



දෙවන වාර පරීක්ෂණය - 12 ශ්‍රේණිය - 2019

Second Term Test - Grade 12 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ . 1	
2	
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 12 - I (A කොටස)

01) $x^2 - \lambda x + \mu = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල අනුයාත නිඛිල 2 කි. $\lambda^2 = 4\mu + 1$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

02) $\frac{1}{(x+2)} \leq \frac{x}{3}$ අසමානතාවයට ගැලපෙන x හි විසඳුම් කුලකය දක්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible][illegible]

05) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$ අගයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

06) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{21}{4}$ නම් x සඳහා අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 07) ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයේ $AB = AC$ වන අතර B හා C ශීර්ෂ පිළිවෙලින් $(-1, 2)$ හා $(4, -5)$ වේ. A ශීර්ෂය සඳහා ගැලපෙන බිණ්ඩාංක යුගලයක් සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 08) $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ලෙස අර්ථ දැක්වෙන $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$ ශ්‍රිතයේ පරාසය දක්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

09) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ නම්, $x + y + z = xyz$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10) $\operatorname{cosec} x + \sec x = 2\sqrt{2}$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම ලියන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 12 - I (B කොටස)

ප්‍රශ්න හතෙන් පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- 11) a) $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ග සමීකරණයේ මූල වල එකතුව $-\frac{b}{a}$ බව සහ මූල වල ගුණිතය $\frac{c}{a}$ බව පෙන්වන්න.

$k \neq -1, 0$ වන $\frac{k+1}{k}$ හා $\frac{k+2}{k+1}$ යනු $ax^2 + bx + c = 0$ වර්ග සමීකරණයේ මූල නම් $(a+b+c)^2 = b^2 - 4ac$ බව සාධනය කරන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල හැම විටම තාත්වික වන බව දක්වන්න. මෙහි a, b හා c යනු තාත්වික සංඛ්‍යාවේ.

- (b) $f(x)$ යනු x හි වර්ග ශ්‍රිතයක් වන අතර $(2x+1)$ න් හරියටම බෙදේ. එය $(x-1)$ න් හා $(2x-1)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂ පිළිවෙලින් -6 හා -5 වේ. $f(x)$ සොයන්න. ඒනයිත්, $f(x) = 4\lambda x$ වර්ග සමීකරණයේ මූල α හා β නම් $\frac{1}{\alpha}$ හා $\frac{1}{\beta}$ මූල වන වර්ග සමීකරණය ලබා ගන්න. මෙහි $\lambda \in \mathcal{R}$ වේ.

- 12) a) පහත ශ්‍රිත වල වසම දක්වන්න.

i) $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$

ii) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

iii) $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-2x}$

- b) $p(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ද, $q(x) = (x^9 + x^6)^{\frac{1}{2}}$ හා $r(x) = x\sqrt{1+x}$ ද නම්, $q[p(x)] = r(x)$ බව ලබා ගන්න.

- c) i) $\frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z}$ නම් $x^y \cdot y^x = z^y y^z = x^z z^x$ බව පෙන්වන්න.

- ii) $\log_9 xy = \frac{5}{2}$, $\log_3 x \cdot \log_3 y = -6$ යන සමගාමී සමීකරණ විසඳා x හා y ලබාගන්න.

- iii) $\log_4 x = a$ ද, $\log_{12} x = b$ ද, නම්,

$$\log_3 4 = \frac{b}{a-b} \text{ බව ද,}$$

$$\log_3 48 = \frac{a+b}{a-b} \text{ බවද පෙන්වන්න.}$$

13) a) (i) $|2x+1|$ ශ්‍රිතය අඳින්න.

(ii) $-|2x+1|$ ශ්‍රිතය ද ඇඳ දක්වන්න. එනමින්,

(iii) $-|2x+1| + 4$ ප්‍රස්ථාරය හා $|x+1|$ ප්‍රස්ථාරය එකම සටහනක ඇඳ

$|2x+1| + |x+1| \leq 4$ අසමානතාවයේ විසඳුම් කුලකය ලබා ගන්න.

b) පහත සීමාවල අගය සොයන්න.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan^2 x}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x \leq 1 \\ 3-ax^2 & ; x > 1 \end{cases}$ ලෙස අර්ථ දැක්වෙන ශ්‍රිතය සන්තතික නම් a හි අගය සොයන්න.

14) a) x විචලනය වන විට $f(x) = (a-x)(x-b)$ හි උපරිම අගය $\frac{1}{4}(a-b)^2$ බව පෙන්වන්න.

$0 < b < a$ වන විට $f(x)$ හි ශ්‍රිතයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

b) a, b, k තාත්වික සංඛ්‍යා වන විට $(x-a)(x-b) - k^2 = 0$ වර්ගජයේ මූල වන c හා d තාත්වික බව පෙන්වන්න. තවද $(x-c)(x-d) + k^2 = 0$ වර්ගජයේ මූල a හා b වන බව ද ලබා ගන්න.

c) (i) $2x^3 - x^2 + x + 1$ බහුපදය $(x-1)$ න් බෙදූ විට ලබ්ධිය හා ශේෂය සොයා බෙදුම් ඇල්ගොරිතමය ලියා දක්වන්න.

(ii) ඉහත ලබ්ධිය $(x-3)$ න් බෙදූ විට ද ඇල්ගොරිතමය දක්වන්න.

(iii) $2x^3 - x^2 + x + 1$ බහු පදය $(x-1)(x-3)(2x+7)$ න් බෙදූ විට ශේෂය $(23x-20)$ බව අපෝහනය කරන්න.

15) a) $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ හි හින්න භාග ලබා ගන්න.

එනමින්, $\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}$ හි හින්න භාග අපෝහනය කරන්න.

b) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ ශීර්ෂ $A(-1,0)$ හා $B(5,1)$ වේ. BC පාදය අභ්‍යන්තරව $2:1$ අනුපාතයට බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(3, -5)$ නම් ඉතිරි ශීර්ෂ සොයන්න. එනමින් AC හා BD විකර්ණවල දිග ලබා ගන්න.

c) $k^2x^2 + (kx + 1)(x + k) + 1 = 0$ හි මූල α, β නම්,
 $\alpha^2\beta^2 + (\alpha\beta + 1)(\alpha + \beta) + 1 = 0$ පෙන්වන්න.

16) a) $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A + B)$ ස්වභාවික සාධනය කරන්න.

b) $\tan 3\theta = 1$ හි විසඳුම් සොයන්න.

$\tan 3\theta$ යන්න $\tan \theta$ මගින් ප්‍රකාශ කිරීමෙන් $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ සමීකරණයේ මූල $-1, \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ හා $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

එනමින් $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ හි අගය සොයන්න. මෙහි $t = \tan \theta$ වේ.

c) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$ සමීකරණය විසඳන්න.

17) a) ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

$$a = (b - c) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

ABC ත්‍රිකෝණයක A හරහා යන මධ්‍යස්ථයේ දිග m වේ. එය AB හා AC සමඟ පිළිවෙලින් α හා β කෝණ සාදයි නම්,

i.) $2m(\sin \alpha - \sin \beta) = a(\sin B - \sin C)$ බව,

ii.) $2m \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (b - c) \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ බවත්, සාධනය කරන්න.

b) සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් සූත්‍රය ප්‍රකාශ කරන්න.

$$\text{එනමින්, } \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \text{ නම්,}$$

$$c = \frac{\pi}{2} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

Second Term Test - Grade 12 - 2019

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

(A කොටස)

- 1) O මූල ලක්ෂ්‍යයකට සාපේක්ෂව A හා B ලක්ෂ දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $-\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ වේ.

i) $\overrightarrow{AB}$ සොයන්න.

ii) $|\overrightarrow{AB}|$ සොයන්න.

iii) $|\overrightarrow{AB}|$ විශාලත්වය මෙන් තුන්ගුණයක් වූ $\overrightarrow{OA}$ දිශාවට වූ දෛශිකය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 2) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ හා $\mathbf{b} = k\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ දෛශික එකිනෙකට ලම්භ නම් k වල අගය සොයන්න.

i) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ සොයන්න.

ii) $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ සොයන්න.

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ සොයන්න.

iv) $\mathbf{a}$ හා $(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ අතර කෝණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 3) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ නිශ්ශුන්‍ය දෛශික දෙකක් නම් $\underline{a} \times \underline{b}$ දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.
 $\underline{i}, \underline{j}$ යනු OX, OY අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ.
- ii. $\underline{a} = 4\underline{i} + 3\underline{j}$ හා $\underline{b} = 2\underline{i} - 3\underline{j}$ නම්, $\underline{a} \times \underline{b}$ හා $\underline{b} \times \underline{a}$ සොයන්න.
 $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 4) ලක්ෂ්‍යයක දී ක්‍රියා කරන සමාන බල 2ක් 2α කෝණයකින් ආනත වී ඇති විට ලැබෙන සම්ප්‍රයුක්තය එම බල දෙක 2β කෝණයකින් ආනත වී ඇති විට ලැබෙන සම්ප්‍රයුක්තය මෙන් දෙගුණයකි.
 $\cos \alpha = 2 \cos \beta$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 5) විශාලත්වය $4 N$ හා $6 N$ වූ සමාන්තර බල 2ක් දෘඪ වස්තුවක් මත A හා B ලක්ෂ්‍ය 2 ක දී ක්‍රියා කරයි.
- (i) බල දෙක සජාතීය වන විට
- (ii) බල දෙක විජාතීය වන විට

ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න. $AB = 15 m$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 6) $ABCD$ යනු පාදයක දිග $2a$ වන සමචතුරස්‍රයකි. විශාලත්වය නිව්ටන් $1, 2, 3$ හා $2\sqrt{2}$ බැගින් වන බල පද්ධතියක් පිළිවෙලින් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ හා $\overrightarrow{AC}$ පාද දිගේ ක්‍රියා කරයි. AB හා AD X හා Y අක්ෂ වශයෙන් ගෙන පද්ධතිය තනි බලයකට හා යුග්මයකට උභ්‍යන්තය වන බව පෙන්වා තනි බලයේ විශාලත්වය ද යුග්මයේ ඝූර්ණය ද සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 9) $6N$ ක භාරයක් සිරසට α හා β ආනති ඇති සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු දෙකකින් එල්ලා සමතුලිතව ඇත. තන්තු දෙකෙහි ආතති $3N$ හා $3\sqrt{3}N$ නම් α හා β හි අගය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 10) සුමට ආනත තලයක් මත ඇති ස්කන්ධය m වූ ලභ්‍යාකාර චස්තුවක් තලයට සමාන්තරව යෙදූ P බලයක් මගින් සමතුලිතව තබා ඇත. තලයේ තිරසර ආනතිය $\sin^{-1}\left(\frac{P}{mg}\right)$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංග්‍රහිත ගණිතය 12 - II (B කොටස)

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- 11) $t = 0$ විට O ලක්ෂ්‍යයක සිට X නම් වස්තුවක් ගුරුත්වය යටතේ සිරස්ව ඉහළට $u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. තත් t කාලයේ දී O සිට hm ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට වස්තුව පැමිණේ නම් t හි වර්ගජ සමීකරණය ලබා ගන්න. එනමින් O සිට h උසින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට පැමිණෙන අවස්ථා දෙකට අදාළ කාලයන් පිළිවෙලින් t_1 හා t_2 නම්, $t_1 t_2 = \frac{2h}{g}$ හා $t_2 - t_1 = \frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh}$ බව පෙන්වන්න. A පසු කර වලින වූ බෝලය නැවත A ට පැමිණීමට ගත වූ කාලය $\frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh}$ බව පෙන්වන්න. එනමින් $u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කළ වස්තුවක උපරිම උස $H = \frac{u^2}{2g}$ බව පෙන්වන්න.

- 12) a) මෝටර් රථයක් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ වී $a_1 \text{ ms}^{-2}$ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් වලින වී උපරිම ප්‍රවේගයට එළඹ ඒ හා සමගම ඒකාකාර $a_2 \text{ ms}^{-2}$ මන්දනයෙන් වලින වී නිශ්චලතාවට පත් වේ. රථයේ මුළු විස්ථාපනය s නම් ගත වූ මුළු කාලය තත්පර $\left[\frac{2S(a_1 + a_2)}{a_1 a_2} \right]^{\frac{1}{2}}$ බව පෙන්වන්න. උපරිම ප්‍රවේගය $V = \sqrt{\frac{2S(a_1 a_2)}{a_1 + a_2}} \text{ ms}^{-1}$ බව ද ලබා ගන්න. උපරිම ත්වරණය හා මන්දනය යන දෙකම $a \text{ ms}^{-2}$ නම් වලිනයට ගත වූ අවම කාලය තත්. $2\sqrt{\frac{s}{a}}$ බව පෙන්වන්න.

- b) ඉහත වලිනයේදී මාර්ගයේ අළුත් වැඩියාවක් නිසා උපරිම ප්‍රවේගය $V_0 \text{ ms}^{-1}$ ($V_0 < V$) නොඉක්මවන ලෙස මාර්ගයේ දැන්වීමක් යොදා ඇත. AB අතර වලිනයේදී V_0 ප්‍රවේගයෙන් ද ටික දුරක් වලින වේ. මාර්ගයේ අළුත් වැඩියාව නිසා A හා B අතර වලිය සඳහා වැඩිපුර ගත් කාලය තත්පර $\frac{s(V - V_0)^2}{V_0 V^2}$ බව පෙන්වන්න.

- 13) O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් P හා Q ලක්ෂ දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{p}$ හා $\underline{q}$ වේ. R යනු PQ මත $PR:PQ = \lambda:1$ වන පරිදි පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. R හි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}$ නම්, $\underline{r} = \underline{p} + \lambda(\underline{q} - \underline{p})$ බව පෙන්වන්න. $OACB$ යනු සමාන්තරාස්‍රයකි. එහි $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OB}$ පාද මඟින් පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික නිරූපනය කරයි. L හා M යනු පිළිවෙලින් AC හා CB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$ ලියා දක්වන්න. X යනු AM මත $AX:XM, 2:3$ අනුපාතයට පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $O.X.L$ ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.

- 14) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යනු සමාන්තර නොවන්නා වූත් ශුන්‍ය නොවන්නා වූත් දෛශික දෙකකි. $\alpha a + \beta b = 0$ නම්, එවිට $\alpha = 0$ හා $\beta = 0$ බව පෙන්වන්න.

$PQRS$ යනු $\overrightarrow{SR} = \frac{1}{3} \overrightarrow{PQ}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපිසියමක් යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$ ද $\overrightarrow{PS} = \underline{q}$ යනු $\underline{q}$ ද ලෙස ගනිමු. $\overrightarrow{QX} = \frac{2}{3} \overrightarrow{QR}$ වන පරිදි QR මත X පිහිටයි. PX හා QS වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන Y මඟින් $\overrightarrow{QY} = \lambda \overrightarrow{QS}$ යන්න සපුරාලයි. $\overrightarrow{PX} = \frac{5}{9} \underline{p} + \frac{3}{2} \underline{q}$ බව හා $\overrightarrow{PY} = (1 - \lambda) \underline{p} + \lambda \underline{q}$ බව පෙන්වා λ හි අගය සොයන්න.

- 15) සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක OX, OY අක්ෂ වලට සමාන්තර ඒකක දෛශික $\underline{i}, \underline{j}$ යනුවෙන් දැක්වේ. $(3\underline{i} + \underline{j}), (2\underline{i} + 4\underline{j}), (\underline{i} + 5\underline{j}), (P\underline{i} + Q\underline{j})$ යන බල $-6\underline{i}, -\underline{i} - 4\underline{j}, \underline{i} + 2\underline{j}, 2\underline{i} + 3\underline{j}$ යන පිහිටුම් දෛශික ඇති ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියා කරයි. පහත දැක්වෙන ඒවා සොයන්න.
- බල පද්ධතිය G නමැති බල යුග්මයකට උභයනය වේ නම් P හා Q වල අගය සොයන්න.
 - බල පද්ධතිය $(\underline{i}, \underline{j})$, ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන $Y\underline{j}$ නමැති තනි බලයට උභයනය වේ. G හා Y හි අගය සොයන්න.
- 16) a) $ABCDEF$ යනු පාදයක දිග a වන සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. මෙහි AB, BC, DC, ED, EF හා AF පාද ඔස්සේ අක්ෂරවල පටිපාටියෙන් දැක්වෙන දිශාවලට විශාලත්ව $4P, 2P, P, 3P, 2P$ හා $5P$ යන බල ක්‍රියා කරයි. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය ද දිශාව ද එහි ක්‍රියා රේඛාවට AB හමුවන ස්ථානය ද සොයන්න. $FEDCBA$ අතට $10\sqrt{3}Pa$ ඝූර්ණය සහිත යුග්මයක් ද Q බලයක් ද පද්ධතියට යෙදූ විට නව පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් Q හි විශාලත්වය හා දිශාව ද එහි ක්‍රියා රේඛාව ද සොයන්න.
- b) $ABCDEF$ යනු සැහැල්ලු අවිනන්‍ය තන්තුවකි. එහි A හා F කෙළවරවල් සවිලිමක් පිහිටි A හා F ලක්ෂ්‍ය දෙකකට ගැට ගසා ඇති අතර B, C, D, E ලක්ෂ්‍යවල දී ස්කන්ධය M වූ භාර එල්ලා ඇත්තේ සර්වසම තන්තු පහක් සෑදෙන පරිදිය. AB හා EF තන්තු කොටස් සිරසට $\theta \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ කෝණවලින් ආනත වන අතර BC හා QE තන්තු කොටස් සිරසට $\beta \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ කෝණවලින් ආනත වේ. CD තිරස්ව පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ පවතී.
- AB තන්තුවේ ආතතිය $2Mg \sec \theta$ බව ද
 - $2 \tan \theta = \tan \beta$ බව ද,
 - BC තන්තු කොටසේ ආතතිය $Mg \sqrt{4 \tan^2 \theta + 1}$ බව
 - CD තන්තු කොටසේ ආතතිය $2Mg \tan \theta$ බව ද පෙන්වන්න.
- 17) a) A හා B දී අංශු 2 ක් $t = 0$ කාලයේ දී නිශ්චලතාවයෙන් වලිනය ආරම්භ වී $f \text{ ms}^{-2}$ නියත ත්වරණයෙන් t කාලයක් වලින වේ. t කාලය අවසානයේ දී B අංශුව මත ඇති බලය ඉවත් කිරීම නිසා එය ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් වලින වන අතර A පෙර පරිදිම වලින වේ. $t + t_1$ කාලයේ දී A හා B අතර දුර $\frac{ft_1^2}{2}$ බව පෙන්වන්න. මේ සඳහා B සමුද්දේශ රාමුවේ A ගේ වලිනය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරය භාවිතා කරන්න.
- b) $t = 0$ කාලයේ දී P අංශුවක් $2u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් O ලක්ෂ්‍යයේ සිට සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. P උපරිම උසෙහි ඇතිවිට Q අංශුවක් $3u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් එම O ලක්ෂ්‍යයේ සිටම සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. P ට සාපේක්ෂව Q ගේ වලිනයට ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාරයක් ඇඳ එමඟින් අංශු ගැටීමට ගතවන කාලය $\frac{8u}{3g}$ s බව පෙන්වන්න.

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part A - Grade 12

$$\textcircled{1}. \quad x^2 - \lambda x + \mu = 0 \begin{cases} \alpha \\ \alpha+1 \end{cases}$$

$$2\alpha + 1 = \lambda \quad \textcircled{5}$$

$$\alpha^2 + \alpha = \mu$$

$$\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^2 + \frac{\lambda-1}{2} = \mu \quad \textcircled{5}$$

$$(\lambda-1)^2 + 2(\lambda-1) = 4\mu \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \quad \lambda^2 - 1 = 4\mu$$

$$\underline{\lambda^2 = 4\mu + 1} \quad \textcircled{5}$$

25

$$\textcircled{2}. \quad \frac{1}{x+2} \leq \frac{x}{3}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{(x+3)(x-1)}{3(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x}{3} \leq 0 \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{3 - x^2 - 2x}{3(x+2)} \leq 0 \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{3(x+2)} \geq 0$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{array}{ccccccc} (-) & & (+) & & (-) & & (+) \\ & -3 & & -2 & & & 1 \end{array}$$

Solution is,

$$\underline{x \in [-3, -2) \cup [1, \infty)} \quad \textcircled{5}$$

25

$$(3) \quad x^m + nx \equiv (x^2 - x - 2) \phi(x) + 2x + 6$$

$$x^m + nx \equiv (x-2)(x+1)\phi(x) + 2x + 6 \quad (5)$$

$$\underline{x=2} \quad 2^m + 2n = 10 \quad (1) \quad (5)$$

$$\underline{x=-1} \quad (-1)^m - n = 4 \quad (2)$$

$$(-1)^m + 2^{m-1} = 9 \quad (5)$$

$$(5) \quad \underline{m=4}, \quad \underline{n=-3} \quad (5)$$

25

$$(4) \quad \frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)} = (Ax+B) + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x-1)} \quad (10)$$

$$2x^3 - x + 3 = (Ax+B)(x^2-x) + C(x-1) + Dx$$

$$x^3 \rightarrow 2 = A$$

$$x^2 \rightarrow 0 = -A + B$$

$$x \rightarrow -1 = -B + C + D$$

$$x^0 \rightarrow 3 = -C \quad (10)$$

$$B = 2 \quad D = 4$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\frac{2x^3 - x + 3}{x(x-1)} \equiv (2x+2) + \frac{(-3)}{x} + \frac{4}{(x-1)}}} \quad (5)$$

25

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin x - 1 + \sin x)}{x (\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \quad (5')$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x})} \quad (5'')$$

$$= 2 \times 1 \times \frac{1}{2} \quad (5''')$$

$$= 1 \quad (5''')$$

25

$$(6) \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{21}{4}$$

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{1}{4\log_x 2} = \frac{21}{4} \quad (5)$$

$$\text{If, } \log_x 2 = t \quad (5')$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t} = \frac{21}{4}$$

$$(5'') \frac{4+2+1}{4t} = \frac{21}{4}$$

$$\frac{7}{4t} = \frac{21}{4}$$

$$(5''') t = \frac{1}{3}$$

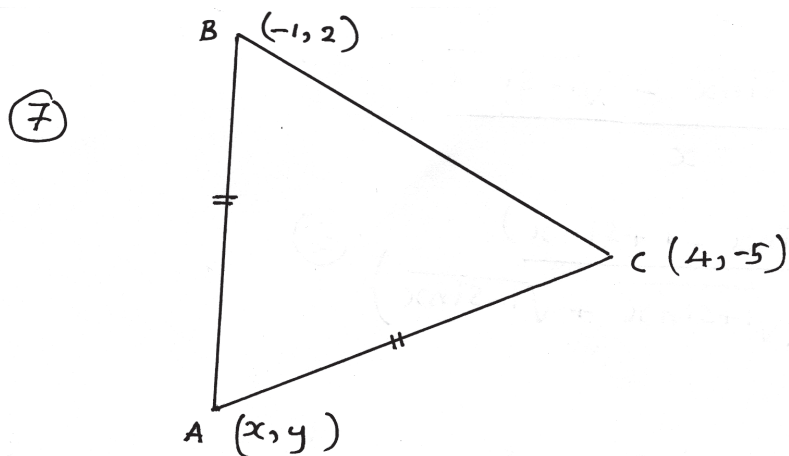
$$\text{But, } \log_x 2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$x = 2^3$$

$$\underline{x = 8} \quad (5''')$$

25



$$\textcircled{5} \quad (x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y+5)^2 \quad \textcircled{5}$$

$$10x - 14y - 36 = 0$$

$$5x - 7y - 18 = 0 \quad \textcircled{5}$$

(give marks to correct 2 points) $\textcircled{10}$

25

⑧. $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

clearly $x^4 + 1$ that $f(x) \geq 0$, $\textcircled{5}$
 then, $(x^2 - 1)^2 \geq 0 \quad \textcircled{5}$

$$x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$x^4 + 1 \geq 2x^2$$

$$1 \geq \frac{2x^2}{x^4 + 1} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{1}{2} \geq \frac{x^2}{x^4 + 1}$$

$\therefore$ range of function

$$\underline{\underline{R_f = \left[0, \frac{1}{2}\right]}} \quad \textcircled{5}$$

25

$$(9). \tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$$

$$\text{Let, } \tan^{-1}x = \alpha, \tan^{-1}y = \beta, \tan^{-1}z = \gamma \quad (5)$$

then,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\alpha + \beta = \pi - \gamma$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \gamma) \quad (5)$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = -\tan \gamma$$

(5)

$$\frac{x + y}{1 - xy} = -z$$

$$1 - xy \quad (5)$$

$$x + y = xyz - z$$

$$\underline{x + y + z = xyz} \quad (5)$$

25

$$(10). \operatorname{cosec} x + \sec x = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin(x + \pi/4) = \sin 2x$$

$$\sin(x + \pi/4) - \sin 2x = 0 \quad (5)$$

$$2 \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$(5) \quad \underline{\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} = m\pi + (-1)^n \cdot 0$$

$$(5) \quad \underline{\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} - m\pi, m \in \mathbb{Z}}$$

25

⑪ give marks to proof

30

$$ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \frac{k+1}{k} \\ \frac{k+2}{k+1} \end{cases}$$

When, $\frac{k+1}{k}$ and $\frac{k+2}{k+1}$ roots of the equation,

$$\textcircled{5} \quad \frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1} = \frac{-b}{a} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{k+2}{k} = \frac{c}{a} \quad \text{--- (2)} \quad \textcircled{5}$$

$$k = \frac{2a}{c-a} \quad \textcircled{5}$$

From (1):

$$\textcircled{5} \quad 1 + \frac{1}{k} + \frac{kc}{a(k+1)} = \frac{-b}{a}$$

$$1 + \frac{c-a}{2a} + \frac{2c}{(c-a)(\frac{2a}{c-a} + 1)} = \frac{-b}{a} \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{c-a}{2a} + \frac{2c}{a+c} = -\frac{(a+b)}{a}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{c^2 - a^2 + 4ac}{2(a+c)} = -(a+b)$$

$$c^2 - a^2 + 4ac + 2(a^2 + ab + ac + bc) = 0 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \quad a^2 + b^2 + c^2 + 4ac + 2ab + 2ac + 2bc = b^2$$

$$\underline{\underline{(\textcircled{5}) (a+b+c)^2 = b^2 - 4ac \quad \textcircled{5}}}$$

50

For real roots,

$$\Delta \geq 0$$

$$\textcircled{5} b^2 - 4ac = (a+b+c)^2 \textcircled{5} > 0$$

$\therefore$ equation has real roots always.

10

$$b). f(x) = (2x+1)(ax+b) \textcircled{5}$$

$$f(1) = -6$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -5$$

$$3(a+b) = -6$$

$$a+b = -2 \text{ --- (1) } \textcircled{5}$$

$$2\left(\frac{a}{2} + b\right) = -5$$

$$a + 2b = -5 \text{ --- (2) } \textcircled{5}$$

$$\underline{\underline{b = -3}} \textcircled{5} \quad \underline{\underline{a = 1}}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (2x+1)(x-3) \\ &= \underline{\underline{2x^2 - 5x - 3}} \textcircled{5} \end{aligned}$$

25

$$2x^2 - 5x - 3 = 4\lambda x \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - (5+4\lambda)x - 3 = 0 \textcircled{5} \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

$$\textcircled{5} \quad \alpha + \beta = \frac{5+4\lambda}{2}$$

$$\alpha \beta = \frac{-3}{2} \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(5+4\lambda) \times 2}{2 \times 3} \\ &= -\frac{(5+4\lambda)}{3} \quad (10)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha \cdot \beta} = -\frac{2}{3}$$

$\therefore$ The equation is,

$$(5) \quad x^2 + x \left(\frac{5+4\lambda}{3} \right) - \frac{2}{3} = 0$$

$$\underline{\underline{3x^2 + (5+4\lambda)x - 2 = 0}} \quad (5)$$

35

$$\begin{aligned}(12) (a). \quad (i) \quad y &= 1 - \sqrt{1-x^2} \\ \underline{\underline{D_y}} &= [-1, 1] \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii). \quad y &= \sqrt{x^2 - 4x + 3} \\ &= \sqrt{(x-2)^2 - 1}\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{D_y}} = \mathbb{R} - (1, 3) \quad (5)$$

$$(iv). \quad y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-2x}$$

$$\underline{\underline{D_y}} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \quad (5)$$

15

$$b). p(x) = x^{1/3}, \quad q(x) = (x^9 + x^6)^{1/2}, \quad r(x) = x\sqrt{1+x}$$

Hence,

$$q[p(x)] = q(x^{1/3})$$

$$\textcircled{5} = \left[(x^{1/3})^9 + (x^{1/3})^6 \right]^{1/2}$$

$$= \left[x^3 + x^2 \right]^{1/2} \textcircled{5}$$

$$\underline{\underline{q[p(x)] = x\sqrt{x+1} \textcircled{5}}}$$

15

$$c). i) \frac{x(y+z-x)}{\log x} = \frac{y(z+x-y)}{\log y} = \frac{z(x+y-z)}{\log z} = \frac{1}{k} \textcircled{5}$$

$$\log x = kx(y+z-x)$$

$$\log y = ky(z+x-y) \textcircled{5}$$

$$\log z = kz(x+y-z)$$

$$y \log x + x \log y = kxy(2z) = 2kxyz \text{ --- (1)}$$

$$y \log z + z \log y = 2kxyz \text{ --- (2) } \textcircled{5}$$

Similarly,

$$z \log x + x \log z = 2kxyz \text{ --- (3)}$$

From (1), (2) and (3), 10

$$y \log x + x \log y = y \log z + z \log y = z \log x + x \log z$$

$$\textcircled{5} \log x^y + \log y^x = \log z^y + \log y^z = \log x^z + \log z^x \textcircled{5}$$

$$\log(x^y \cdot y^x) = \log(z^y \cdot y^z) = \log(x^z \cdot z^x) \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \therefore \underline{\underline{x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x}} \textcircled{5} \quad \text{40}$$

$$c). ii. \log_{xy} = \frac{5}{2} \quad ; \quad \log_3 x \cdot \log_3 y = -6 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{1}{2 \log_{xy} 3} = \frac{5}{2} \quad (5)$$

$$\log_{xy} 3 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{\log_3 xy} = \frac{1}{5} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 y = 5 \quad \text{--- (1)}$$

From (2);

$$\log_3 x - \frac{6}{\log_3 x} = 5 \quad (5)$$

$$\text{When } \log_3 x = t,$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0 \quad (5)$$

$$(t - 6)(t + 1) = 0$$

$$t = 6 \quad \text{or} \quad t = -1$$

$$\log_3 x = 6$$

$$\underline{x = 3^6}$$

(5)

$$\log_3 x = -1 \quad (5)$$

$$x = 3^{-1}$$

$$\underline{x = \frac{1}{3}} \quad (5)$$

From (2);

$$6 \log_3 3 \cdot \log_3 y = -6$$

$$\log_3 y = -1$$

$$\underline{y = \frac{1}{3}}$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \log_3 y = -6$$

$$[\log_3(1) - \log_3 3] \log_3 y = -6$$

$$(0 - 1) \log_3 y = -6$$

$$\underline{y = 3^6} \quad (5)$$

40

$$(iv). \log_4 x = a, \quad \log_{12} x = b$$

$$\log_{12} x = b$$

$$\frac{1}{\log_x 12} = b \quad (5)$$

$$\log_x (3 \times 4) = \frac{1}{b} \quad (5)$$

$$\log_x 3 + \log_x 4 = \frac{1}{b}$$

$$\log_x 3 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \quad (5) \quad \left(\log_x 4 = \frac{1}{a} \right)$$

Then,

$$\begin{aligned} \log_3 4 &= \frac{\log_x 4}{\log_x 3} \\ &= \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\log_3 4 = \frac{b}{a-b}}} \quad (5)$$

25

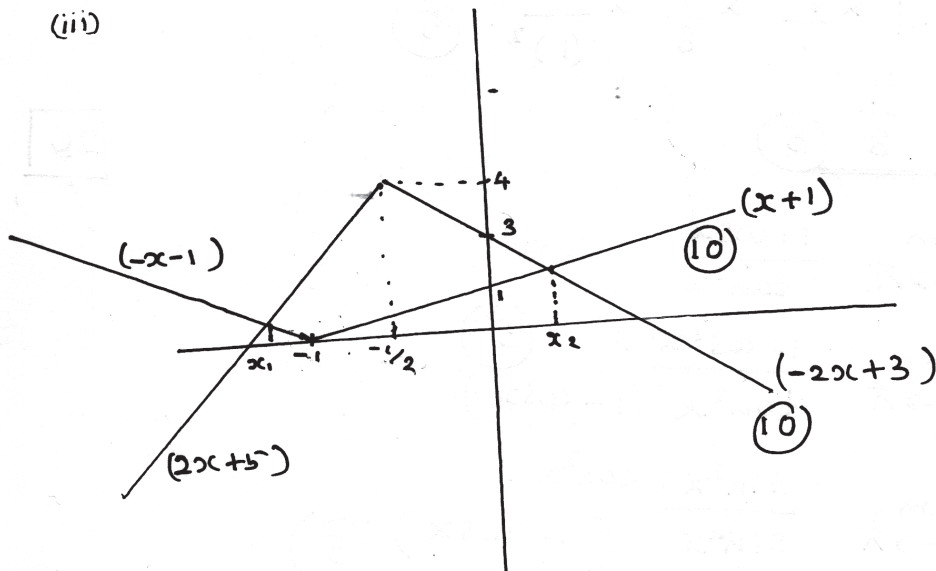
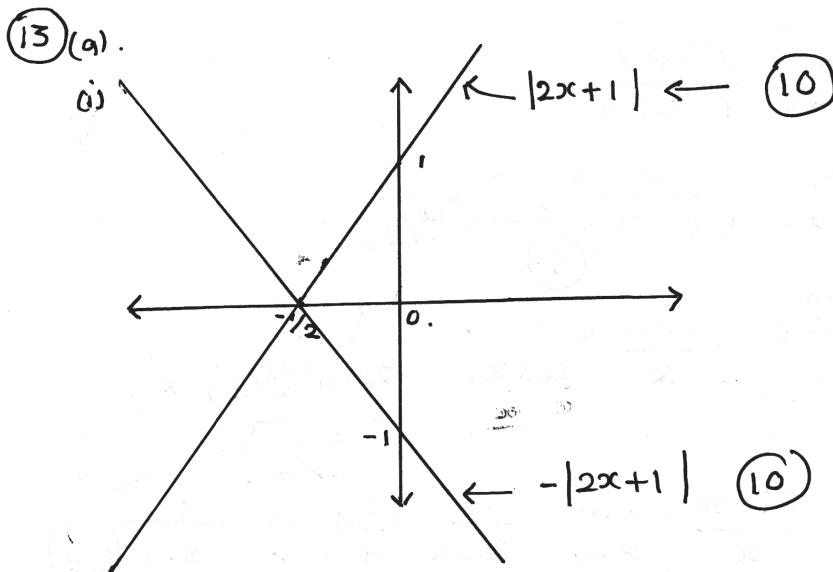
$$\log_3 48 = \log_3 (4^2 \times 3) \quad (5)$$

$$= 2 \log_3 4 + \log_3 3 \quad (5)$$

$$= \frac{2b}{a-b} + 1$$

$$\underline{\underline{\log_3 48 = \frac{a+b}{a-b}}} \quad (5)$$

15



$$|2x+1| + |x+1| \leq 4$$

$$|x+1| \leq 4 - |2x+1| \quad (5)$$

x_1

$$\begin{aligned} 2x+5 &= -x-1 \\ (5) \quad 3x &= -6 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

x_2

$$\begin{aligned} -2x+3 &= x+1 \quad (5) \\ 3x &= 2 \\ x &= 2/3 \end{aligned}$$

$\therefore$ solution space is $x \in [-2, 2/3]$

(5) 60

$$\begin{aligned}
 b). \quad (i) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x \cdot 2 \sin^2(x/2)} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{2 \sin^2(x/2) \times 4} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin^2(x/2)}{(x^2/4)}} \quad (5) \\
 &= 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{(1)^2} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{8} \quad (5)
 \end{aligned}$$

25

$$\begin{aligned}
 ii). \quad & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\tan^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{\tan^2 x \cdot (1 - \cos x)} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x (1 - \cos x)} \quad (5) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x}{(1 - \cos x)} \quad (5) \\
 &= \frac{(-1)^2}{1 - (-1)} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2} \quad (5)
 \end{aligned}$$

25

$$(m). \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x/2 (1 + \cos x + \cos^2 x)}{(5) 2x \sin x/2 \cos x/2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{2(x/2)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos x/2 \cos x} \quad (5)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{(1 + 1 + 1^2)}{1 \times 1} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

[25]

$$c). f(x) = \begin{cases} x+1; & x \leq 1 \\ 3-ax^2; & x > 1 \end{cases}$$

For "f" to be continuous at $x=1$,
We must have.

$$2 = f(1) = \lim_{(5) x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3-a \quad (5)$$

Thus,

$$\underline{\underline{a=1}} \quad (5)$$

[15]

(14) (a). $f(x) = (a-x)(x-b)$

$$f(x) = -x^2 + x(a+b) - ab$$

$$\begin{aligned} &= -\left\{x^2 - x(a+b) + ab\right\} \\ (5) &= -\left\{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + ab - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

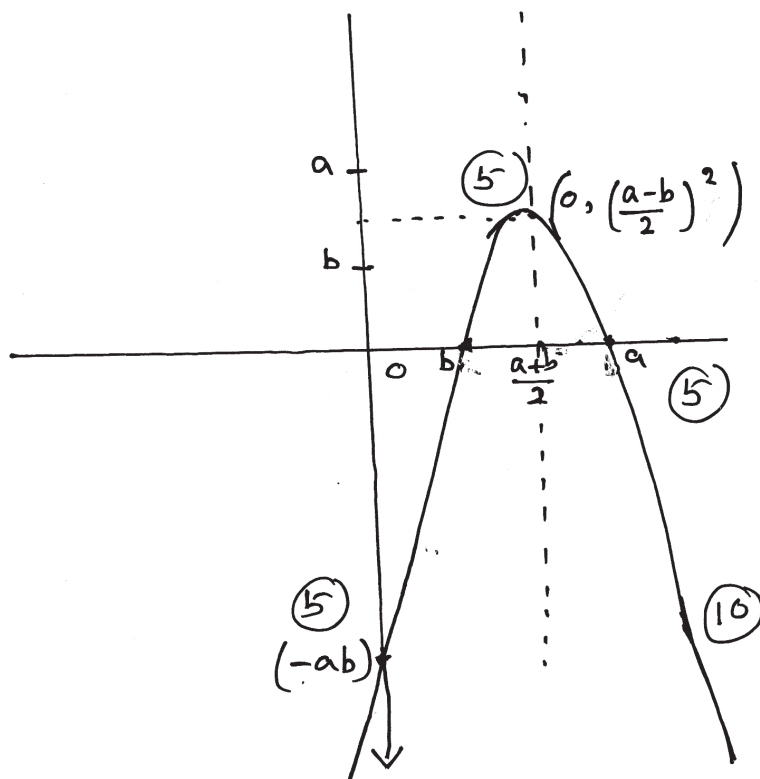
Then;

$$f(x)_{\max} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$f(x)_{\max} = \frac{1}{4}(a-b)^2 \quad (5) \quad \text{when } x = \frac{a+b}{2} \quad \boxed{15}$$

graph of the function f is.
When $0 < b < a$,



25

$$(b). (x-a)(x-b) - k^2 = 0 \quad \begin{matrix} c \\ d \end{matrix}$$

For real roots,

$$\Delta_x \geq 0.$$

$$\Delta_x = (a+b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ab - k^2) \quad (10)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4k^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + 4k^2 \quad (5)$$

$$= (a-b)^2 + 4k^2 \geq 0 \quad (5)$$

$\therefore$ eqⁿ have real roots. (5)

$$(x-c)(x-d) + k^2 = 0 \quad \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \quad x^2 - x(c+d) + k^2 + cd = 0 \quad (5)$$

$$(5) \quad \lambda + \mu = c + d \quad \text{--- (1)}$$

$$\lambda \mu = k^2 + cd \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{But, } (5) \quad \begin{matrix} c+d = a+b \\ cd = ab - k^2 \end{matrix} \quad (5)$$

From (2)

$$\lambda \mu = k^2 + ab - k^2$$

$$\lambda \mu = ab \quad \text{--- (A)} \quad (5)$$

From (1).

$$\lambda + \mu = a + b \quad \text{--- (B)} \quad (5)$$

$$\therefore \underline{\lambda = a} \quad \underline{\mu = b} \quad (5)$$

roots of the given equation are
a and b.

65

$$c) i) 2x^3 - x^2 + x + 1 \equiv (x-1)(2x^2 + x + 2) + 3 \quad (15)$$

$$ii) (2x^2 + x + 2) \equiv (x-3)(2x+7) + 23 \quad (15)$$

$$iii) 2x^3 - x^2 + x + 1 \equiv (x-1) \left\{ (x-3)(2x+7) + 23 \right\} + 3$$

$$\equiv (x-1)(x-3)(2x+7) + 23(x-1) + 3$$

$$\therefore \text{Remainder is } 23(x-1) + 3$$

$$= \underline{\underline{23x - 20}} \quad (15)$$

45

$$(15) \cdot \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1+x)} \quad (5)$$

$$1 = A(1+x) + B(1-x)$$

$$x^0 \rightarrow A + B = 1 \quad (5)$$

$$x^1 \rightarrow A - B = 0$$

$$A = B = \frac{1}{2} \quad (5)$$

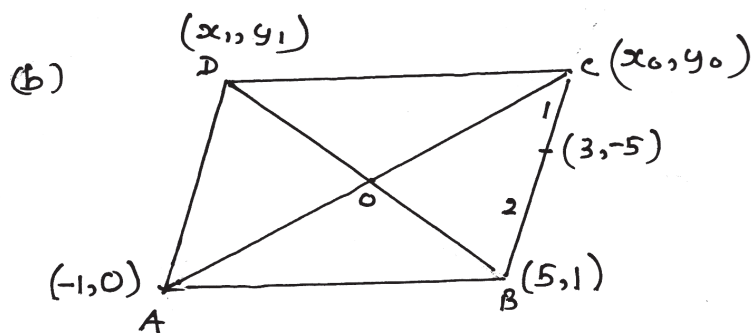
$$\therefore \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \quad (5)$$

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{1}{(1-x)^2} \left\{ \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right\} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \right\} \left\{ \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(1-x)^{-3} + \frac{1}{4}(1-x)^{-2} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(1-x)^{-3} + \frac{1}{4}(1-x)^{-2} + \frac{1}{8}(1-x)^{-1} + \frac{1}{8}(1+x)^{-1}}} \quad (50)$$



$$\frac{2x_0 + 5}{3} = 3$$

$$2x_0 = 4$$

$$x_0 = 2$$

$$\frac{2y_0 + 1}{3} = -5$$

$$2y_0 = -16$$

$$y_0 = -8$$

$$\therefore \underline{\underline{C \equiv (2, -8)}} \quad (10)$$

Therefore,

$$O \equiv \left(\frac{2-1}{2}, \frac{-8}{2} \right)$$

$$\underline{\underline{O \equiv \left(\frac{1}{2}, -4 \right)}} \quad (10)$$

$$\therefore \frac{x_1 + 5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = -5$$

$$\frac{y_1 + 1}{2} = -4$$

$$y_1 = -9$$

$$\underline{\underline{D \equiv (-5, -9)}} \quad (10)$$

$$\text{Length of } AC = \sqrt{(2+1)^2 + (-8)^2} = \underline{\underline{\sqrt{73} \text{ units}}} \quad (10)$$

$$\text{Length of } BD = \sqrt{(5+5)^2 + (1+9)^2} = \underline{\underline{10\sqrt{2} \text{ units}}} \quad (10)$$

50

$$\begin{aligned}
 \text{e). } k^2x^2 + (kx+1)(x+k) + 1 &= 0 \\
 (k^2+k)x^2 + (k^2+1)x + k+1 &= 0
 \end{aligned}
 \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

Then;

$$\alpha + \beta = \frac{-(k^2+1)}{k(k+1)} \quad (5)$$

$$\alpha\beta = \frac{k+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} \quad (5)$$

Consider;

$$\alpha^2\beta^2 + (\alpha\beta+1)(\alpha+\beta) + 1$$

$$= \left(\frac{k+1}{(k+1)k}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{k(k+1)} + 1\right) \left(\frac{-(k^2+1)}{k(k+1)}\right) + 1 \quad (10)$$

$$= \frac{(k+1)^2}{k^2} - \frac{(k+1)(k^2+1)}{k \cdot k(k+1)} + 1 \quad (10)$$

$$= \frac{1 - k^2 - 1}{k^2} + 1 \quad (5)$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0 \quad (5)$$

50

(16)

$$a). \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B}$$

$$= \frac{(\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sin 2A - \frac{1}{2} \sin 2B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} \quad (10)$$

$$= \frac{2 \times 2 \cdot \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \times 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} \quad (5)$$

$$= \frac{2 \cos(A+B) \sin(A-B)}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} \quad (5)$$

$$= \frac{\sin(A+B) \sin(A-B)}{\cos(A+B) \sin(A-B)}$$

$$= \underline{\underline{\tan(A+B)}} \quad (5)$$

40

$$b). \tan 3\alpha = 1$$

$$\tan 3\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$3\alpha = n\pi + \frac{\pi}{4} \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{12} ; n \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

$$\left\{ \alpha = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \dots \right\} \quad (5)$$

But,

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} = 1 \quad (10)$$

$$\text{If, } \Rightarrow 3\tan\alpha - \tan^3\alpha - 1 + 3\tan^2\alpha = 0 \quad (5)$$

$$t = \tan\alpha$$

$$t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0 \quad (1)$$

(5)

From (1).

$$(t+1)(t^2-4t+1) = 0$$

$$t = -1 \quad (5)$$

$$\alpha = \pi/12, \quad 5\pi/12. \quad (5)$$

$\therefore$ above eqⁿ has 3 roots,

$$\underline{\tan \alpha = -1, \quad \tan(\pi/12), \quad \tan(5\pi/12)}. \quad (5)$$

Consider, $(t^2-4t+1) = 0$

$$(5) \quad t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2}$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} \quad (5)$$

$$t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\tan(\pi/12) < \tan(5\pi/12) \quad (5)$$

$$\therefore \underline{\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}} \quad (5)$$

[70]

$$c). \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{x}{2} + \tan^{-1}\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Let } \alpha = \tan^{-1}x, \quad \beta = \tan^{-1}\frac{x}{2}, \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{x}{3}$$

$$\tan \alpha = x, \quad (5) \tan \beta = \frac{x}{2}, \quad \tan \gamma = \frac{x}{3}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (5)$$

$$(5) \tan(\alpha + \beta) = \tan(\frac{\pi}{2} - \gamma)$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \cot \gamma$$

$$1 - \tan \alpha \tan \beta \quad (5)$$

$$\frac{x + x/2}{1 - x \cdot \frac{x}{2}} = \frac{3}{x}$$

$$(5)$$

$$\frac{2x + x}{2 - x^2} = \frac{3}{x}$$

$$x \neq (0, \pm\sqrt{2})$$

$$(5)$$

$$(5) 3x^2 = 6 - 3x^2$$

$$6x^2 = 6$$

$$\underline{x = \pm 1} \quad (5)$$

40

(17) (a) give marks to proof sine-Rule 30

$$a = (b-c) \cos(A/2) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\frac{a}{b-c} = \cos(A/2) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad (5)$$

L.H.S. $\frac{a}{b-c}$

From sine rule,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

$$= \frac{\lambda \sin A}{\lambda \sin B - \lambda \sin C}$$

$$= \frac{\sin A}{\sin B - \sin C}$$

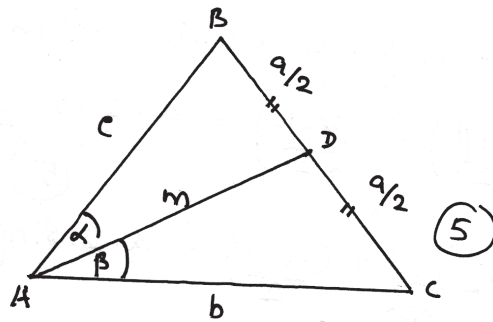
$$= \frac{2 \cancel{\sin(A/2)} \cos(A/2)}{2 \cos(\frac{B+C}{2}) \sin(\frac{B-C}{2})} \quad (5) \quad \left(\because A+B+C = \pi \right)$$

$$= \cos(A/2) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{a}{b-c} = \cos(A/2) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{a = (b-c) \cos(A/2) \operatorname{cosec}\left(\frac{B-C}{2}\right)}}$$

20



$$(i) 2m(\sin \alpha - \sin \beta) = a(\sin B - \sin C) \quad (5)$$

From sine - Rule,
for, $\triangle ABD$,

$$\frac{\sin B}{m} = \frac{\sin \alpha}{a/2} \quad (1) \quad (5)$$

for $\triangle ACD$,

$$\frac{\sin C}{m} = \frac{\sin \beta}{a/2} \quad (2) \quad (5)$$

(1) and (2),

$$a \sin B = 2m \sin \alpha \quad (5)$$

$$a \sin C = 2m \sin \beta$$

$$\therefore \underline{2m(\sin \alpha - \sin \beta) = a(\sin B - \sin C)} \quad (5)$$

ii). Considering, above result,

$$2m(\sin \alpha - \sin \beta) = a(\sin \beta - \sin \gamma)$$

$$\underset{(5)}{2m} \cdot \underset{(5)}{2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = a \cdot \underset{(5)}{2 \cos \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right)} \sin \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right)$$

$$\underset{(5)}{2m} \cdot \underset{(5)}{2 \cos \left(\frac{A}{2} \right)} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = a \cdot \underset{(5)}{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)} \sin \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \right)$$

But,

$$a = (b - c) \cos \left(\frac{A}{2} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{B - C}{2} \right)$$

$$\underset{(10)}{2m \cos \left(\frac{A}{2} \right) \operatorname{cosec} \left(\frac{B - C}{2} \right)} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = a \sin \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$2m \cdot \frac{a}{(b - c)} \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = a \sin \left(\frac{A}{2} \right) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{2m \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = (b - c) \sin \left(\frac{A}{2} \right) \quad (5) \quad [40]}}$$

b). Cosine Rule. — (5)

If,

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca}$$

$$\frac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2} - \cancel{a^2}}{2bac} + \frac{\cancel{a^2} + \cancel{c^2} - \cancel{a^2}}{2abc} + \frac{\cancel{a^2} + b^2 - \cancel{a^2}}{2abc} = \frac{ca^2 + b^2c}{abc^2} \quad (10)$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{a^2 + b^2}{abc}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad (10)$$

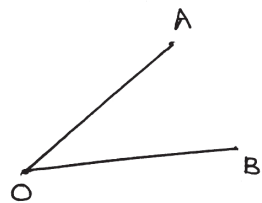
$$(5) \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C = 0$$

$$\underline{\underline{C = \pi/2 \quad (5)}}$$

[35]

Second Term Test - 2019
Combined Mathematics II - Part A - Grade 12

01)



$$\begin{aligned}\vec{OA} &= 2\hat{i} + 3\hat{j} \\ \vec{OB} &= -\hat{i} + 5\hat{j} \\ \vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= -\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{i} - 3\hat{j} \\ &= -3\hat{i} + 2\hat{j} \quad (5)\end{aligned}$$

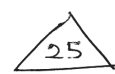
$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \quad (5)$$

The unit vector in the direction of $\vec{OA} = \frac{\vec{OA}}{|\vec{OA}|} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j}}{\sqrt{4+9}} \quad (5)$

$$= \frac{2\hat{i} + 3\hat{j}}{\sqrt{13}} \quad (5)$$

The vector in the direction of $\vec{OA} = \frac{2\hat{i} + 3\hat{j}}{\sqrt{13}} \times 3\sqrt{13}$

$$= \underline{\underline{6\hat{i} + 9\hat{j}}} \quad (5)$$



02) $\underline{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j}$ $\underline{b} = k\hat{i} + 2\hat{j}$

Since $\underline{a} \perp \underline{b}$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos 90^\circ = 0$$

$$(2\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot (k\hat{i} + 2\hat{j}) = 0 \quad (5)$$

$$2k - 10 = 0 \Rightarrow k = 5$$

i) $\underline{b} - \underline{a} = k\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{i} + 5\hat{j} = 3\hat{i} + 7\hat{j} \quad (5)$

ii) $|\underline{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$$|\underline{b} - \underline{a}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \quad (5)$$

If the angle between $\underline{a}$ and $\underline{b} - \underline{a}$ is θ ,

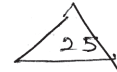
$$\underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{a}) = |\underline{a}| |\underline{b} - \underline{a}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{a})}{|\underline{a}| |\underline{b} - \underline{a}|} \quad \text{--- ①}$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{a}) = (2\hat{i} - 5\hat{j}) \cdot (3\hat{i} + 7\hat{j}) = -29 \quad \text{⑤}$$

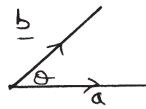
$$\text{①} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-29}{\sqrt{29} \times \sqrt{58}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta = \underline{\underline{135^\circ}} \quad \text{⑤}$$



$$\text{03) } \underline{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$\underline{b} = 2\hat{i} - \hat{j}$$



$\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \theta \underline{n}$ ⑤ where $\underline{n}$ is a unit vector perpendicular to both $\underline{a}$ and $\underline{b}$ such that $\underline{a}$, $\underline{b}$ and $\underline{n}$ are in the right handed orientation.

$$\underline{a} \times \underline{b} = (4\hat{i} + 3\hat{j}) \times (2\hat{i} - \hat{j}) \quad \text{⑤}$$

$$= 8\hat{i} \cdot \hat{i} - 4\hat{i} \cdot \hat{j} + 6\hat{j} \cdot \hat{i} - 3\hat{j} \cdot \hat{j}$$

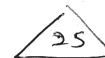
$$= 6\hat{j} \cdot \hat{i} - 4\hat{i} \cdot \hat{j} \quad \text{⑤}$$

$$\underline{b} \times \underline{a} = (2\hat{i} - \hat{j}) \times (4\hat{i} + 3\hat{j}) \quad \text{⑤}$$

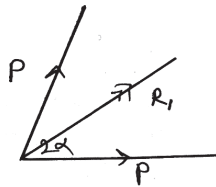
$$= 8\hat{i} \times \hat{i} + 6\hat{i} \times \hat{j} - 4\hat{j} \times \hat{i} - 12\hat{j} \times \hat{j}$$

$$= 6\hat{i} \times \hat{j} - 4\hat{j} \times \hat{i} \quad \text{⑤}$$

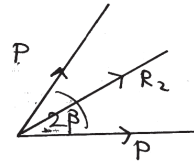
$$\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$$



04)



$$R_1 = 2R_2$$



$$\therefore R_1^2 = 4R_2^2 \quad (5)$$

$$R_1^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\alpha \quad (1) \quad (5)$$

$$R_2^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\beta \quad (2) \quad (5)$$

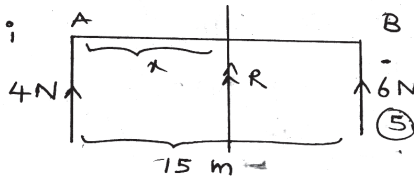
$$P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\alpha = 4 [P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\beta]$$

$$2P^2 (1 + \cos 2\alpha) = 8P^2 (1 + \cos 2\beta) \quad (5)$$

$$\cos \alpha = 2 \cos \beta \quad (5)$$



05) i



$$R = 10 \text{ N} \quad (5)$$

$$\sum \tau_A: 10x = 15 \times 6 \Rightarrow x = 9 \text{ m} \quad (5)$$



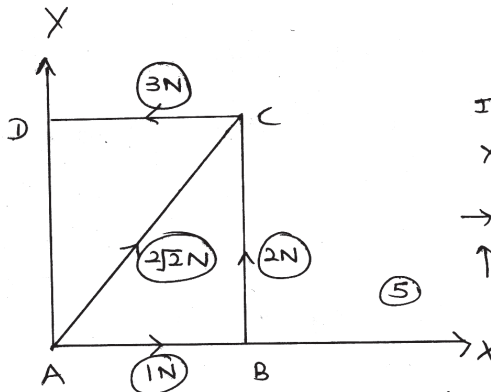
$$\uparrow R = 6 - 4 \text{ N} = 2 \text{ N} \quad (5)$$

$$\sum \tau_A: 2x = 6 \times 15$$

$$x = 45 \text{ m} \quad (5)$$



06)



If reduces to a single force

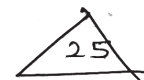
$$X \neq 0 \text{ and } Y \neq 0 \quad (5)$$

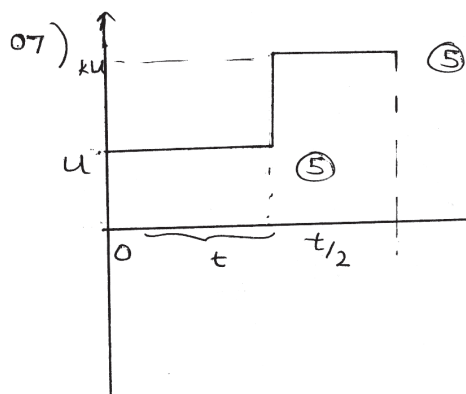
$$\rightarrow x = 1 - 3 + 2\sqrt{2} \cos 45 = 0 \quad (5)$$

$$\uparrow Y = 2 + 2\sqrt{2} \cos 45 = 4 \text{ N} \quad (5)$$

$\therefore$ The system reduces to a single force.

$$\begin{aligned} \sum \tau_A: G &= 2 \times 2a + 3 \times 2a \\ &= 10 \text{ a Nm} \end{aligned} \quad (5)$$



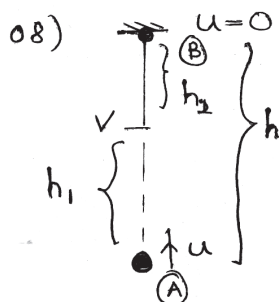


$S = \text{Area}$

$$= ut + ku \times \frac{t}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{ut}{2} (2+k) \quad (5)$$

25



for (A) $V^2 = u^2 + 2as$

$$= u^2 - 2gh_1 \quad (1) \quad (5)$$

for (B) $V^2 = u^2 + 2as$

$$V^2 = 2gh_2 \quad (2) \quad (5)$$

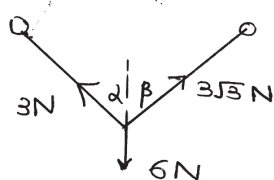
by (1) & (2) $\Rightarrow u^2 - 2gh_1 = 2gh_2 \quad (10)$

$$u^2 = 2g(h_1 + h_2)$$

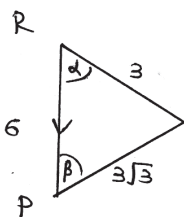
$$\underline{u^2 = 2gh} \quad (5)$$

25

09)



(5)



(10)

Since $6^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2$, $\angle PQR$ is a right angle.

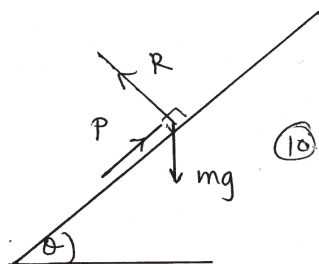
$$\tan \beta = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 30^\circ}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{\beta = 30^\circ}} \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 60^\circ}} \quad (5)$$

(5)

10)



(10)

$$P - mg \sin \theta = 0 \quad (10)$$

$$\sin \theta = \frac{P}{mg}$$

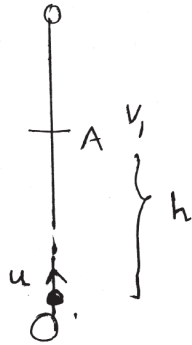
$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{P}{mg} \right) \quad (5)$$

25

Third Term Test - 2018

Combined Mathematics II - Part B - Grade 12

11)



For the motion O-A ,

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$$

$$gt^2 - 2ut + 2h = 0$$

This is a quadratic equation in t. 40

$$t_1 + t_2 = \frac{2u}{g} \quad (16)$$

$$(t_2 - t_1)^2 = (t_2 + t_1)^2 - 4t_1t_2 \quad (10)$$

$$t_1t_2 = \frac{2h}{g} \quad (10)$$

$$= \frac{4u^2}{g^2} - \frac{8h}{g}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh} \quad (10)$$

$$\uparrow V^2 = u^2 + 2as$$

$$V^2 = u^2 - 2gh \Rightarrow V = \sqrt{u^2 - 2gh} \quad (10)$$

For the motion AOA ,

$$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = \sqrt{(u^2 - 2gh)} t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \quad (10)$$

$$0 = t_2 \left[\sqrt{u^2 - 2gh} - \frac{gt_2}{2} \right] \quad (5)$$

$$t_2 = 0 \text{ or } t_2 = \frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh} \quad (5)$$

$$\therefore \text{The time taken} = \frac{2}{g} \sqrt{u^2 - 2gh} \quad (5)$$

Velocity at the height h ,

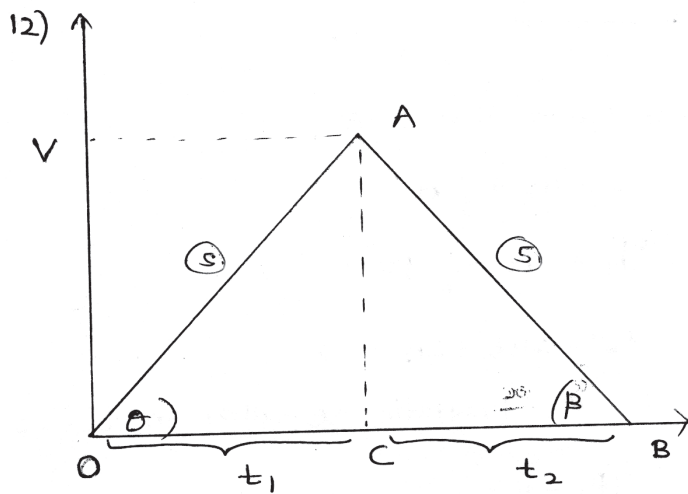
$$\text{since } V = \sqrt{u^2 - 2gh} \quad (10)$$

$$\text{When } h \text{ is maximum, } V = 0. \quad (10)$$

If the maximum height is H ,

$$0 = \sqrt{u^2 - 2gH}$$

$$\therefore H = \frac{u^2}{2g} \quad (10)$$



$$\tan \theta = a_1 \text{ ms}^{-2}$$

$$\tan \beta = a_2 \text{ ms}^{-2}$$

From OAC Δ , $\tan \theta = \frac{V}{t_1} = a_1$ (5)

$$t_1 = \frac{V}{a_1} \quad (5)$$

$$\tan \beta = \frac{V}{t_2} = a_2 \quad (5)$$

$$t_2 = \frac{V}{a_2} \quad (5)$$

$S = \text{Area of } OAB \Delta = \frac{1}{2} V \cdot (t_1 + t_2)$ (5)

$$V = \frac{2S}{t_1 + t_2} \quad (5)$$

① + ② $t_1 + t_2 = V \left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \right)$ (5)

$$V = \frac{2S a_1 a_2}{V (a_1 + a_2)}$$

$$V = \sqrt{\frac{2S a_1 a_2}{a_1 + a_2}} \quad (5)$$

$$t_1 + t_2 = \left[\frac{2S (a_1 + a_2)}{a_1 a_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

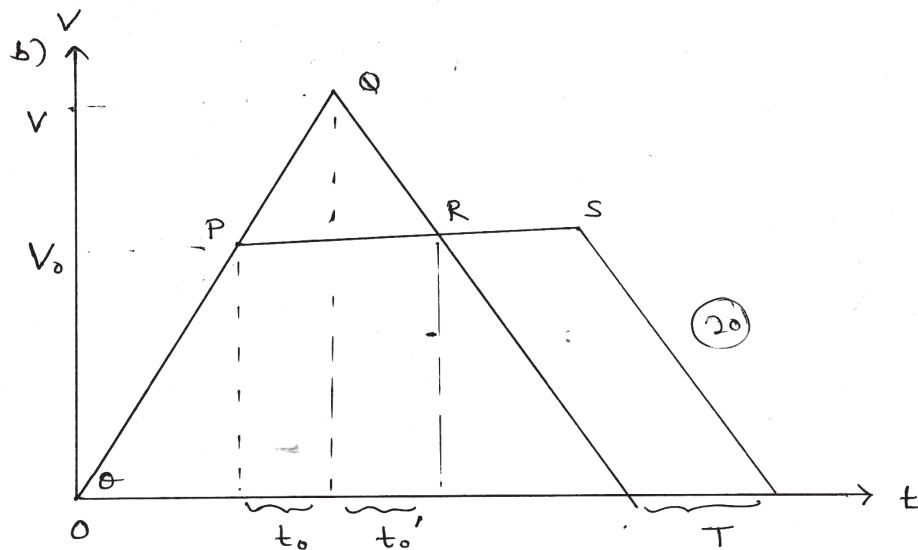
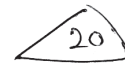
$$a_1 = a \text{ ms}^{-2}$$

$$a_2 = a \text{ ms}^{-2}$$

$$t_1 + t_2 = V \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right] = \frac{2V}{a}$$

$$t_1 + t_2 = \left[2S \frac{(a+a)}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{S}{a}} \quad (10)$$

$$\text{minimum time} = 2\sqrt{\frac{S}{a}} \quad (10)$$



Since the distances travelled are equal,

$$\text{Area of PQR} = \text{Area of RSXY} \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} (V - V_0) (t_0 + t_0') = V_0 T \quad (A) \quad (5)$$

$$a_1 = \frac{V - V_0}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{V - V_0}{a_1} \quad (10)$$

$$a_2 = \frac{V - V_0}{t_0'} \Rightarrow t_0' = \frac{V - V_0}{a_2} \quad (10)$$

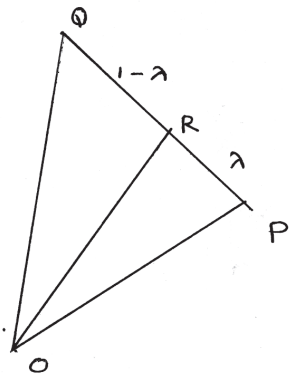
$$(A) \Rightarrow \frac{1}{2} (V - V_0)^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) = V_0 T \quad (5)$$

$$V = \sqrt{\frac{2Sa_1a_2}{a_1 + a_2}} \Rightarrow \frac{2S}{V^2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad (10)$$

$$T = \frac{S(V - V_0)^2}{V_0 V^2} \quad (5)$$



(13)



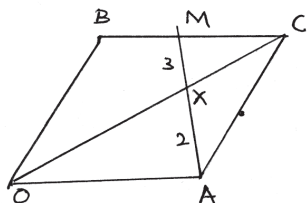
$$\frac{PR}{PQ} = \frac{\lambda}{1}$$

$$\vec{PR} = \lambda \vec{PQ} = \lambda [\vec{PO} + \vec{OQ}]$$

$$= \lambda (\underline{q} - \underline{p})$$

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR}$$

$$= \underline{p} + \lambda (\underline{q} - \underline{p})$$



$$\vec{OA} = \underline{a}, \quad \vec{OB} = \underline{b}$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{b} \quad (20)$$

$$\vec{OM} = \underline{b} + \frac{1}{2} \underline{a} \quad (20)$$

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \frac{2}{5} \vec{AM} \quad (10)$$

$$= \underline{a} + \frac{2}{5} (-\underline{a} + \underline{b} + \frac{1}{2} \underline{a})$$

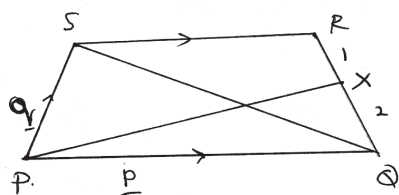
$$= \underline{a} + \frac{2}{5} (\underline{b} - \frac{1}{2} \underline{a}) \quad (20)$$

$$= \frac{4}{5} \underline{a} + \frac{2\underline{b}}{5} \quad (10)$$

$$= \frac{4}{5} (\underline{a} + \frac{1}{2} \underline{b}) = \frac{4}{5} \vec{OC} \quad (20)$$

(14)

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \quad \text{for the proof} \quad (40)$$



$$\vec{PX} = \vec{PQ} + \frac{2}{3} \vec{QR} \quad (10)$$

$$= \underline{p} + \frac{2}{3} (\underline{QR} + \underline{PR})$$

$$= \underline{p} + \frac{2}{3} (-\underline{p} + \underline{q} + \frac{\underline{p}}{3}) \quad (10)$$

$$= \underline{p} - \frac{4\underline{p}}{3} + \frac{2\underline{q}}{3} = \frac{5\underline{q}}{3} - \frac{2\underline{p}}{3} \quad (20)$$

$$\vec{PY} = \vec{PQ} + \vec{QY}$$

$$= (1-\lambda) \underline{p} + \lambda \underline{q} \quad (20)$$

$$\vec{PY} = \mu \vec{PQ}$$

$$(1-\lambda) \underline{p} + \lambda \underline{q} = \mu (\frac{5}{3} \underline{p} + \frac{2}{3} \underline{q})$$

$$\underline{p} (1-\lambda - \frac{5\mu}{3}) + \underline{q} (\lambda - \frac{2\mu}{3}) = \underline{0} \quad (20)$$

$$\text{Since } \underline{p} \neq \underline{0}, \underline{q} \neq \underline{0} \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{2}{3} \mu, \quad \lambda + \frac{5\mu}{3} = 1$$

$$\mu = \frac{9}{10}$$

$$\lambda = \frac{6}{11} \quad (20)$$

15) If the resultant is R ,

$$R = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{i} + 5\hat{j} + P\hat{i} + Q\hat{j}$$

$$= (6+P)\hat{i} + (10+Q)\hat{j} \quad (30)$$

To be equivalent to a couple G , $R = 0$ (10)

$$\sum x_i = 0$$

$$\sum y_i = 0$$

$$6+P=0 \quad (10)$$

$$10+Q=0 \quad (10)$$

$$P = -6$$

$$Q = -10$$

$\therefore$ The system reduces to a single force acting at $\hat{i} + \hat{j}$

$$R = Y\hat{j}$$

$$Y\hat{j} = (6+P)\hat{i} + (10+Q)\hat{j} \quad (20)$$

$$\sum x_i = 0.$$

$$6+P=0, \quad P = -6N$$

$$Y = 10+Q \quad (20)$$

$Y\hat{j}$ is equivalent to a single force, the moments about the point $\hat{i} + \hat{j}$ should be equal to zero. (10)

The moment about O , = moments about $Y\hat{j}$ (10)

$$2Q + 5 - 4 - 6 - (-8 + 2 + 3P) = Y \times 1$$

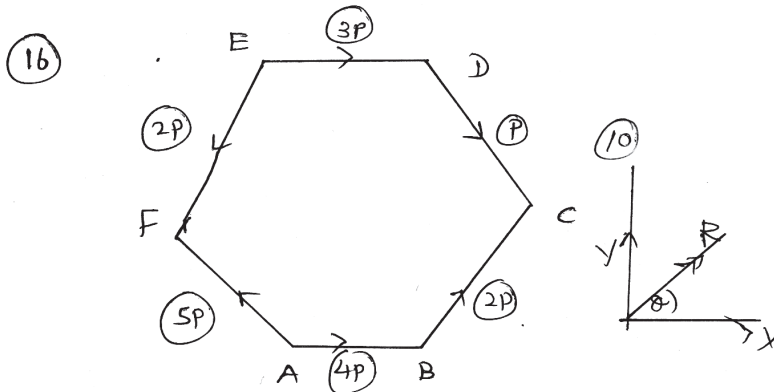
$$2Q - 5 + 8 - 2 - 3P = Y$$

$$Q$$

$$= -9$$

$$= 1$$

$$(30)$$

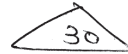


$$\rightarrow X = 4P + 3P - 4P \cos 60 = 5P \quad (5)$$

$$\uparrow Y = 7P \cos 30 - 3P \cos 30 = 2\sqrt{3}P \quad (5)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{(5P)^2 + (2\sqrt{3}P)^2} = \sqrt{37}P \quad (5)$$

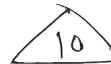
$$\tan \theta = \frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) \quad (5)$$



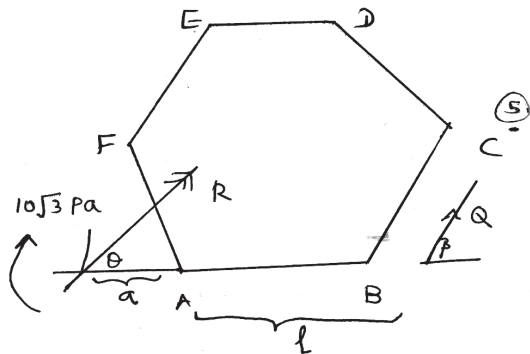
$$\begin{aligned} \textcircled{A} \quad -Y \times x &= -2P \cos 60^\circ \times 2a \cos 30^\circ + 3P \times 2a \cos 30^\circ + \\ &P \cos 30^\circ \times a + P \cos 60^\circ \times 2a \cos 30^\circ - 2P \cos 30^\circ \times a \\ &= -\sqrt{3}Pa + 3\sqrt{3}Pa \end{aligned}$$

$$-2\sqrt{3}Pa = 2\sqrt{3}Pa$$

$$x = -a \quad (10)$$



It lies at a distance a from A on the produced line BA .



Since the new system is in equilibrium

$$\rightarrow X = 0$$

$$\uparrow Y = 0$$

$$\textcircled{A} = 0$$

(5)

$$\rightarrow R \cos \theta + Q \cos \beta = 0$$

$$Q \cos \beta = -R \cos \theta = -8P \quad (5)$$

$$Q \sin \beta = -R \sin \theta = -2\sqrt{3}P \quad (5)$$

$$\tan \beta = \tan \theta$$

$$\beta = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) \quad (5)$$

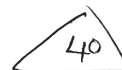
$$R^2 = Q^2 \Rightarrow R = Q \quad (5)$$

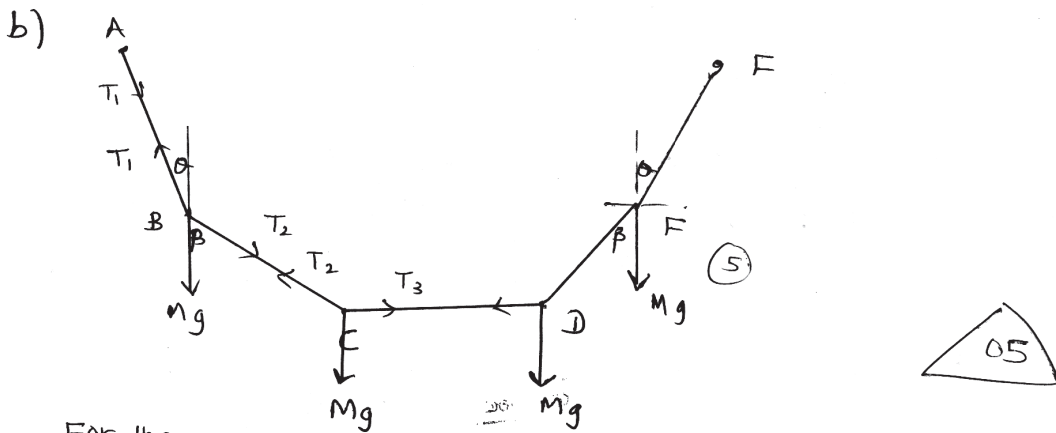
$$\textcircled{A} \quad R \sin \theta \times a = 10\sqrt{3}Pa - Q \sin \beta \times l$$

$$2\sqrt{3}P \times a = 10\sqrt{3}Pa - 2\sqrt{3}P \times l$$

$$2\sqrt{3}Pl = 8\sqrt{3}Pa \quad (10)$$

$$l = 4a$$





For the equilibrium of B,

$$\uparrow T_1 \cos \theta = Mg + T_2 \cos \beta \quad (10)$$

$$T_1 \sin \theta = T_2 \sin \beta \quad (10)$$

$$T_1 = 2Mg \sec \theta \quad (10)$$

$$2Mg \sec \theta \sin \theta = Mg \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (10)$$

$$2 \tan \theta = \tan \beta$$

For the equilibrium at C,

$$T_3 = T_2 \sin \beta = \frac{Mg \sin \beta}{\cos \beta} \quad (10)$$

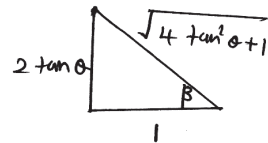
$$T_3 = Mg \tan \beta = 2Mg \tan \theta$$

The tension in the part BC, $T_2 = \frac{Mg}{\cos \beta}$

$$= Mg \sqrt{4 \tan^2 \theta + 1} \quad (10)$$

For the eqⁿ of C,

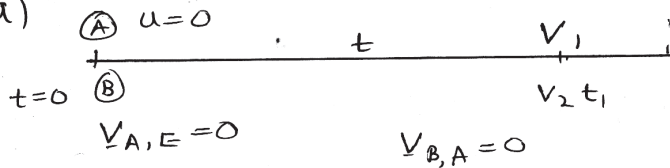
$$\uparrow T_2 \cos \beta = Mg \quad (10)$$



$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{4 \tan^2 \theta + 1}} \quad (10)$$

(17)

a)



$$a_{B,A} = a_{B,E} + a_{E,A} \quad (5) \quad \text{When } t=t, V_{A,E} = V_1$$

$$= \rightarrow f + \leftarrow (-f)$$

$$a_{A,B} = 0 \quad (5), \quad a_{A,B} = 0 \quad (5)$$

$$t=t \quad V_{A,B} = V_{A,E} + V_{E,B}$$

$$= V_1 - V_2 = 0 \quad (10)$$

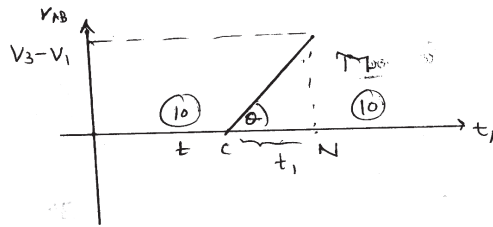
$$a_{A,B} = a_{A,E} + a_{E,B} = 0 \quad (5)$$

When $t = t + t_1$, $V_{AE} = \sqrt{3}$

$V_{BE}' = V_1$

$V_{A,B} = V_{A,E} + V_{E,B} = V_3 - V_1$ (5)

$a_{A,B} = a_{A,E} + a_{E,B} = f + 0$ (5)



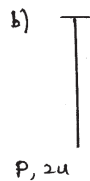
$\tan \theta = f$

$= \frac{V_3 - V_1}{t_1} = f$ (5)

The distance between A and B = Area of LMN.

$= \frac{1}{2} t_1 (V_3 - V_1)$

$= \frac{1}{2} f t_1^2$ (10)



at $t=0$, $V_{P,E} = \uparrow 2u$

$V_{Q,P} = V_{Q,E} + V_{E,P}$ (10)

$= 0 + (-2u) = -2u$

$a_{Q,P} = a_{Q,E} + a_{E,P}$
 $= 0 + g$ (5)



When $t = t_1$,

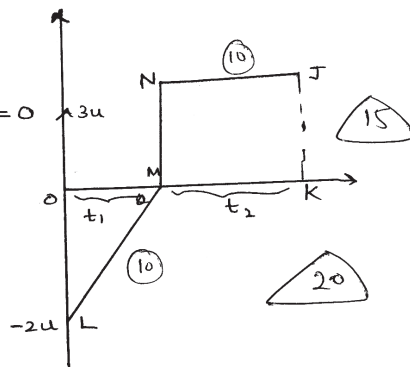
$V_{P,E} = 0$, $V_{Q,E} = 3u$

$V_{Q,P} = V_{Q,E} + V_{E,P} = 3u + 0$ (10)

$a_{Q,P} = a_{Q,E} + a_{E,P} = (g) + (g) = 0$ (5)

$\tan \theta = g = \frac{2u}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{2u}{g}$ (5)

$0 = \frac{1}{2} \times 2u \times t_1 - 3u t_2$ (5)



$3u t_2 = u t_1$

$t_2 = \frac{t_1}{3}$ (5)

Total time taken to collide = $t_1 + t_2$ (5)

$= \frac{2u}{g} + \frac{2u}{3g}$

$= \frac{8u}{3g}$ (5)

