන ලද නියැදි අවකාශයක ඕනෑම සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. A' හා B' යනු පිළිවෙලින් A හා B සිද්ධිවල අනුපූරක සිද්ධි වේ.

- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ බව පෙන්වන්න.

$P(A) = \frac{2}{5}$ ද, $P(B') = \frac{3}{10}$ ද, $P(A' \cup B') = \frac{17}{20}$ ද නම්, $P(A' \cap B')$, $P(A \cup B)$ හා $P(A' \cap B)$ සොයන්න.

(c) පෙට්ටියක සර්ව සම නිල් බෝල 3ක් රතු බෝල 4 ක් හා කොළ බෝල 5 ක් අඩංගු වේ. වරකට එක බැගින් ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව බෝල තුනක් සසම්භාවී ලෙස පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ.

- බෝල තුනම සමාන වර්ණයෙන් වීමේ,
- පිළිවෙලින් නිල්, රතු හා කොළ බෝල ලැබීමේ
- බෝල තුනෙන් කිසිම බෝලයක් රතු නොවීමේ,
- යටත් පිරිසෙයින් එක් බෝලයක් වත් රතු වීමේ, සම්භාවිතා සොයන්න.

Second Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part A - Grade 13

Part A.

1. When $n=1$, $L.H.S = 13^n - 4^n$
 $= 9$

Therefore, it is true for $n=1$. (5)

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$, assuming that the result is true for $n=p$.

i.e. $13^p - 4^p = 9k$; $k \in \mathbb{N}$. (5)

When $n=p+1$, $13^{p+1} - 4^{p+1}$

$$= 13^p \times 13 - 4^{p+1}$$

$$= (4^p + 9k) \times 13 - 4^{p+1}$$

$$= 4^p \times 13 - 4^p \times 4 + 13 \times 9k$$

$$= 4^p \times 9 + 13 \times 9k$$

$$= 9(4^p + 13k)$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r \in \mathbb{N}} \quad (5)$

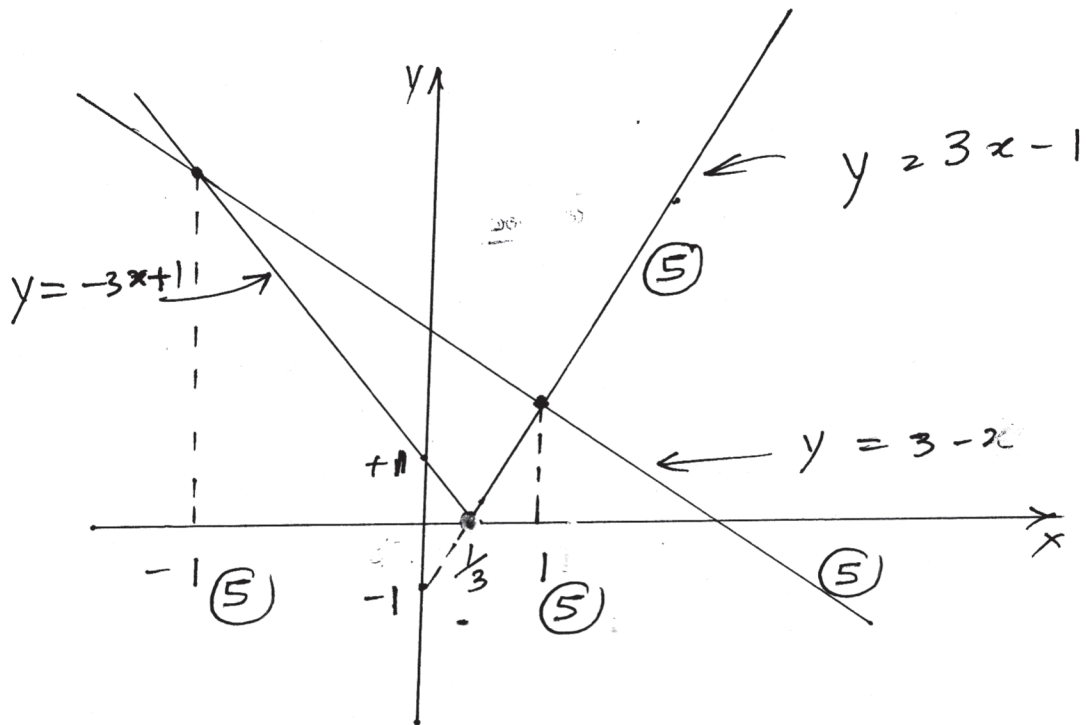
$$= 9r; r \in \mathbb{Z}$$

Hence, if the result is true for $n=p$, then it is also true for $n=p+1$. Therefore by using the principle of Mathematical Induction, the result is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$. (5)



$$02. \quad 3 - x \leq |3x - 1|$$

$$|3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1 & ; x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1 & ; x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



$$-3x + 1 = 3 - x$$

$$-2x = 2$$

$$\therefore x = -1$$

$$3x - 1 = 3 - x$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

$$x \in [-1, 1] \quad (5)$$



$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2}$$

Let $x - \pi = \theta$. Then,

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2})}{(-\theta)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \quad (5)$$

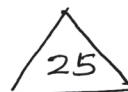
$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2 (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right]^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

$$= \left\{ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right\}^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4(1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{4(1+1)} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8}}} \quad (5)$$



$$04. \left. \begin{array}{l} \text{Women} - 7 \\ \text{men} - 8 \end{array} \right\} \rightarrow 12$$

Women men

$$5 \quad 7 \rightarrow {}^7C_5 \times {}^8C_7$$

$$6 \quad 6 \rightarrow {}^7C_6 \times {}^8C_6$$

$$7 \quad 5 \rightarrow {}^7C_7 \times {}^8C_5$$

$$\begin{aligned} {}^7C_5 \times {}^8C_7 &= \frac{7!}{2!5!} \times \frac{8!}{1!7!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} \times 8 \\ &= 21 \times 8 \\ &= 168 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^7C_6 \times {}^8C_6 &= \frac{7!}{1!6!} \times \frac{8!}{2!6!} = 7 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{2} \\ &= 49 \times 4 \\ &= 196 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^7C_7 \times {}^8C_5 &= \frac{7!}{0!7!} \times \frac{8!}{3!5!} = 1 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \\ &= 56 \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \text{The number of permutations of} \\ \text{committees with 12 members} \end{array} \right\} = 168 + 196 + 56 = \underline{\underline{420}} \quad (5)$$

$$(i). {}^7C_7 \times {}^8C_5 = \underline{\underline{56}} \quad (5)$$

$$(ii) {}^7C_5 \times {}^8C_7 = \underline{\underline{168}} \quad (5)$$



5. $U_r = \underline{\underline{r^3}}$ (5)

$$\begin{aligned} f(r+1) - f(r) &= r^2(r+1)^2 - (r-1)^2 r^2 \\ &= r^2 \{ r^2 + 2r + 1 - r^2 + 2r - 1 \} \\ &= r^2(4r) \\ &= 4r^3 \\ &= 4r \quad (5) \end{aligned}$$

$$\therefore f(r+1) - f(r) = 4u_r$$

when $r = 1$ $f_{(2)} - f_{(1)} = 44$

$$r=2 \quad f(3) - f(2) = 4 \quad u_2 \quad (5)$$

$$r=3 \quad f(4) - f(3) = 4^4 - 3^4$$

.	.	.
.	.	.

$$r = n-1 \quad f_{(n)} - f_{(n-1)} = 4 \cdot 4^{n-1} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$r=n \quad \frac{f_{(n+1)} - f_{(n)}}{1} = 4u_n$$

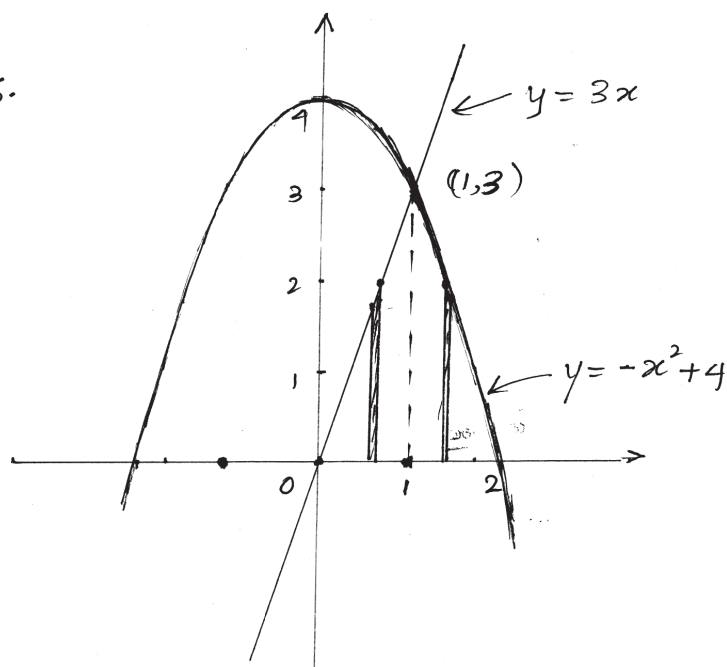
$$f_{(n+1)} - f_{(1)} = 4 \sum_{r=1}^n u_r \quad (5)$$

$$n^2(n+1)^2 - 0 = 4 \sum_{r=1}^n ur$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n u_r = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (5)$$



06.



$$\begin{aligned}
 \text{Volume generated} &= \int_0^1 \pi (3x)^2 dx + \int_1^2 \pi (-x^2 + 4)^2 dx \quad (5) \\
 &= 9\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^3}{3} + 16x \right]_1^2 \quad (5) \\
 &= 9\pi \frac{1}{3} + \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 - \frac{1}{5} + \frac{8}{3} - 16 \right) \quad (5) \\
 &= 3\pi + \pi \left(\frac{31}{5} - \frac{56}{3} + 16 \right) \\
 &= \pi \left(\frac{93 - 280 + 19 \times 15}{15} \right) \\
 &= \pi \frac{93 - 280 + 285}{15} \\
 &= \frac{98}{15} \pi \quad (5)
 \end{aligned}$$

25

$$07. \quad x = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$y = t + \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + -\frac{1}{2} t^{-3/2} = 1 - \frac{1}{2t\sqrt{t}} \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2t\sqrt{t} - 1}{2t\sqrt{t}} \times \frac{2\sqrt{t}}{1} = \underline{\underline{2\sqrt{t} - \frac{1}{t}}} \quad (5)$$

$$\text{When } t=4; \quad \frac{dy}{dx} = 2 \times 2 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} \quad (5)$$

Also the point relevant to $t=4$ is
 $(2, 4\frac{1}{2}) \quad (5)$

Then the equation of tangent drawn
 at the point $(2, 4\frac{1}{2})$

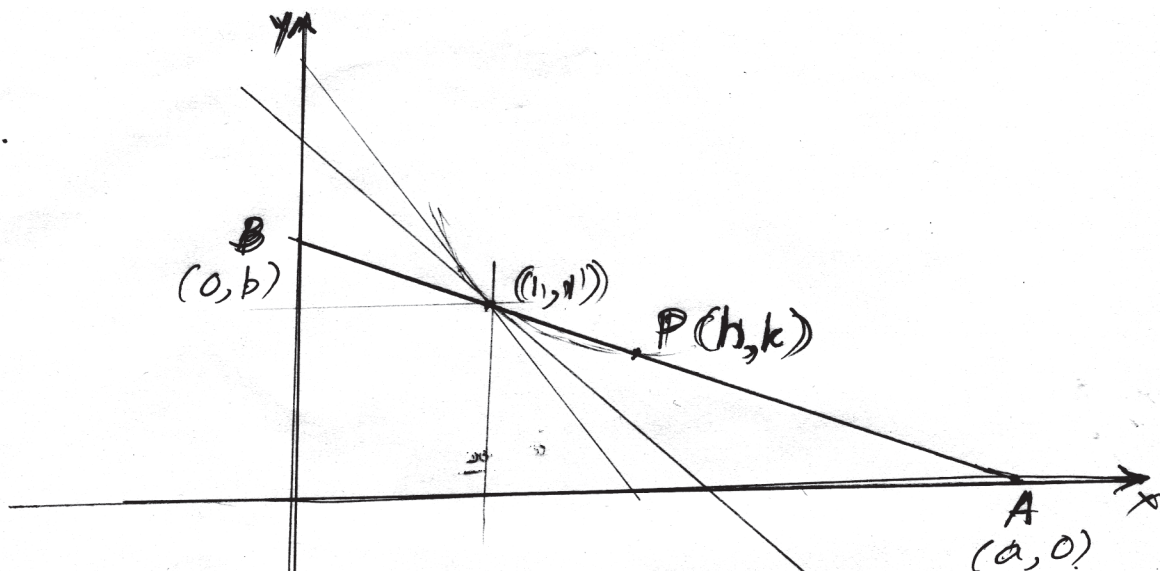
$$\frac{y - 4\frac{1}{2}}{x - 2} = \frac{3\frac{3}{4}}{1} \Rightarrow \frac{2y - 9}{2} = (x - 2) \times \frac{15}{4}$$

$$4y - 18 = 15x - 30$$

$$\underline{\underline{15x - 4y - 12 = 0}} \quad (5)$$



08.



Let $P(h, k)$ be the mid-point of line segment AB passing through the point $(1, 1)$.
Let the line segment AB meet the coordinate axes at the points $A(a, 0)$ and $B(0, b)$ respectively.

$$m = -\frac{b}{a} \quad (5)$$

$$\frac{y-0}{x-a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (6)$$

Since it passes through $(1, 1)$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow a + b = ab \quad (7)$$

$$\text{But } P(h, k) = P\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$\therefore a = 2h \text{ and } b = 2k \quad (8)$$

Substituting these values in (1)

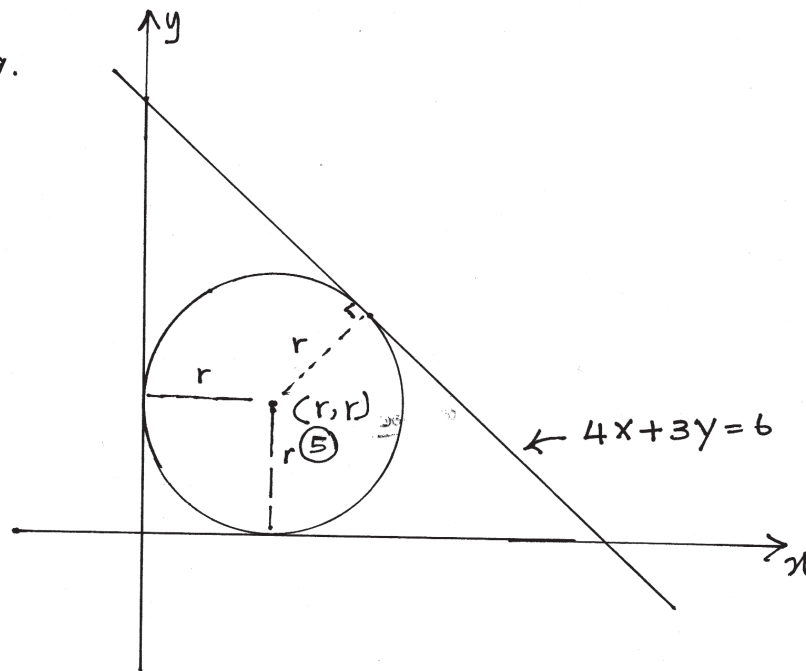
$$2h + 2k = 4hk$$

Since h, k are variable, let $h = x$ and $k = y$.

$$\text{Then } 2x + 2y = 4xy \Rightarrow \underline{2x + 2y = 2xy = 0}$$

25

09.



$$r = \left| \frac{4r + 3r - 6}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right|$$

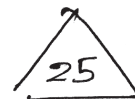
$$\pm r = \frac{7r - 6}{5}$$

$$\oplus \rightarrow \underline{\underline{r = 3}} \quad \ominus \rightarrow \underline{\underline{r = \frac{1}{2}}} \quad (10)$$

The eqⁿ of circles are.;

$$\underline{\underline{(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3^2}} \quad \text{and}$$

$$\underline{\underline{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2}} \quad (10)$$



$$10. \quad \sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (5)$$

$$L.H.S = \sin 2\theta = \frac{2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = R.H.S$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta - \tan \theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} - \tan \theta \\ &= \tan \theta \left\{ \frac{2 - 1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right\} \\ &= \tan \theta \left\{ \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$1 + \tan^2 \theta > 0.$$

$$\therefore \tan \theta (1 - \tan^2 \theta) (1 + \tan^2 \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan \theta = 0, \tan \theta = 1 \text{ or } \tan \theta = -1 \quad (5)$$

$$\therefore \tan \theta = \tan 0, \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4} \text{ or } \tan \theta = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\therefore \theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}, \theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \text{ or } \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{When } n=0, \theta=0$$

$$\text{When } n=0; \theta=0$$

$$\text{When } n=0; \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$n=1, \theta=\pi$$

$$n=1; \theta = \frac{5\pi}{4} \quad (10)$$

$$n=1, \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$n=2, \theta=2\pi$$

$$n=2, \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \left\{ 0, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\} \quad (5)$$



⑪ a) $\lambda(x^2+x+1) = 2x+1$

$$\lambda x^2 + (\lambda-2)x + \lambda-1 = 0$$

When the roots are real and positive.

$$\Delta \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \quad (10)$$

$$(\lambda-2)^2 - 4\lambda(\lambda-1) \geq 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 4\lambda \geq 0$$

$$-3\lambda^2 + 4 \geq 0$$

$$3\lambda^2 - 4 \leq 0$$

$$(\sqrt{3}\lambda-2)(\sqrt{3}\lambda+2) \leq 0$$

	$(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}})$	$(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$	$(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$
$(\sqrt{3}\lambda-2)(\sqrt{3}\lambda+2)$	+	-	+

$$\lambda \in \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \leadsto \text{A. } (10)$$

$$-\frac{(\lambda-2)}{\lambda} > 0$$

$$\frac{(\lambda-2)\lambda}{\lambda^2} < 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$\lambda(\lambda-2)$	+	-	+

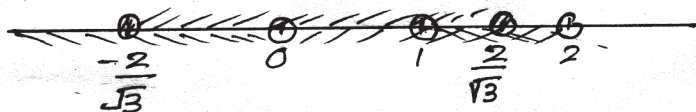
$$\lambda \in (0, 2) \leadsto \text{B. } (5)$$

$$\frac{\lambda-1}{\lambda} > 0$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda^2} > 0.$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
	$\oplus$	$-$	$\oplus$

$$\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \rightarrow \textcircled{C} \textcircled{5}$$



$$\lambda \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \textcircled{5}$$

$$\text{When } \lambda = 1\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\lambda - 2}{\lambda} = \left(\frac{10}{9} - 2\right) \div \frac{10}{9}$$

$$= -\frac{8}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= -\frac{4}{5} \textcircled{5}$$

$$\alpha\beta = \frac{\lambda-1}{\lambda} = \left(\frac{10}{9} - 1\right) \div \frac{10}{9}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{9}{10}$$

$$= \frac{1}{10} \textcircled{5}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{16}{25} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{16-5}{25} = \frac{11}{25}$$

$$\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\beta)^2$$

$$= \frac{1}{100}$$

$\therefore$ Eqⁿ is.

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha\beta)^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{11}{25}x + \frac{1}{100} = 0$$

$$\underline{100x^2 - 44x + 1 = 0} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{11}{25} \times \frac{100}{1} = 44.$$

$$\frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 100$$

$\therefore$ The Eqⁿ is

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)x + \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = 0$$

$$\underline{x^2 - 44x + 100 = 0.} \quad (10)$$

60

$$b) \quad m^2(x^2 - x) + 2mx + 3 = 0$$

$$m^2x^2 - m^2x + 2mx + 3 = 0$$

$$m^2x^2 + (2m - m^2)x + 3 = 0$$

$$\alpha + \beta = -\frac{(2m - m^2)}{m^2} = \frac{m - 2}{m} \quad (5)$$

$$\alpha\beta = \frac{3}{m^2} \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{4}{3}$$

$$3(\alpha^2 + \beta^2) = 4\alpha\beta$$

$$3(\alpha + \beta)^2 - 6\alpha\beta = 4\alpha\beta$$

$$3(\alpha + \beta)^2 - 10\alpha\beta = 0 \quad (5)$$

$$3\left\{\left(\frac{m-2}{m}\right)^2 - 10 \cdot \frac{1}{m^2}\right\} = 0 \quad (5)$$

$$m^2 - 4m - 6 = 0 \quad (5)$$

$$m_1 + m_2 = 4 \quad \text{and} \quad m_1 m_2 = -6 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_1^2}{m_2} + \frac{m_2^2}{m_1} &= \frac{m_1^3 + m_2^3}{m_1 m_2} \\ &= \frac{(m_1 + m_2)^3 - 3m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \quad (5) \end{aligned}$$

$$= \frac{4^3 - 3(-6)4}{-6} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{\frac{-68}{3}}}$$

40

$$c) f(x) = 2x^3 + rx^2 - 12x - 7$$

$$= (x-\alpha)^2 (2x+A) \quad (10)$$

$$= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) (2x+A)$$

$$= 2x^3 + Ax^2 - 4\alpha x^2 - 2A\alpha x + 2\alpha^2 x + \alpha^2 A$$

$$= 2x^3 + (A-4\alpha)x^2 + (2\alpha^2 - 2A\alpha)x + \alpha^2 A$$

$$x^2 \Rightarrow A - 4\alpha = r \quad (1)$$

$$x \Rightarrow 2\alpha^2 - 2A\alpha = -12 \quad (2) \quad (15)$$

$$\text{constant} \Rightarrow \alpha^2 A = -7 \quad (3)$$

$$(2) \times \alpha + (3) \times 2$$

$$2\alpha^3 = -12\alpha - 14$$

$$\alpha^3 + 6\alpha + 7 = 0$$

$$(\alpha-1)(\alpha^2 - \alpha - 7) = 0 \quad (5)$$

$$\alpha = 1 \quad \text{or} \quad \alpha^2 - \alpha - 7 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-7) \\ \neq \alpha \in \mathbb{Z}.$$

$$\therefore \underline{\underline{\alpha = 1}} \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow$$

$$A = -7$$

$$(1) \Rightarrow$$

$$-7 - 4 = r$$

$$\underline{\underline{r = -11}} \quad (5)$$

$$\therefore f(x) =$$

$$(x-1)^2 (2x-7)$$

(10)

50

12. a. Let $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$

$r S_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n+1}$

$$S_n (r-1) = r^{n+1} - 1$$

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

$$= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \triangle 10$$

$$(1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + \dots$$

$$= \frac{1-x^2}{1-x} + \frac{1-x^3}{1-x} + \frac{1-x^4}{1-x} + \dots \quad \textcircled{10}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right) \left\{ n - (x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{n+1}) \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right) \left\{ n - x^2 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} \right) \left\{ n - \frac{x^2 (1-x^n)}{1-x} \right\} \quad \textcircled{25} \quad \triangle 35$$

b. $U_1 = \frac{1^2 - 1 - 1}{(1+1)!} = -\frac{1}{2}$

$$U_2 = \frac{2^2 - 2 - 1}{(2+1)!} = \frac{1}{6}$$

$$U_3 = \frac{3^2 - 3 - 1}{(3+1)!} = \frac{5}{4 \times 3 \times 2} = \frac{5}{24}$$

$$U_4 = \frac{4^2 - 4 - 1}{(4+1)!} = \frac{11}{5 \times 24} = \frac{11}{120} \quad \triangle 20$$

$$\text{Also, } u_1 = \frac{\lambda}{0!} + \frac{\mu}{1!} + \frac{\delta}{2!}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{1} + \frac{\mu}{1} + \frac{\delta}{2}$$

$$-1 = 2\lambda + 2\mu + \delta \quad \text{--- (1) (5)}$$

$$u_2 = \frac{\lambda}{1!} + \frac{\mu}{2!} + \frac{\delta}{3!}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{\lambda}{1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\delta}{6}$$

$$1 = 6\lambda + 3\mu + \delta \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$u_3 = \frac{\lambda}{2!} + \frac{\mu}{3!} + \frac{\delta}{4!}$$

$$\frac{5}{24} = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{6} + \frac{\delta}{24}$$

$$5 = 12\lambda + 4\mu + \delta \quad \text{--- (3) (5)}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 2 = 4\lambda + \mu \quad \text{--- (A)}$$

$$(3) - (2) \Rightarrow 4 = 6\lambda + \mu \quad \text{--- (B)}$$

$$(B) - (A) \Rightarrow 2 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \quad (5)$$

$$\therefore \mu = -2 \quad (5)$$

$$\therefore \delta = 5 - 12 + 8$$

$$\delta = 1 \quad (5)$$

$$\therefore \lambda = 1, \mu = -2, \delta = 1$$

$$\text{Now } u_r = \frac{1}{(r-1)!} - \frac{2}{r!} + \frac{1}{(r+1)!} \quad (5)$$

$$\text{when } r=4, \quad u_4 = \frac{1}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$\begin{aligned}
 u_4 &= \frac{1}{6} - \frac{2}{24} + \frac{1}{120} \\
 &= \frac{20 - 10 + 1}{120} \\
 &= \frac{11}{120} \quad (5)
 \end{aligned}$$

$\therefore$ it is true for $n \geq 4$.

$$u_r = \frac{1}{(r-1)!} - \frac{2}{r!} + \frac{1}{(r+1)!}$$

$$\text{for } r=1, \quad u_1 = \frac{1}{0!} - \frac{2}{1!} + \frac{1}{2!}$$

$$\text{for } r=2, \quad u_2 = \frac{1}{1!} - \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} \quad (10)$$

$$r=3, \quad u_3 = \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!}$$

$\vdots$

$$r=n-2, \quad u_{n-2} = \frac{1}{(n-3)!} - \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

$$r=n-1, \quad u_{n-1} = \frac{1}{(n-2)!} - \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \quad (5)$$

$$r=n, \quad u_n = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = 1 - 2 + 1 + \frac{1}{n!} - \frac{2}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1 - (n+1)}{(n+1)!}$$

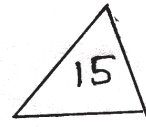
$$= \frac{-n}{(n+1)!} \quad (10)$$

70
70

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^n u_r &= \frac{-n}{n!(n+1)} = \frac{-1}{n!} \left(\frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{-1}{n!} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n u_r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n!} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right) \\ &= \frac{-1}{\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} \right) \\ &= 0 \times 1 \\ &= 0 \quad (10)\end{aligned}$$

$\therefore$ the series is convergent. (5)



13. @ A N U R D H A P U R A

A N U R D H P

4 1 2 2 1 1 1 $\rightarrow 12$

$$\frac{12!}{4! 2! 2!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 2}$$

$$= \underline{\underline{4989600}} \leftarrow \text{No. of all permutations.} \quad (15)$$

$$\frac{9!}{2! 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2}$$

$$= \underline{\underline{90720}} \leftarrow \text{No. of Ps taking 4 As as 1 letter.} \quad (20)$$

$$\frac{8!}{2! 2!} = \underline{\underline{10080}} \leftarrow \text{No. of Ps when 4 As are at the beginning.} \quad (20)$$

55

(b) Dramas - 3 $\rightarrow$ 2
Songs - 6 $\rightarrow$ 4
Dances - 4 $\rightarrow$ $\frac{3}{9}$

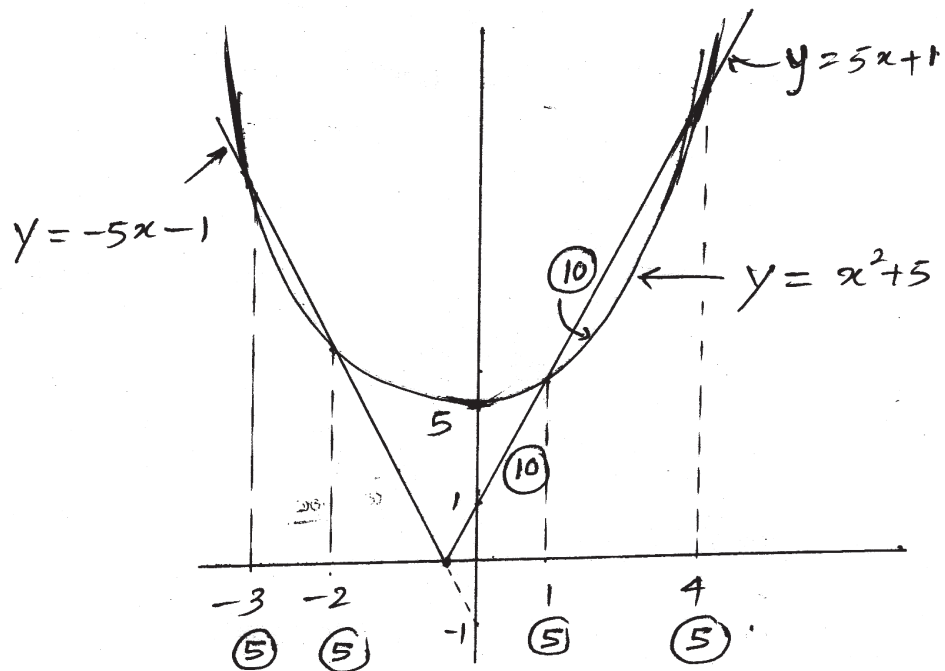
(i) $9! = \underline{\underline{362880}} \quad (15)$

(ii) $3! \times 2! \times 4! \times 3! = 36 \times 48$
 $= \underline{\underline{1728}} \quad (15)$

(iii) $3! = \underline{\underline{6}} \quad (15)$

46

(19) (c)



$$-5x - 1 = x^2 + 5$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = -3, x = -2$$

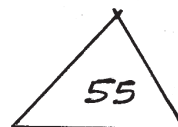
$$5x + 1 = x^2 + 5$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 4, x = 1$$

$$\underline{(-\infty, -3) \cup (-2, 1) \cup (4, \infty)} \quad (15)$$



14) a) for $x \neq 2$; $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)(x^2+1) \times 0 - 1 \{ (x-2)2x + (x^2+1) \}}{(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2 + 4x + x^2 - 1}{(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2(x^2+1)^2}$$

$$= - \left\{ \frac{(3x-1)(x-1)}{(x-2)^2(x^2+1)^2} \right\} \quad \triangle 25$$

When $x = \frac{1}{3}$ and $x = 1$; $f'(x) = 0$ 10

Then, $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{30}$$

$$f(1) = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \left(\frac{1}{3}, -\frac{27}{30}\right)$ and $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ are turning points.

There is a vertical asymptote; $x=2$. 5

	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$x = \frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$x = 1$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-	(20)

$\therefore (\frac{1}{3}, -\frac{27}{30}) \leftarrow \text{Local minimum.} \quad (10)$

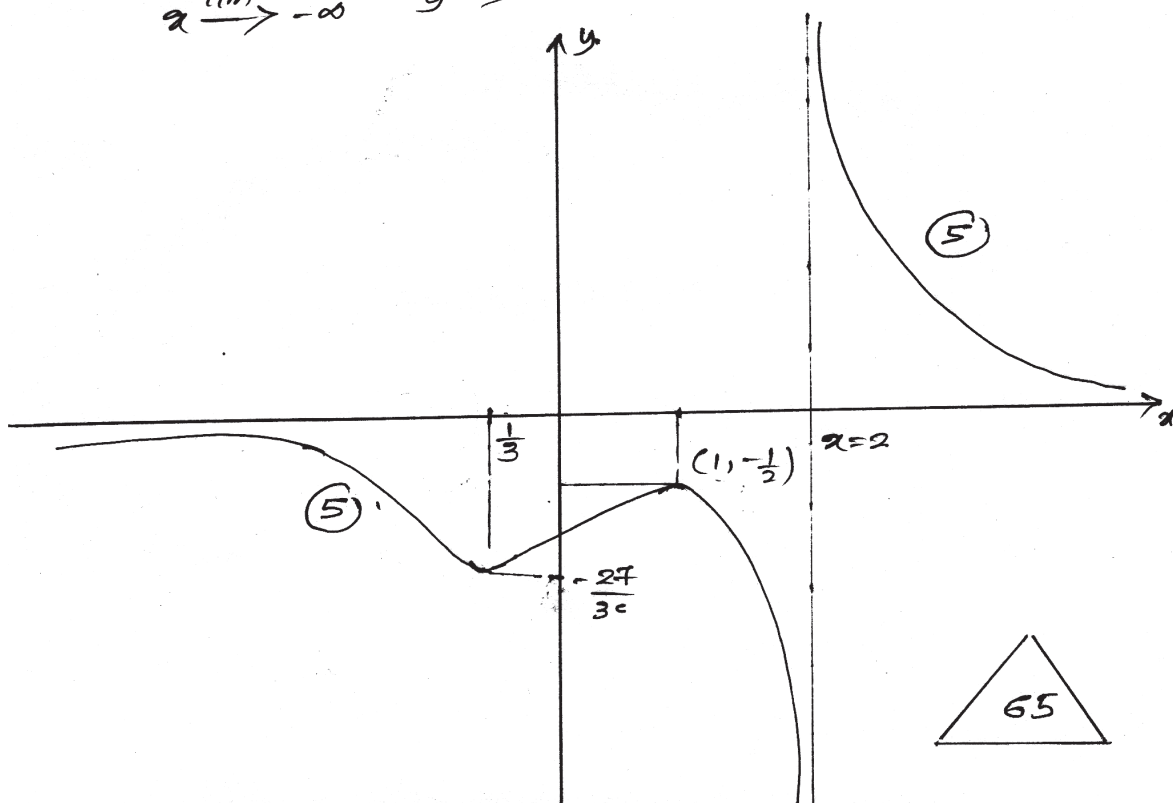
$(1, -\frac{1}{2}) \leftarrow \text{Local maximum.}$

$$x \xrightarrow{\text{lim}} 2^+ \quad y \xrightarrow{\text{lim}} +\infty \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{\text{lim}} 2^- \quad y \xrightarrow{\text{lim}} -\infty$$

$$x \xrightarrow{\text{lim}} \infty \quad y \xrightarrow{\text{lim}} 0 \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{\text{lim}} -\infty \quad y \xrightarrow{\text{lim}} 0$$



$$b) \quad V = \frac{1}{2} \pi r^2 h$$

$$S = \pi r^2 + 2rh + \frac{2\pi rh}{2}$$

$$= \pi r^2 + 2rh + \pi rh$$

$$= \pi r^2 + (2+\pi)r \cdot \frac{2V}{\pi r^2}$$

$$= \pi r^2 + (2+\pi) \frac{2V}{\pi r}$$

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi r + \frac{2(2+\pi)V}{\pi} (-1)r^{-2}$$

$$= 2\pi r - \frac{2V(2+\pi)}{\pi r^2} \cdot \left(\frac{-1}{r^2}\right)$$

For maximum or minimum S

$$\frac{dS}{dr} = 0$$

$$2\pi r - \frac{2V(2+\pi)}{\pi r^2} = 0$$

$$2\pi r = \frac{2V(2+\pi)}{\pi r^2}$$

$$r^3 = \frac{V(2+\pi)}{\pi^2}$$

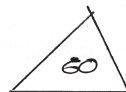
$$V = \frac{\pi^2 r^3}{(2+\pi)}$$

$$\frac{\pi^2 r^3}{(2+\pi)} = \frac{\pi r^2 h}{2}$$

$$\frac{\pi r}{(2+\pi)} = \frac{h}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{2+\pi}{2\pi}$$

$$\underline{r:h = (2+\pi):2\pi}$$



$$15) \ a) \quad \frac{1}{(t-9)(t-4)} = \frac{A}{t-9} + \frac{B}{t-4} \quad (5)$$

$$1 \equiv A(t-4) + B(t-9)$$

When $t=4$.

$$1 = B(-5)$$

$$B = -\frac{1}{5}$$

When $t=9$

$$1 = A(9-4)$$

$$A = \frac{1}{5} \quad (10)$$

$$\frac{1}{(t-9)(t-4)} = \frac{1}{5(t-9)} - \frac{1}{5(t-4)} \quad \triangle 15$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t-9)(t-4)} dt &= \int \frac{1}{5(t-9)} dt - \int \frac{1}{5(t-4)} dt \\ &= \frac{1}{5} \ln |t-9| - \frac{1}{5} \ln |t-4| \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t-9}{t-4} \right| + C \quad \triangle 15 \end{aligned}$$

When $t=x^2$

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\int \frac{1}{(x^2-9)(x^2-4)} \cdot 2x dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x^2-9}{x^2-4} \right| + C$$

$$2 \int \frac{x}{(x^2-9)(x^2-4)} dx = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x^2-9}{x^2-4} \right|$$

$$\int \frac{x}{(x^2-9)(x^2-4)} dx = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x^2-9}{x^2-4} \right| + C \quad \triangle 15$$

$$b) \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx. \quad \triangle 10$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx \quad J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \cos^2 x}{1+a^x} dx$$

$$I+J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \cos^2 x}{1+a^x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+a^x) \cos^2 x}{(1+a^x)} dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx.$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x + \frac{\sin 2x}{2} \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \pi - (-\pi) + \frac{1}{2} (\sin 2\pi + \sin 2\pi) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

$$= \pi \quad (5)$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+a^{-x}} dx \quad (5)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \cos^2 x}{1+a^x} dx = J. \quad (5)$$

$$I + J = \pi \rightsquigarrow (1)$$

$$I = J \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) \text{ and } (2) \quad I = J = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} \quad (5)$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+a^x} dx \quad J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \sin^2 x}{1+a^x} dx$$

$$I_1 + J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\sin 2x}{2} \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \left((-\pi) - \frac{\sin 2(-\pi)}{2} \right) \right\}$$

$$= \underline{\underline{\pi}} \rightsquigarrow (3) \quad (5)$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+a^x} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(-x)}{1+a^{-x}} dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^x \sin^2 x}{1+a^x} dx$$

$$= \underline{\underline{J_1}} \rightsquigarrow (4) \quad (5)$$

③ and ④

$$\underline{\underline{I_1 = J_1 = \frac{\pi}{2} \quad (5)}}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 \cos^2 x}{1+a^x} dx = \frac{\pi}{2} \rightarrow (A)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 \sin^2 x}{1+a^x} dx = \frac{\pi}{2} \rightarrow (B)$$

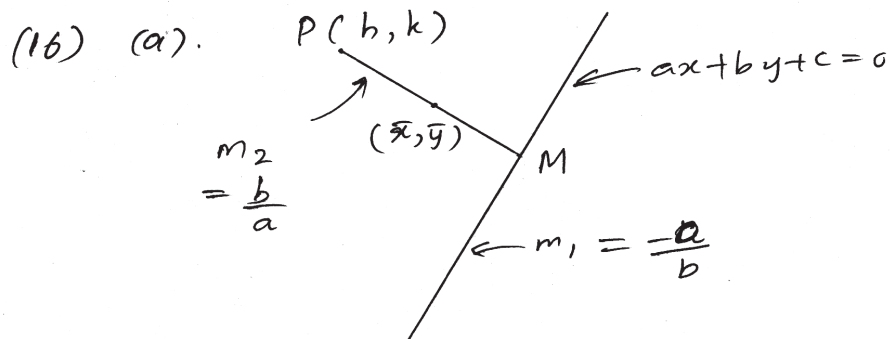
$$(A) + (B) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{1+a^x} dx = \pi \quad (5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{1+a^x} dx = \pi \quad (5)$$

55

$$\begin{aligned} c) \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 \frac{d \sin x}{dx} dx \quad (5) \\ &= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx \quad (5) \\ &= x^2 \sin x + 2 \int x \frac{d \cos x}{dx} dx \quad (5) \\ &= x^2 \sin x + 2 \left\{ x \cos x - \int \cos x dx \right\} \quad (5) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx &= \left\{ x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x \right\}_0^{\pi/2} \quad (25) \\ &= \left\{ \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} \right\} - \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2 + 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad \left| \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \right. \quad (15) \end{aligned}$$



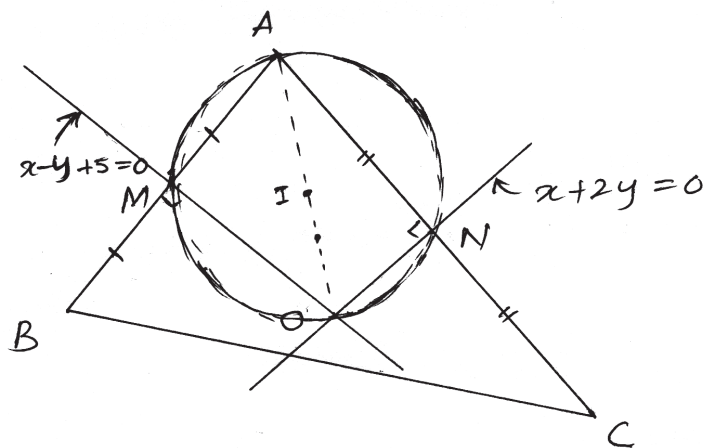
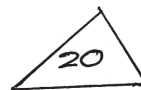
$$\frac{\bar{y}-k}{\bar{x}-h} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\bar{y}-k}{b} = \frac{\bar{x}-h}{a} = t$$

where t is a parameter.

Then $\bar{x} = at+h$ and $\bar{y} = bt+k$

$$\therefore (\bar{x}, \bar{y}) = (at+h, bt+k)$$

$\therefore$ The coordinates of any point on PM is given as $(at+h, bt+k)$



Any point on AB can be written as $(t+1, -t-2)$. When it is the mid-point M of AB, it satisfies the equation $x-y+5=0$.

$$\text{Then } t+1 + t+2 + 5 = 0 \Rightarrow 2t = -8$$

$$\Rightarrow t = -4.$$

$$\therefore M \equiv (-3, 2)$$

In the same manner, any point on AC can be written as $(t+1, 2t-2)$. When it is the mid-point (N) of AC, it satisfies the equation $x+2y=0$.

$$\therefore t+1+2(2t-2)=0$$

$$\Rightarrow 5t-3=0 \Rightarrow t=3/5.$$

$$\therefore N = \left(\frac{3}{5}+1, 2 \times \frac{3}{5}-2\right) \\ = \left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}\right)$$

Now, let's find B. Let $B = (x_B, y_B)$

$$\text{Then, } (-3, 2) = \left(\frac{1+x_B}{2}, \frac{-2+y_B}{2}\right)$$

$$x_B = -6-1 \\ = -7$$

$$y_B = 4+2 \\ = 6$$

$$\therefore B \equiv (-7, 6)$$

Let's find C; let $C \equiv (x_c, y_c)$.

$$\text{Then } \left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}\right) = \left(\frac{1+x_c}{2}, \frac{-2+y_c}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 16 = 5 + 5x_c \quad -8 = -10 + 5y_c$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{11}{5} \quad \Rightarrow y_c = \frac{2}{5}$$

$$\therefore C \equiv \left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Then equation of BC is

$$\frac{y-6}{x+7} = \left(\frac{6-\frac{2}{5}}{-7-\frac{11}{5}}\right) = \left(\frac{\frac{28}{5}}{-\frac{46}{5}}\right)$$

$$= \frac{-28}{46} = \frac{-14}{23}$$

$$23y - 138 = -14x - 98$$

$$\underline{\underline{14x + 23y - 40 = 0}}$$

Coordinates of O,

$$x + 2y = x - y + 5$$

$$\Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

$$\text{Then, } x = -2 \times \frac{5}{3} = \frac{-10}{3}$$

$$\therefore O = \left(\frac{-10}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

The centre 'I' of the circle passing through A, M, O and N is the mid-point of AO.

$$\therefore I \equiv \left(\frac{1 - \frac{10}{3}}{2}, \frac{-2 + \frac{5}{3}}{2} \right) = \left(\frac{-7}{6}, \frac{-1}{6} \right)$$

Radius (r) of this circle is $\frac{1}{2} OA$.

$$\therefore r = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{10}{3}\right)^2 + \left(-2 - \frac{5}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{13}{3}\right)^2 + \left(\frac{-11}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{169 + 121}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{290}$$

∴ The equation of that circle is

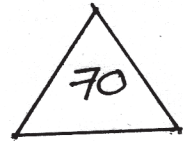
$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{290}{36} = \frac{145}{18}$$

$$x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} + y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36} = \frac{145}{18}$$

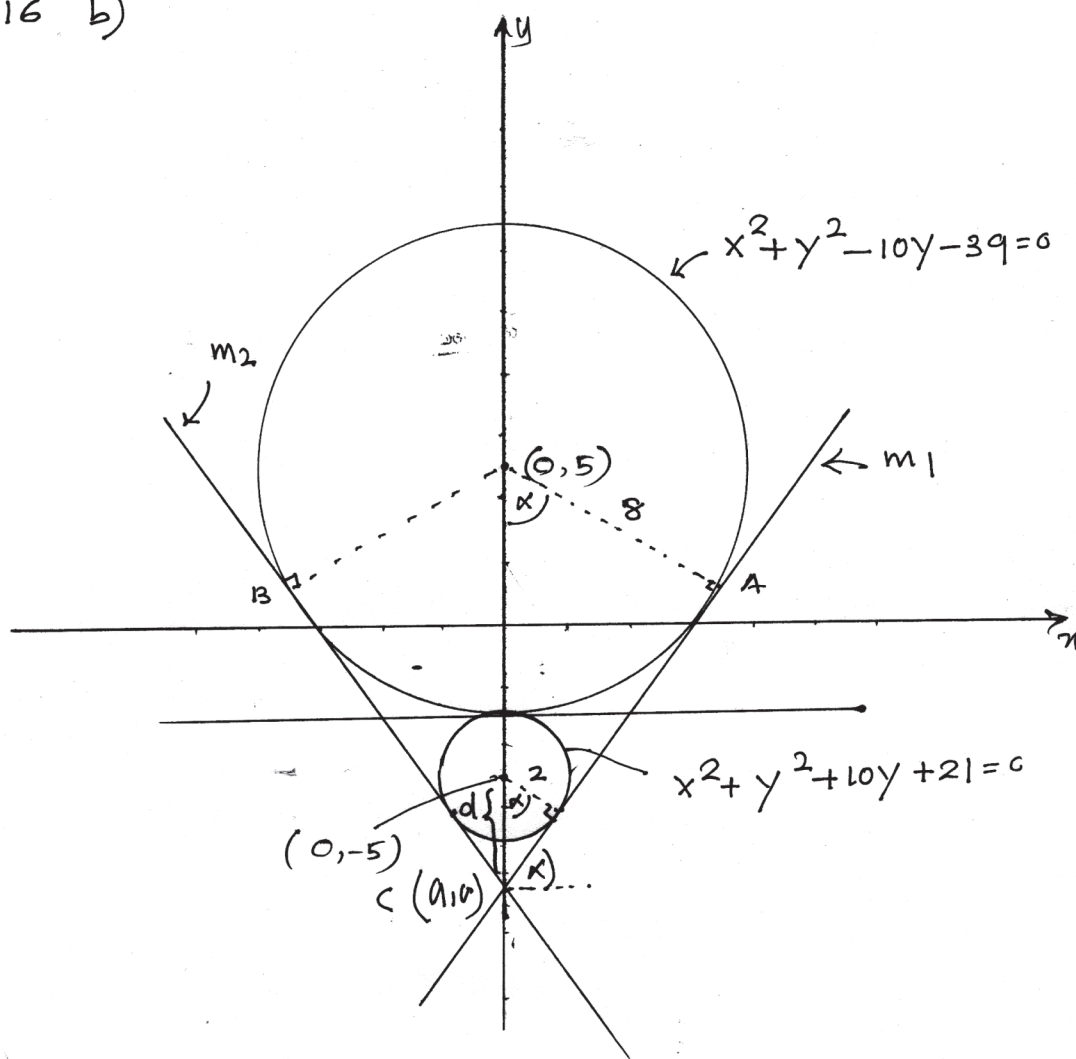
$$x^2 + y^2 + \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{25}{18} - \frac{145}{18} = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{120}{18} = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 + \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{20}{3} = 0}}$$



16 b)



$$x^2 + y^2 - 10y - 39 = 0$$

$(0, 5)$ - Center

$$r = \sqrt{5^2 + 39}$$

$$= 8$$

$$x^2 + y^2 + 10y + 21 = 0$$

$(0, -5)$ - Center

$$r = \sqrt{5^2 - 21}$$

$$= 2$$

$$\frac{8}{2} = \frac{10 + d}{d}$$

$$4d = 10 + d$$

$$d = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10 + \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{8 \times 3}{40}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$m_1 = \tan \alpha \quad c = -\frac{25}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$a = -5 - \frac{10}{3}$$

$$= -\frac{25}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$$

$$C \equiv (0, -\frac{25}{3})$$

$$\underline{\underline{3y - 4x + 25 = 0}}$$

$$m_2 = \tan(180 - \alpha) \quad c = -\frac{25}{3}$$

$$= -\tan \alpha$$

$$= -\frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$$

$$\underline{\underline{3y + 4x + 25 = 0}}$$

$\therefore$ The Eqⁿ of the tangent

$$3y - 4x + 25 = 0$$

$$3y + 4x + 25 = 0$$

$$\underline{\underline{y = -3}}$$

Let $A \equiv (x_1, y_1)$

$$y_1 = 5 - 8 \cos \alpha$$

$$= 5 - 8 \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

$$x_1 = 8 \sin \alpha$$

$$= 8 \times \frac{4}{5}$$

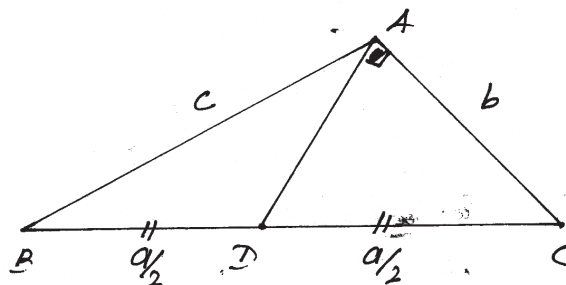
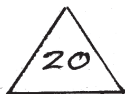
$$= \frac{32}{5}$$

$$\therefore A = (\underline{\underline{\frac{32}{5}}}, \underline{\underline{\frac{1}{5}}})$$

Similarly

$$\underline{\underline{B \equiv (-\frac{32}{5}, \frac{1}{5})}} \triangle 60$$

17) a. Sin rule



In $\triangle ABD$, by sine formula

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin(A-90^\circ)}$$

$$AD = \frac{-a \sin B}{2 \cos A} \quad \text{--- (1)}$$

In $\triangle ADC$, $\frac{AD}{\sin C} = \frac{DC}{\sin A}$

$$AD = \frac{a \sin C}{2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(1) = (2)} \quad \frac{a \sin B}{2 \cos A} = \frac{a \sin C}{2}$$

$$\sin C \cos A = -\sin B$$

$$c k \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) = -kb$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = -2b^2$$

$$\underline{\underline{3b^2 = a^2 - c^2}}$$

$$\cos A \cos B = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)$$

$$= \frac{1}{4abc^2} (b^2 - 3b^2)(b^2 + 3b^2)$$

$$= \frac{-2b^2}{ac} = \frac{-2}{ac} \left(\frac{a^2 - c^2}{3} \right) = \frac{2(c^2 - a^2)}{3ac} \triangle 80$$

$$b) \tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\tan\theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$$

$$\tan\theta + \frac{\tan\theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} + \frac{\tan\theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan\theta} = 3$$

$$\frac{\tan\theta(1 - \sqrt{3}\tan\theta)(1 + \sqrt{3}\tan\theta) + (\tan\theta + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\tan\theta) + (\tan\theta - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}\tan\theta)}{1 - 3\tan^2\theta} = 3$$

$$\frac{\tan\theta(1 - 3\tan^2\theta) + \sqrt{3}\tan^2\theta + 4\tan\theta + \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan^2\theta + 4\tan\theta - \sqrt{3}}{1 - 3\tan^2\theta} = 3$$

$$\tan\theta - 3\tan^3\theta + 8\tan\theta = 3 - 9\tan^2\theta$$

$$9\tan\theta - 3\tan^3\theta = 3 - 9\tan^2\theta$$

$$\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = 1$$

$$\tan 3\theta = 1$$

$$\tan 3\theta = \tan \frac{\pi}{4}$$

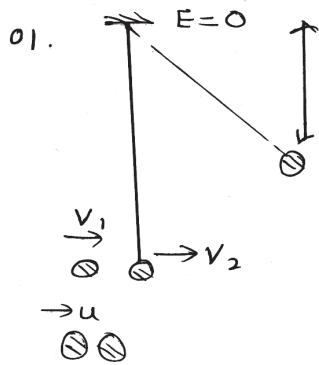
$$3\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12}; n \in \mathbb{Z}$$



Second Term Test - 2019
Combined Mathematics II - Part A - Grade 13

Part A



By the principle of Conservation of linear momentum,

$$m\sqrt{2} + mv_1 = mu$$

$$V_2 + V_1 = u \quad (5)$$

Newton's Law of restitution

$$V_2 - V_1 = -e[0 - u]$$

$$V_2 - V_1 = eu \quad (5)$$

$$V_2 = \frac{u}{2}(1+e)$$

Using the principle of Conservation of energy

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgl = -mg\frac{l}{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2}v_2^2 = gl/2$$

$$v_2 = \sqrt{gl} \quad (5)$$

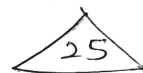
$$u = \frac{4}{3}\sqrt{gl}$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{gl} \times \frac{1}{2}(1+e) = \sqrt{gl}$$

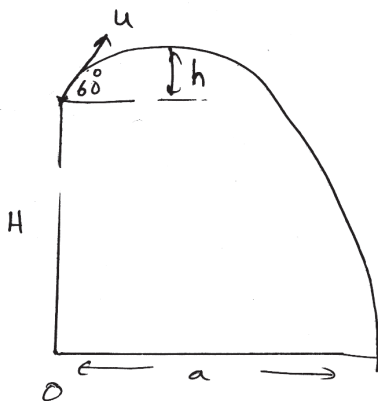
$$2 + 2e = 3$$

$$2e = 1$$

$$e = \frac{1}{2} \quad (5)$$



02.



$$\overrightarrow{OA} \rightarrow S = ut$$

$$a = \frac{u}{2}t \Rightarrow t = \frac{2a}{u} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OA} \uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$-H = u\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2a}{u} - \frac{1}{2}g \frac{4a^2}{u^2} \quad (5)$$

$$-H = \sqrt{3}a - \frac{2ga^2}{u^2}$$

$$u^2 = \frac{2ga^2}{\sqrt{3}a + H} \quad (5)$$

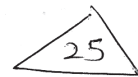
From 0 $\uparrow$ $V^2 = u^2 + 2as$

$$0 = u^2 \times \frac{3}{4} - 2gh \quad (5)$$

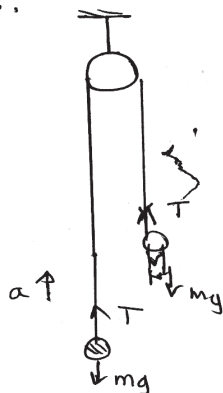
$$h = \frac{3u^2}{8g}$$

$$h = \frac{3}{8g} \left(\frac{2ga^2}{\sqrt{3a+H}} \right)$$

$$h = \frac{3a^2}{4(\sqrt{3a+H})} \quad (5)$$



03.



Child - C

String - R

$$a_{R,E} = \uparrow a$$

$$a_{C,R} = \uparrow f$$

$$a_{C,E} = a_{C,R} + a_{R,E}$$

$$= \uparrow f + \uparrow a \quad (5)$$

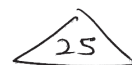
$$F = ma$$

$$\textcircled{M} \uparrow T - Mg = Ma \quad \textcircled{1} \quad (5)$$

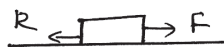
$$\downarrow mg - T = m(a - f) \quad \textcircled{2} \quad (5)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad mg - Mg = (M+m)a - mf \quad (5)$$

$$\frac{(m-M)g + mf}{M+m} = a \quad (5)$$



04.

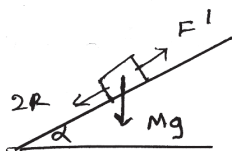


$$P = FV$$

$$\frac{1000H}{V} = F \quad (5)$$

$$\rightarrow F - R = 0$$

$$\therefore R = \frac{1000H}{V} \text{ N} \quad (5)$$



$$\rightarrow F' - 2R - Mg \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

$$F' = \frac{2000H}{V} + Mg \sin \alpha \quad (5)$$

$$P = FV$$

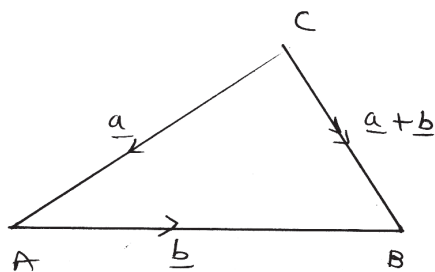
$$1000H = F' \frac{V}{3}$$

$$3000H = \left(\frac{2000H}{V} + Mg \sin \alpha \right) V \quad (5)$$

$$1000H = MgV \sin \alpha$$



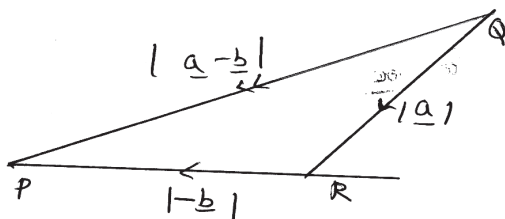
05.



$$|a| = |b| = |a+b| \quad (5)$$

ABC is an equilateral triangle. (5)

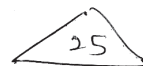
Angle between a and b is 120° . (5)



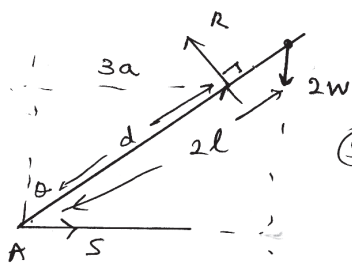
PQR is an equilateral triangle. (5)

$$\angle PQR = 60^\circ$$

angle between a and b is 60° (5)



06.



$$\uparrow R \sin \theta = 2W$$

$$\sin \theta = \frac{3a}{d}$$

$$R = \frac{2W}{\sin \theta} \quad (5)$$

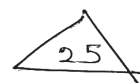
$$d = \frac{3a}{\sin \theta}$$

$$\text{A)} \quad R \times \frac{3a}{\sin \theta} = 2W \times 2l \sin \theta \quad (10)$$

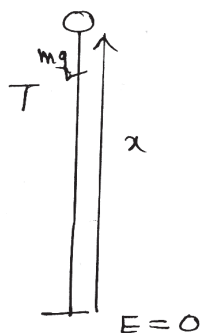
$$\frac{2W}{\sin \theta} \times \frac{3a}{\sin \theta} = 4Wl \sin \theta$$

$$\sin^3 \theta = \frac{3a}{2l} \quad (5)$$

$$\sin \theta = \left(\frac{3a}{2l} \right)^{1/3}$$



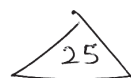
07.



$$\frac{1}{2} m \cdot 3gl = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mg(x-l)^2 + mgx \quad (5)$$

$$3gl = \dot{x}^2 + g \frac{(x-l)^2}{l} + 2gx \quad (5)$$

$$\dot{x}^2 = 3gl - \frac{g}{l} (x-l)^2 - 2gx \quad (5)$$



08. $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ (5)

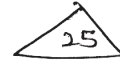
$$\frac{5}{12} = \frac{2}{3} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$
 (5)

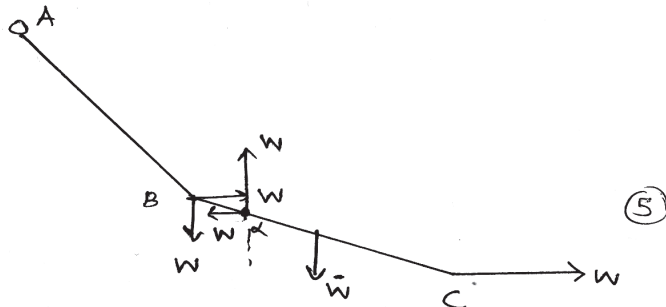
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
 (5)

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
 (5)

$$P(A \cup B) = \frac{11}{12}$$
 (5)



09.

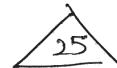


$$W \times 2a \cos \alpha - W a \sin \alpha = 0$$
 (10)

$$2 \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$2 = \tan \alpha$$
 (5)

The reaction on BC $\sqrt{5}W$



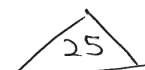
10.

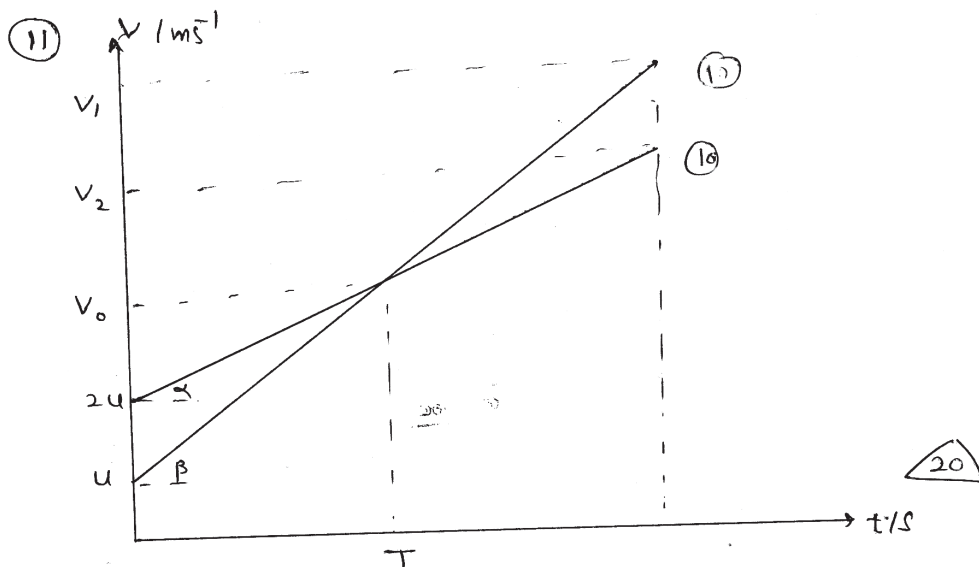
Body	mass	distance to the centre of mass from O
Cone	$\frac{1}{3} \pi a^2 4a\rho$	$\frac{3}{4} \times 4a = 3a$ (5)
Cylinder	$\pi (2a)^2 4a\rho$	$6a$ (5)
Composite body	$\frac{52}{3} \pi a^3 \rho$	$\bar{x}$

$$\frac{52}{3} \pi a^3 \rho \bar{x} = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \times 3a + 16 \pi a^3 \rho \times 6a$$
 (10)

$$\bar{x} = 100 a \times \frac{3}{52}$$

$$\bar{x} = \frac{75 a}{13}$$
 (5)





$$\tan \alpha = a$$

$$a = \frac{V_2 - 2u}{t} \quad (5)$$

$$V_2 = 2u + at$$

$$\tan \alpha = \frac{V_0 - 2u}{T} \quad (5)$$

$$a = \frac{V_0 - 2u}{T}$$

$$2u + aT = u + 2aT \quad (5)$$

$$T = \frac{u}{a}$$

$$\tan \beta = 2a$$

$$\frac{V_1 - u}{t} = 2a \quad (5)$$

$$V_1 = u + 2at$$

$$\tan \beta = \frac{V_0 - u}{T} = 2a \quad (5)$$

$$V_0 = u + 2aT$$

Since the distances travelled by both cars within the time are equal.

$$\frac{1}{2} uT = \frac{1}{2} (V_1 - V_2)(t - T) \quad (10)$$

$$uT = (u + 2at - 2u - at)(t - T)$$

$$uT = (at - u)(t - T)$$

$$uT = at^2 - atT - ut + uT$$

$$t = 0, \quad t(at - u - aT) = 0 \quad (10)$$

$$t = \frac{u + aT}{a}$$

$$t = \frac{2u}{a}$$

$$t = 2T$$

$$aT = u$$

The distance travelled by Cars $\int = \frac{1}{2} (u+v_1) t$ (10)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2u}{a} (u+u+2at) \quad (5)$$

$$= \frac{u}{a} (2u+2a \times \frac{2u}{a})$$

$$= \frac{6u^2}{a} \quad (5)$$

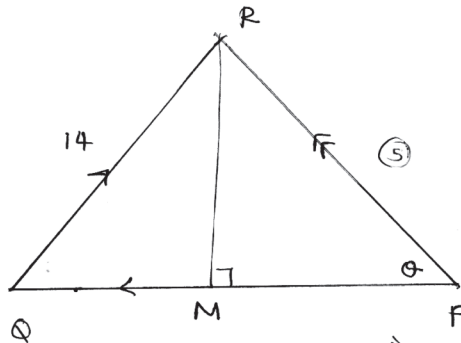


b) $V_{P,E} = \vec{V}$

$$V_{Q,E} = 14 \quad (5)$$

$$V_{Q,P} = V_{Q,E} + V_{E,P}$$

$$PR = 14 + \frac{V}{Q-P} \quad (5)$$



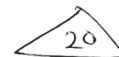
By using the cosine rule

$$PR^2 = V^2 + 14^2 - 2V \times 14 \cos 60^\circ \quad (10)$$

$$PR = \sqrt{V^2 - 14V + 196} \quad (5)$$

$$\text{Time} = \frac{12\sqrt{79}}{PR} \quad (5)$$

$$PR = \frac{12\sqrt{79}}{6} = 2\sqrt{79}$$



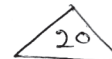
$$\sqrt{V^2 - 14V + 196} = 2\sqrt{79} \quad (5)$$

$$V^2 - 14V - 120 = 0 \quad (5)$$

$$(V-20)(V+6) = 0$$

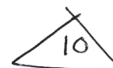
$$V = 20, V \neq -6 \quad (5)$$

$$V = 20 \text{ m s}^{-1} \quad (5)$$



$$\tan \theta = \frac{MR}{MP} = \frac{14 \sin \pi/3}{20 - 14 \cos \pi/3} = \frac{7\sqrt{3}}{13} \quad (5)$$

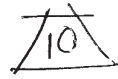
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{7\sqrt{3}}{13} \right) \quad (5)$$



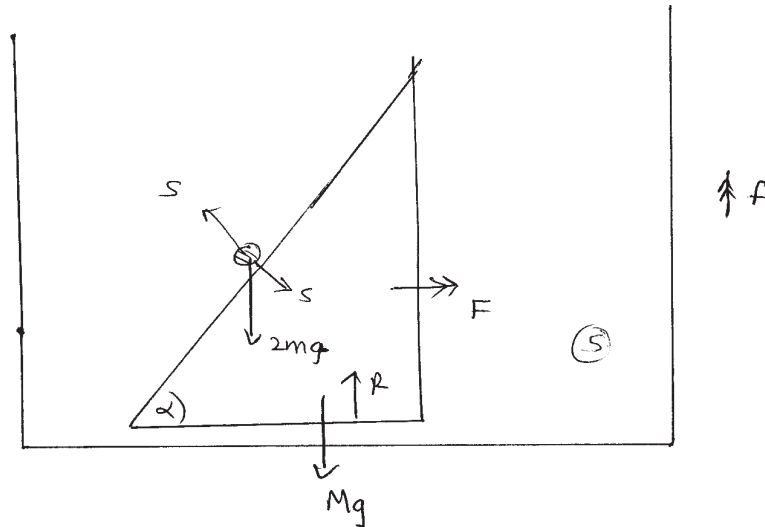
$$\tan \theta = \frac{MR}{MP}$$

$$= \frac{14 \sin \pi/3}{20 - 14 \cos \pi/3} \quad (5)$$

$$\tan \theta = \frac{7\sqrt{3}}{13} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{7\sqrt{3}}{13} \right) \quad (5)$$



(12) a)



$$a_{L,E} = \uparrow f \quad (5) \quad a_{M,L} = \rightarrow F \quad a_{2m,M} = \nearrow a$$

$$a_{M,E} = a_{M,L} + a_{L,E}$$

$$= \rightarrow F + \uparrow f \quad (5)$$

$$a_{2m,E} = a_{2m,M} + a_{M,E}$$

$$= \nearrow a + \nearrow f$$

For the wedge and the particle

$$\rightarrow F = ma$$

$$0 = MF + 2m [F - a \cos \alpha] \quad \text{--- (1) } (10)$$

for the particle (2m)

$$2mg \sin \alpha = 2m [a - f \sin \alpha - F \cos \alpha]$$

$$g \sin \alpha = a - f \sin \alpha - F \cos \alpha$$

$$(g + f) \sin \alpha = a - F \cos \alpha \quad \text{--- (2) } (10)$$

by (1), $F(M + 2m) = 2m a \cos \alpha$

by ②,

$$(g+f) \sin \alpha = \frac{F(M+2m)}{2m \cos \alpha} - F \cos \alpha$$

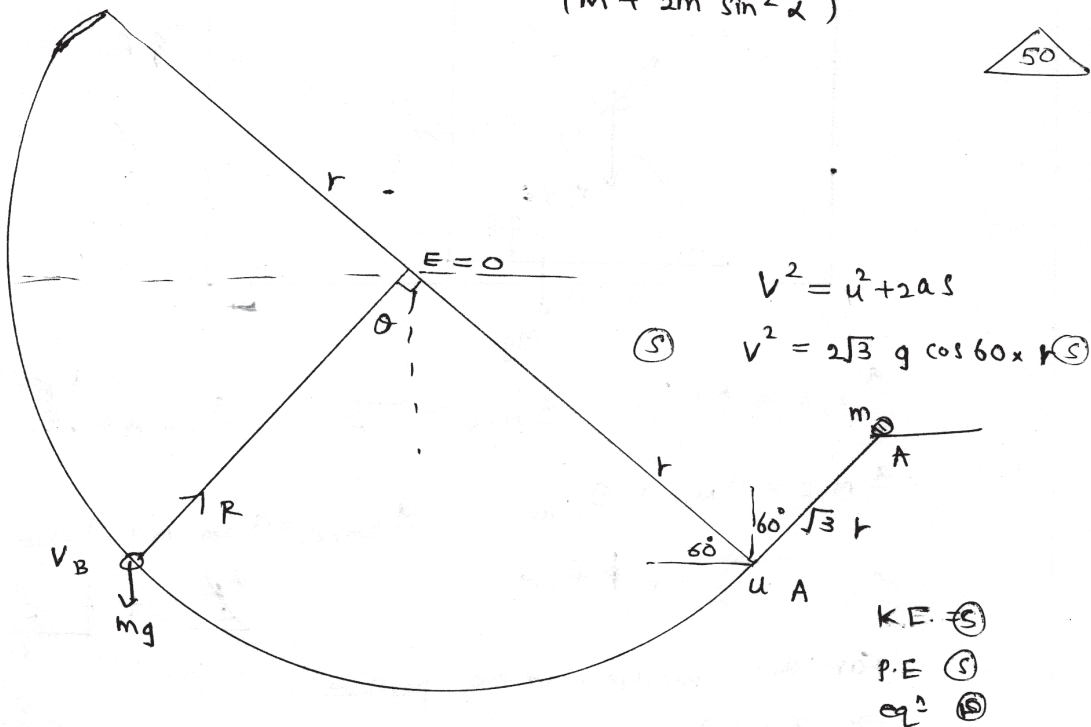
$$2m(g+f) \sin \alpha \cos \alpha = F[(M+2m) - 2m \cos^2 \alpha] \quad (10)$$

$$2m(g+f) \sin \alpha \cos \alpha = F(M+2m \sin^2 \alpha)$$

$$F = \frac{2m(g+f) \sin \alpha \cos \alpha}{M+2m \sin^2 \alpha} \quad (10)$$

$$a = \frac{2m(g+f) \sin \alpha \cos \alpha (M+2m)}{(M+2m \sin^2 \alpha) 2m \cos \alpha}$$

$$a = \frac{(g+f) \sin \alpha (M+2m)}{(M+2m \sin^2 \alpha)} \quad (10)$$



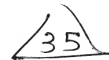
Energy at A = Energy at B

$$\frac{1}{2} m u^2 - mg r \sin 60 = \frac{1}{2} m v^2 - mg r \cos \theta$$

$$u^2 - \sqrt{3} g r = v^2 - 2 g r \cos \theta$$

$$v^2 = u^2 - \sqrt{3} g r + 2 g r \cos \theta \quad (5)$$

$$v^2 = \sqrt{3} g r - \sqrt{3} g r + 2 g r \cos \theta$$



$$F = ma$$

$$R - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \quad (10)$$

$$R = mg \cos \theta + \frac{m}{r} [u^2 - \sqrt{3}gr + 2gr \cos \theta] \quad (5)$$

$$R = 3mg \cos \theta + \frac{mu^2}{r} - \sqrt{3}mg \quad (5)$$

When $v=0$, $\theta = \theta_2$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}gr - u^2}{2gr} \quad (5)$$

$$u^2 = \sqrt{3}gr, \quad \cos \theta_2 = 0$$

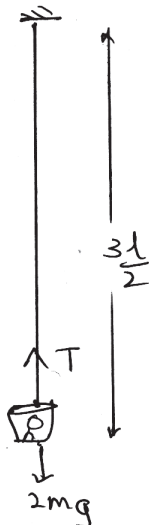
$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

When $v=0$, $R = mg \cos \pi/2$

$$R = 0 \quad (5)$$

$\therefore$ When $v=0$, $R=0$. $\therefore$ The particle doesn't leave the surface. The maximum distance travelled by the particle in the circular path is $\frac{2\pi}{3}r$. (10)

(13)



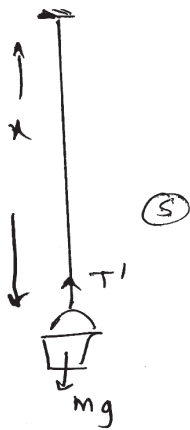
In equilibrium,

$$T = 2mg \quad (5)$$

$$\lambda \left(\frac{l_2}{l} \right) = 2mg \quad (5)$$

$$\lambda = 4mg \quad (5)$$

15



$$T' = mg \frac{(x-l)}{l} \quad (5)$$

$$F = ma$$

$$\downarrow mg - T' = m\ddot{x} \quad (10)$$

$$mg - 4mg \frac{(x-l)}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{l} \left[x - 4l - \frac{l}{4} \right]$$

$$\ddot{x} = -\frac{4g}{l} \left[x - \frac{5l}{4} \right] \quad (5)$$

$$x - \frac{5l}{4} = X \quad \omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

differentiating w.r.t. t, $\ddot{x} = \ddot{X} \quad (5)$

$$\ddot{X} = -\frac{4g}{l} X$$

$$\ddot{X} = -\omega^2 X$$

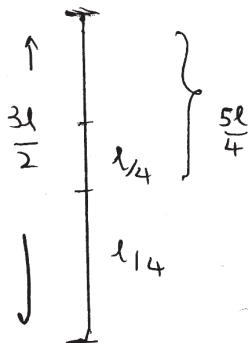
$\therefore$ The motion is a simple harmonic motion. (5)



iii $\ddot{x} = 0, \quad x = 0 \quad x - \frac{5l}{4} = 0$

centre $x = \frac{5l}{4} \quad (5)$

The amplitude of the motion $\left\{ \begin{aligned} &= \frac{3l}{2} - \frac{5l}{4} \quad (5) \\ &= \frac{l}{4} \quad (5) \end{aligned} \right.$

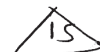


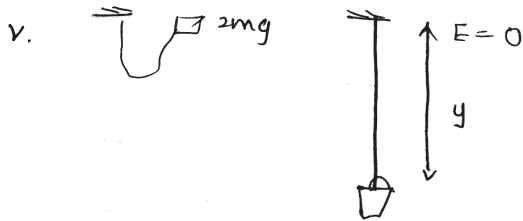
Since the amplitude of the motion is $l/4$
the Velocity when the string comes to its natural length is zero. $\therefore$ The particle doesn't move under gravity.

$\therefore$ The motion is Simple harmonic

(5) completely.

iv Period $= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5)$





By the principle of Conservation of Energy.

$$\frac{1}{2} \times 2m \times 2gl = \frac{1}{2} \times 4mg(y-l)^2 - 2mgy + \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$2gl^2 = 2g(y-l)^2 - 2gyl + l\dot{y}^2$$

$$l\dot{y}^2 + 2g(y-l)^2 - 2gyl - 2gl^2 = 0$$

25

vi when $\dot{y} = 0$,

$$2g(y-l)^2 - 2gyl - 2gl^2 = 0$$

$$y^2 - 2yl + l^2 - yl - l^2 = 0$$

$$y(y-3l) = 0$$

$$y = 0 \text{ or } y = 3l$$

15

vii

$$l\dot{y}^2 + 2g(y-l)^2 - 2gyl - 2gl^2 = 0$$

differentiating w.r.t. t ,

$$2\dot{y}\ddot{y}l + 4g(y-l)\dot{y} - 2g\dot{y}l = 0$$

$$2\dot{y} \neq 0, \quad \ddot{y}l + 2g(y-l) - 2gl = 0$$

$$\ddot{y}l + 2gy - 2gl - 2gl = 0$$

$$\ddot{y}l = -2gy + 4gl$$

$$= -2g[y - \frac{3l}{2}]$$

$$\ddot{y} = \frac{-2g}{l} [y - \frac{3l}{2}]$$

$$\text{When } \ddot{y} = 0, \quad y = \frac{3l}{2}$$

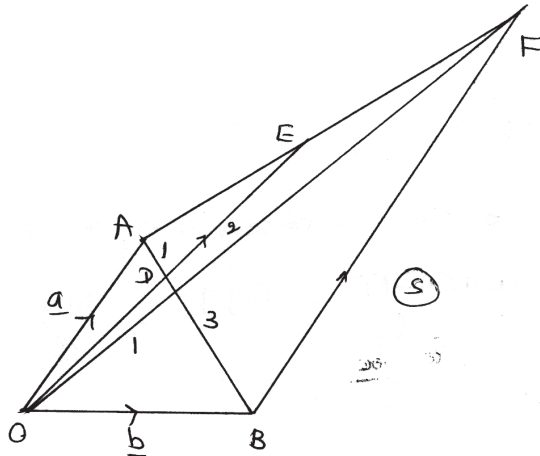
The centre is at a distance $\frac{3l}{2}$ from O.

$$\text{Amplitude} = 3l - \frac{3l}{2}$$

$$= \frac{3l}{2}$$

25

114 a)

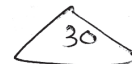


$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{AD} \quad (5) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{AB} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{4} (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{DE} &= 2 \vec{OD} \\ &= \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad (5)\end{aligned}$$

$$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} \quad (5) = \frac{1}{4} (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2} \quad (5)$$

$$\vec{AE} = \frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$$



$$\vec{BF} = \vec{BA} + \vec{AF} \quad (5)$$

$$\lambda \vec{OE} = \vec{a} - \vec{b} + \mu \vec{AE}$$

$$\lambda (3 \vec{OD}) = \vec{a} - \vec{b} + \mu \left(\frac{5\vec{a} + 3\vec{b}}{4} \right)$$

$$3\lambda \left(\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right) = \frac{(4 + 5\mu)\vec{a} + (3\mu - 4)\vec{b}}{4} \quad (10)$$

$$5\mu + 4 = 9\lambda \quad (5)$$

$$3\mu - 4 = 3\lambda \quad (5)$$

$$9\lambda - 5\mu = 4 \quad (1)$$

$$3\lambda - 3\mu = -4 \quad (2)$$

by (1) & (2)

$$\mu = 4 \quad (5), \quad \lambda = \frac{8}{3} \quad (5)$$



$$\vec{AF} = \mu \vec{AE}$$

$$\vec{AF} = 4 \vec{AE}$$

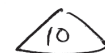
$$AE : EF = 1 : 3 \quad (5)$$

$$\vec{BF} = \lambda \vec{OE}$$

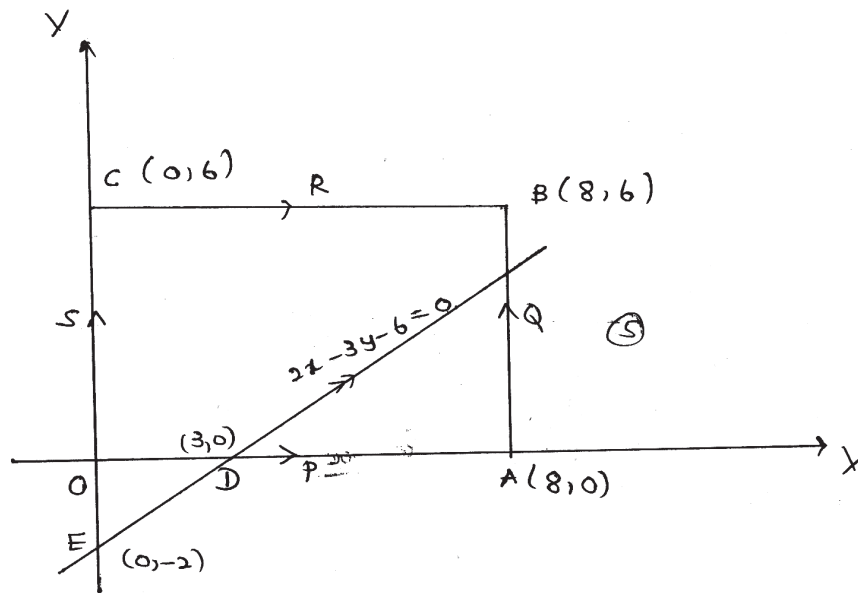
$$= 3\lambda \left(\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right)$$

$$= 3 \times \frac{8}{3} \left(\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4} \right) \quad (5)$$

$$\vec{BF} = 2(\vec{b} + 3\vec{a})$$



b)



$$\circlearrowleft) \quad 8Q - 6R = 42 \quad \text{--- (1) } \textcircled{S}$$

$$\circlearrowright) \quad 5Q - 6R + 3S = 0 \quad \text{--- (2) } \textcircled{S}$$

$$\text{when } S = 2, \quad 5Q - 6R = 6 \quad \text{--- (3) } \textcircled{S}$$

by (1) & (3)

$$Q = 12 \quad \textcircled{S}$$

$$R = 9 \quad \textcircled{S}$$

$$\circlearrowleft) \quad 8Q - 8R - 2P = 0 \quad \textcircled{S}$$

$$8 \times 12 - 8 \times 9 - 2P = 0$$

$$P = 12 \quad \textcircled{S}$$

$$\rightarrow X = 12 + 9 = 21 \text{ N} \quad \textcircled{S}$$

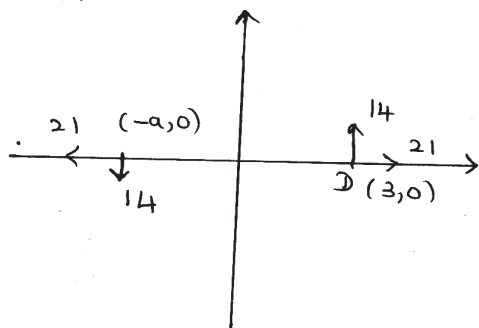
$$\uparrow Y = 2 + 12 = 14 \text{ N} \quad \textcircled{S}$$

$$R = \sqrt{21^2 + 14^2}$$

$$= 7\sqrt{13} \text{ N} \quad \textcircled{S}$$



$\rightarrow X =$



By

When a force $(-21, -14)$ is $\textcircled{S}$

added at the point $F(-a, 0) (a > 0)$, it is equivalent to a couple.

$$(a+3) 14 = 70 \quad \textcircled{S}$$

$$a = 2 \quad \textcircled{S}$$

Additional force a makes an angle α with the negative direction of the x -axis, is $7\sqrt{13} \text{ N}$. $\textcircled{S}$

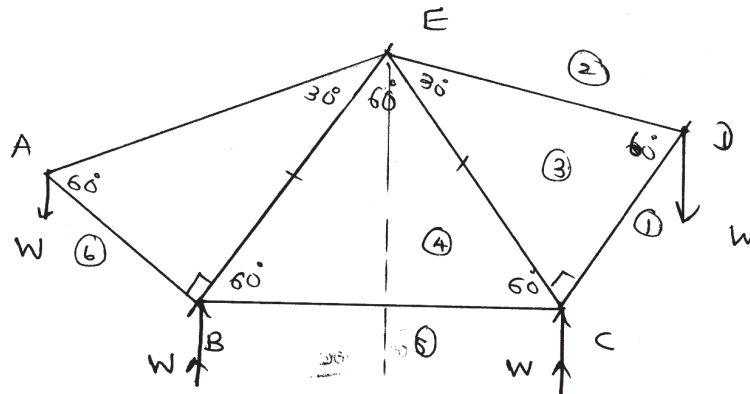
$\therefore$ The equation of the line of action is

$$3y - 2x + 4 = 0$$

(10)

40

15) a)



$$\uparrow 2R = W$$

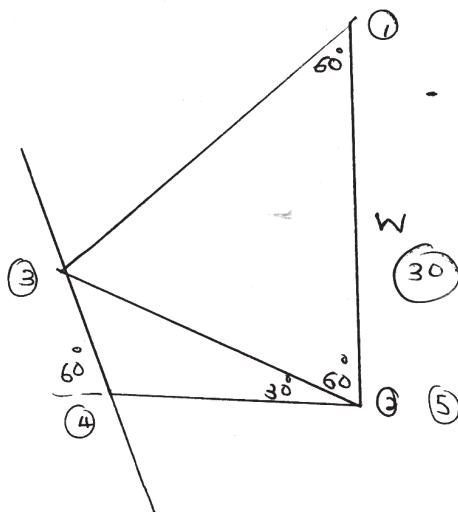
$$R = \frac{W}{2} \quad (5)$$

The System is symmetric about FE.

$$DE = AE$$

$$BA = CD \quad (5)$$

$$EB = EC$$



$$(2)(3) \sin 30^\circ = (3)(4) \sin 60^\circ$$

$$\frac{W}{2} = (3)(4) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2)(3) \cos 30^\circ = (3)(4) \cos 60^\circ + (4)(5)$$

$$\frac{W\sqrt{3}}{2} - \frac{W}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = (4)(5)$$

$$\frac{6W - 2W}{4\sqrt{3}} = \frac{4W}{4\sqrt{3}}$$

Rod	Stresses		Magnitude
	Thrust	Tension	
CD/BA	✓	—	W
DE/AE	—	✓	W
EC/EB	✓	—	$W/\sqrt{3}$
BC	✓	—	$W/\sqrt{3}$

(10)

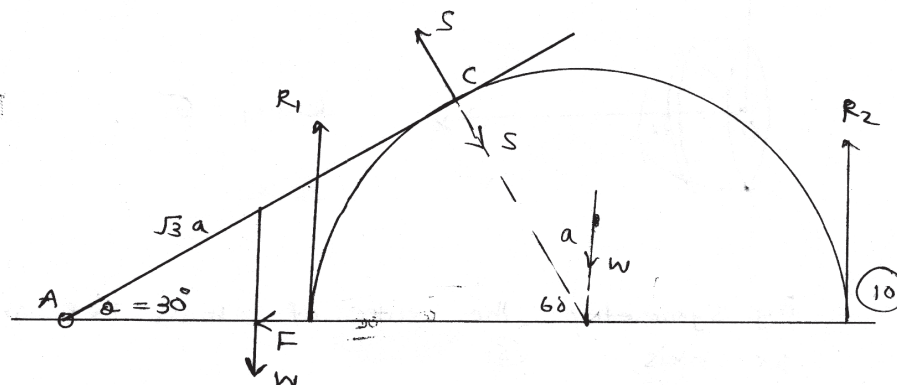
(10)

(10)

(10)

80

b)



$$\tan \theta = \frac{a}{\sqrt{3}a}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\uparrow R_1 + R_2 - W - S \cos 30^\circ = 0 \quad (5)$$

$$R_1 + R_2 = W + \frac{\sqrt{3}}{2} S \quad (5)$$

$$\rightarrow S \sqrt{3} a - W a \cos 30^\circ = 0 \quad (10)$$

$$S = \frac{W \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{W}{2} \quad (5)$$

$$R_1 + R_2 = W + \frac{W}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = W \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right] \quad (5)$$

$$\rightarrow S \cos 60^\circ - F = 0 \quad (5)$$

$$F = \frac{W}{4} \quad (5)$$

For the equilibrium

$$\mu \geq \left| \frac{F}{R} \right|$$

$$\mu \geq \left| \frac{F}{R_1 + R_2} \right|$$

$$\mu \geq \left| \frac{W/4}{W \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right]} \right|$$

$$\mu \geq \frac{1}{4 + \sqrt{3}} \quad (10)$$

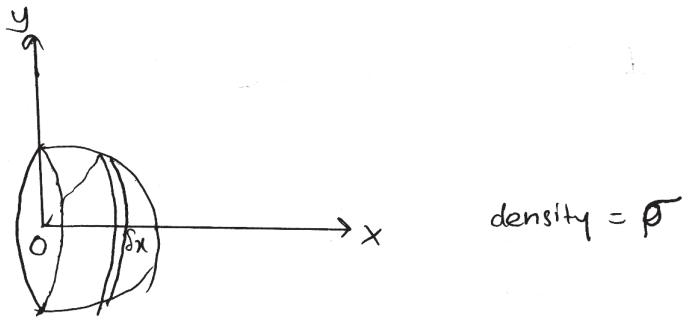
$$\mu \geq \frac{4 - \sqrt{3}}{16 - 3}$$

$$\mu \geq \frac{4 - \sqrt{3}}{13} \quad (10)$$

50

20

16)



By Symmetry the centre of mass lies on the x axis. (S)

$$\delta m = \pi (a^2 - x^2) \delta x \rho$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) \rho x dx}{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) \rho dx} \quad (15) = \frac{\int_0^a (a^2 x - x^3) dx}{(a^2 - x^2) dx} \quad (S)$$

$$= \frac{a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^a}{a^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^a} = \frac{\frac{3}{8} a^3}{\frac{2}{3} a^3} = \frac{9}{8} a \quad (S)$$

40

By symmetry the centre of mass lies on the symmetric axis. (S)

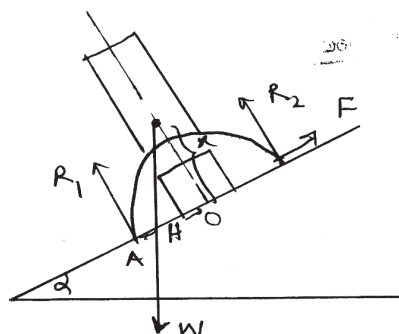
Body	mass	distance to the centre of mass of the body
	$\frac{2}{3} \pi \times 27 a^3 \rho = 18 \pi a^3 \rho \quad (S)$	$\frac{9}{8} a \quad (S)$
	$2 \pi a^3 \rho \quad (S)$	$a \quad (S)$
	$3 \pi a^3 \rho \quad (S)$	$\frac{9a}{2} \quad (S)$
Composite body	$(16 + 3\pi) \pi a^3 \rho \quad (S)$	$\bar{x}$

40

$$(16+3k) \pi a^3 \sigma \bar{x} = 18\pi a^3 \sigma \times \frac{9}{8}a - 2\pi a^3 \sigma \times a + 3\pi a^3 k \sigma \times \frac{9a}{2}$$

$$(16+3k) \bar{x} = \frac{81a}{4} - 2a + \frac{27}{2} ka \quad (5)$$

$$\bar{x} = \frac{(73+54k)a}{4(16+3k)}$$



$$\begin{aligned} R_1 + R_2 &= W \cos \alpha \quad (5) \\ F &= W \sin \alpha \quad (5) \end{aligned}$$

Since it is in equilibrium,

$$M \geq \frac{|F|}{R_1 + R_2} \quad (10)$$

$$M \geq \frac{W \sin \alpha}{W \cos \alpha} \quad (5)$$

$$M \geq \tan \alpha$$

$$OA > OH \quad (10)$$

$$3a > \bar{x} \tan \alpha$$

$$3a > \frac{(73+54k)a \tan \alpha}{4(16+3k)} \quad (5)$$

$$\frac{12(16+3k)}{73+54k} > \tan \alpha$$

17) a) i If $A \cup B = S$, A and B are exhaustive events. (10)

ii If $A \cap B = \phi$, A and B are mutually exclusive events. (10)

$$b) i) A \cup A' = \omega \quad (5)$$

$$P(A \cup A') = P(\omega)$$

$$P(A) + P(A') = 1 \quad (A \cap A') = \phi$$

$$\therefore P(A') = 1 - P(A) \quad (5)$$

$$ii \quad A = (A \cap B) \cup (A \cap B') \quad (5)$$

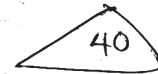
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') - (1) \quad (5) \quad [\because (A \cap B) \cap (A \cap B') = \phi]$$

$$iii \quad A \cup B = B \cup (A \cap B') \quad (5)$$

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B') - (2) \quad (5) \quad [\because B \cap (A \cap B') = \phi]$$

by (1) < (2)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (5)$$



$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') \quad (5)$$

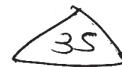
$$\frac{17}{20} = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} - P(A' \cap B') \quad (5)$$

$$P(A' \cap B') = \frac{1}{20} \quad (5)$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)' = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \quad (5)$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B)' = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} \quad (5)$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} - \frac{3}{20} = \frac{11}{20} \quad (5)$$



c) i) $A =$ All the three balls are in the same color.
 $P(A) = P(BBB) + P(RRR) + P(GGG)$

$$= \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \times \frac{1}{10} + \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{3}{10}$$

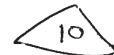
$$= \frac{9}{132} = \frac{3}{44} \quad (5)$$



$$ii) \quad P(B, R, G) = \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{22} \quad (5)$$

iii) $B =$ Getting balls of different colors

$$P(B) = \frac{3}{12} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{3}{11} \quad (5)$$



$$iv \quad P(R', R', R') = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{14}{55} \quad (5)$$

$$v \quad 1 - P(R' R' R') = 1 - \frac{14}{55} = \frac{41}{55} \quad (5)$$

