



තෙවන වාර පරීක්ෂණය - 12 ශ්‍රේණිය - 2019

Third Term Test - Grade 12 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
 A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
 වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
 ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 12 - I (A කොටස)

- 01) $3 + 4x - 2x^2$ වර්ගජ ප්‍රකාශනයට x වල කුමන අගයක් සඳහා වැඩිතම අගයක් ලැබේද? වැඩිතම අගය දී සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 02) $\frac{3}{x} \leq \frac{x+1}{x-2}$ අසමානතාවයේ විසඳුම් කුලකය ලබා ගන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 03) $f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 12x + a$ වේ. මෙහි a හා b නියත වේ. $f(x)$ හි $(x + 2)$ සාධකයක් වන අතර $f(x)$, වර්ගජ ප්‍රකාශනයක පූර්ණ වර්ගයකි. a හා b සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 04) $\frac{3x+5}{(3x-1)(3x+2)}$ හින්න භාග වෙන් කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

07) $x + y \neq 0$ සඳහා, $x + y = \sin(x + y)$ නම්, $\frac{dy}{dx} = -1$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

08) සියලු $x \in R$ සඳහා $f(x)$ ශ්‍රිතය $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ ලෙස අර්ථ දැක්වේ නම්, අවකලනයෙන් තොරව $f(x)$ ට ගත හැකි අඩුතම අගය නිර්ණය කරන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 12 - I (B කොටස)

ප්‍රශ්න හතෙන් පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- 11) a) $f(x) = (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)$ වේ.
 මෙහි a, b, c තාත්වික වන අතර $a \neq b \neq c$ වේ.
 $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රතිඵල මූල 2ක් ඇති බව පෙන්වන්න.
 එම මූල p හා q නම්,
 $p + q$ හා pq සඳහා ප්‍රකාශන a, b සහ c ඇසුරින් දක්වන්න.
 i. p, b, q සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම්, c, b, a ද, සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව හා $f(a) = f(c) = -2f(b)$ යැයි ද දක්වන්න.
 ii. c, b, a ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම් $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව දක්වන්න.
- 12) a) $(x^2 + 5)$ සාධකයක් වන $(x - 1)$ න් හා $(x + 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් -6 හා 45 වන 3 වන මාත්‍රයේ බහු පදය සොයන්න.
 $ax^3 + bx + c = 0, a \neq 0$ හි $x^2 + px + 1$ සාධකයකි. එවිට $a^2 - c^2 = ab$ බව පෙන්වන්න.
 මෙම අවස්ථාවේ දී $cx^3 + bx^2 + a$ හි ද $x^2 + px + 1$ සාධකයක් බව පෙන්වන්න.
- b) i. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ හි වසම ලියන්න
 ii. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ හි පරාසය ලියන්න.
 iii. $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ හා $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ නම් $f(g(x)) = x = g(f(x))$ බව ලබා ගන්න.
 iv. $f(x) = \frac{1-2x}{1+x}; x \neq -1$ ශ්‍රිතය එකට එක හා මතට බව පෙන්වා ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය සොයන්න.
 $f(x)$ හි වසම හා පරාසය ද සඳහන් කරන්න.
- 13) a) $y = |x - a|$ හා $y = b|x - 5|$ හි $b > a > 0, b \neq 1$ වේ. තවද $b|x - 5| < |x - a|$ අසමානතාවයට ගැළපෙන තාත්වික අගය කුලකය $\{x: 4 < x < 7\}$ නම් ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් a හා b හි අගයන් ලබා ගන්න. එනයින් $|x - 1| + k = 3|x - 5|$ සමීකරණයට එක් විසඳුමක් පැවතීම සඳහා k හි අගය නිර්ණය කරන්න.
- b) i) a යනු ධන තාත්වික සංඛ්‍යාවක් නම්, $\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$ බව පෙන්වන්න.
 x හා y ධන තාත්වික සංඛ්‍යා ද $x \neq y \neq 1$ ද වේ.
 $\log_x(\log_y P) + \log_{\frac{1}{x}}(\log_{\frac{1}{y}} Q) = 1$ නම්, $pq^x = 1$ බව පෙන්වන්න.
 ii) $\log_b(\sqrt{x^2 + 1} - x) + \log_b(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0$ බව සාධනය කරන්න.
 iii) $\frac{\log_3 8}{\log_9 16 \log_4 10} = 3 \log_{10} 2$ බව පෙන්වන්න.
- 14) a) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}{2 \cos x - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ බව ලබා ගන්න.
- b) ප්‍රමුලධර්ම මගින් $\sqrt{1 - 2x^2}$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.
- c) පහත ශ්‍රිත x විෂයෙන් අවකලනය කරන්න. (සුලු කිරීම් අවශ්‍ය නැත.)
 i. $y = \tan^{-1}\left(\frac{1 - \sin x}{1 + 2 \sin x}\right)$ ii. $y = e^{ax} \cos bx$ iii. $y = \ln \left| \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x} \right|$

d) $y = \sqrt{4 + \sin^2 x}$ නම්,

i. $y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sin 2x$ බව

ii. අනුයාත අවකල සැලකීමෙන් $y \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right) + 4y \frac{dy}{dx} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$\left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} \right\} x = 0$ දී අගයන්න.

15) a) $x \neq -2, 4$ විට, $f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$ සලකමු.

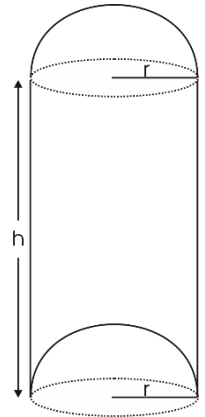
$f'(x) = \frac{-4x(8+x)}{(x+2)^2(x-4)^2}$ බව පෙන්වන්න.

එනයිත්, $y = f(x)$ හි ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය සොයා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් දළ ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

ප්‍රස්ථාරය ඇසුරින් $2x^2 - k(x+2)(x-4) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල නොපැවතීමට k ට ගත හැකි අගය පරාසය සොයන්න.

- b) සෘජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයක් තුනී ලෝහයකින් තැනිය යුතු අතර එහි පතුලට සමාන අරයන් ඇති කුහර අර්ධ ගෝලයක් සිලින්ඩරය තුළට යොමුවන ලෙසත් එවැනි කුහර අර්ධ ගෝලයක් රූපයේ පරිදි සිලින්ඩරයේ ඉහළ පෘෂ්ඨයටත් පාස්සා ඇත.

සංයුක්ත වස්තුවේ පරිමාව $4000\pi \text{ cm}^3$ වන පරිදින් අවම ලෝහ ප්‍රමාණයකින් තැනීමටත් අවශ්‍ය වේ නම් සිලින්ඩරයේ උස හා අරය ලබා ගන්න. අවශ්‍ය තහඩු ප්‍රමාණයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.



16) a) p හා q සුළු කෝණ විට,

$\frac{\sin p}{1 - \cos p} = \cot q$ නම්, $p = 2q$ බව පෙන්වා ඒනයිත්,

$\tan 7\frac{1}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$ බව පෙන්වන්න.

b) $\sin \theta \neq 0$ නම් $\frac{\sin 4\theta - \sin 3\theta}{\sin \theta} = 8 \cos^3 \theta - 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 3$ බව සාධනය කරන්න.

c) $f(x) = 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x$ ලෙස ගනිමු.

i. $f(x) = a \sin(\alpha - 2x) + b$ ලෙසට a හා b නිර්ණය කරන්න.

ii. $f(x) = \sqrt{3} + 1$ සමීකරණය විසඳන්න.

iii. $g(x) = f(x) - \sqrt{3} + 5$ වන අයුරින් $g(x)$ හි දළ ප්‍රස්ථාරය $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ පරාසය තුළ අඳින්න.

17) a) සයින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න. ABC යනු BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වූ ත්‍රිකෝණයකි.

$B\hat{A}M = \alpha$, $C\hat{A}M = \beta$, $A\hat{M}C = \theta$, නම්,

i. $AM = BM (\sin \theta \cot \alpha - \cos \theta)$

ii. $2 \cot \theta = (\cot \alpha - \cot \beta)$ බව ද සාධනය කරන්න.

b) ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන් කෝසයින් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$b(\cos A + \cos C) = 2(a + c) \sin^2 \left(\frac{B}{2} \right)$ බව පෙන්වන්න.

c) $(\cos 4\theta + \cos \theta)^2 + (\sin 4\theta + \sin \theta)^2 = 2\sqrt{3} \sin 3\theta$ හි සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

Third Term Test - Grade 12 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය II

කාලය පැය තුනයි

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

(A කොටස)

- 1) A අංශුවක ආරම්භක පිහිටීම $2i - 5j$ වන අතර ආරම්භක ප්‍රවේගය $2i + 3j$ වේ. එහි ත්වරණය $i - 2j$ නම් t කාලයකට පසු එහි පිහිටුම් දෛශිකය හා ප්‍රවේග දෛශිකය සොයන්න. ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 2) O ලක්ෂ්‍යයෙන් තිරසර $\tan^{-1}(2)$ ක් ආනතව $40\sqrt{5} \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ප්‍රක්ෂේපණය කළ වස්තුවක්,
- I. නගින උපරිම උස
- II. චලිත දිශාව තිරසර 45° ආනත වීම ප්‍රක්ෂේපණය පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයට O සිට සිරස් උස සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 5) පැත්තක දිග $2a$ හා බර w වන ඒකාකාර සමචතුරස්‍ර ආස්තරයක් $ABCD$ වේ. AD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඇඳි අවිභන්‍ය තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර බිත්තියේ A ට සිරස්ව ඉහළින් බිත්තියේ වූ O ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත. A සුමට බිත්තිය ස්පර්ශව AC තිරස්ව බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයේ $ABCD$ වන සේ සමතුලිතව ඇත. තන්තුවේ දිග am බව පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතිය T නම් $T = \frac{w}{\sqrt{2}}$ බව ද, A හි ප්‍රතික්‍රියාව R නම් $R = w$ බව ද පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 6) $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ යන දෛශික එකිනෙකට 120° ක් ආනත සහ $|\underline{a} + \underline{b}| = a$ නම් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ දෛශික සමාන විශාලත්වයෙන් යුත් බව පෙන්වන්න. b යනු නිශුන්‍ය දෛශිකයකි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9) දුම්‍රියක් තිරසර α මාර්ගයක පහළට $u \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් චලිත වේ. වැසි බිංදු සිරස් රේඛාව ඔස්සේ $v \text{ ms}^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් සිරස්ව පහළට වැටේ.

i. දුම්‍රියට සාපේක්ෂව වැහි බිංදුවක ප්‍රවේගය සොයා දුම්‍රියට සාපේක්ෂව වැහි බිත්දුවේ දිශාව සොයන්න.
 $(v > u \sin \alpha)$

ii. $u = v \sin \alpha$ නම් වැහි බිංදුව දුම්‍රියට ලම්භව වදින බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10) සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේප කළ වස්තුවක් 8 වන තත්පරයේ දී $75m$ විස්ථාපනය වේ. වස්තුවේ ආරම්භක ප්‍රවේගය සොයන්න. $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ බව දී ඇත. වස්තුවේ උපරිම උස ද ලබා ගන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 12 - II (B කොටස)

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

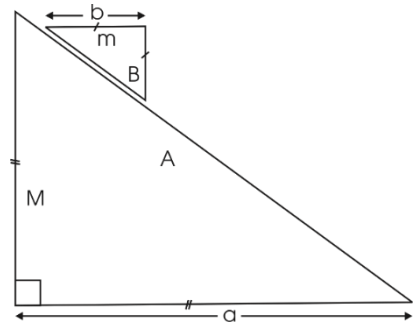
- 11) ඒකාකාර BAC අර්ධ වෘත්තාකාර සුමට කම්බියක කේන්ද්‍රය O හා අරය a වේ. B, C ලක්ෂ්‍ය තිරස්ව BAC කලය සිරස්ව අවලව් සවිකර ඇත. O හා A සුමට කම්බියකින් යා කර ඇත. සුමට W හා w බර P, Q මුදු දෙකක් පිළිවෙලින් අර්ධ වෘත්ත කම්බියේ හා OA මත වලින වීමට නිදහස් ය. මුදු දෙක l අවිනතය තත්ත්වයෙන් ඇඳා ඇත ($l < a$). P ට පහළින් Q ඇත. PQ සිරසට α ආනත වේ. OP සිරසට θ ආනත වේ.
 $(w + W) \tan \theta = w \tan \alpha$ බව පෙන්වන්න. $W = 4w$ හා $a = 3l$ විට $T = \sqrt{3}w$ බව ද පෙන්වන්න.
- 12) a) O මූලයක් අනුබද්දයෙන් P හා Q ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික $\underline{p}$ හා $\underline{q}$ වේ. R යනු PQ මත $PR:RQ = \mu : \lambda$ බෙදෙන ලක්ෂ්‍ය වේ. R හි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{r}$ නම් $\underline{r} = \lambda \underline{p} + \mu \underline{q}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි $\lambda + \mu = 1$ වේ.
 A, B, C, D නම් ඒකතල ලක්ෂ්‍ය 4ක් පිහිටුම් දෛශික $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ වන අතර එම දෛශික $\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \gamma \underline{c}$ සපුරාලයි. මෙහි $\lambda + \mu + \gamma = 1$ වේ. AB හා DC , E හිදී ඡේදනය වේ. E හි පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{e} = \frac{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}}{\lambda + \mu}$ බව පෙන්වන්න.
- b) $(2,1), (0,0), (-3,4)$ ලක්ෂ්‍ය වටා ඒකතල බල පද්ධතියක සූර්ණ පිළිවෙලින්, ඒකක 11, 5 සහ -15 වෙයි. සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න දී ඇති පද්ධතිය $(3,2)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරන බලයක් සමඟ එකතු වී යුග්මයක් සාදයි නම් එම බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $2x - y - 4 = 0$ බව පෙන්වන්න. යුග්මයේ සූර්ණය ද සොයන්න.
- 13) a) රේඛීය පෙනක චලනය වන a ඒකාකාර ත්වරණයක් සහිතව u ආරම්භක ප්‍රවේගයෙන් චලිතය අරඹන අංශුවක් t කාලයක් ගතවීමෙන් පසු s විස්තාපනයක් දක්වන අතර v ප්‍රවේගයක් අත්කර ගනියි. අංශුවේ ප්‍රවේග කාල වක්‍රය ඇඳ අංශුවේ විස්තාපනය $S = \frac{1}{2}(u + v)t$ බව පෙන්වන්න.
- b) X, Y මෝටර් රථ 2 ක් සරල රේඛීය මාර්ග දිගේ එකම අතට චලනය වේ. X රථය $2ms^{-2}$ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් චලනය වන අතර $t = 0$ දී A ලක්ෂ්‍යයක් $6ms^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් පසු කරයි. Y රථයක් $\frac{3}{2}ms^{-2}$ ඒකාකාර ත්වරණයෙන් චලිත වන අතර $t = 2$ මොහොතේ $15ms^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් A පසු කරයි. රථ දෙකේ චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාර එකම සටහනක ඇඳ එනසින්,
i) $t = 6s$ වූ විට B ලක්ෂ්‍යයේ දී Y විසින් X පසුකරන බව ද,
ii) $t = 18s$ විට X විසින් C ලක්ෂ්‍යයේ දී Y පසු කරන බව ද,
iii) $BC = 360m$ බව ද,
ii) B හා C ලක්ෂ්‍යය අතරදී X හා Y රථ අතර උපරිම දුර $9m$ බව ද පෙන්වන්න.
- 14) ටෙනිස් ක්‍රීඩකයෙකු උස h වන දැලකට උඩින් තවත් ටෙනිස් ක්‍රීඩකයෙකුට බෝලයක් යවයි. පොළොව මට්ටමට ආසන්නව දැල් සිට d දුරින් වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසර α කෝණයකින් ආනතව v ප්‍රවේගයෙන් බෝලය ප්‍රක්ෂේපණය කරයි.
 $\tan^2 \alpha - \frac{2v^2}{gd^2} \tan \alpha + 1 + \frac{2v^2h}{gd^2} < 0$ බව පෙන්වන්න. ඒනසින් එක්තරා u අවම අගයකට වඩා v වැඩි වෙතොත් α යන්න α_1 හා α_2 ($> \alpha_1$) අගයක් අතර පැවතිය යුතු බව අපෝහනය කරන්න. α_1, α_2 සහ u සෙවිය යුතුය.

- 15) a) රේඛීය AB හා CD මාර්ග දෙකක් O හිදී ඡේදනය $A\hat{O}C = \theta$ වේ. AO හා CO ඔස්සේ O දෙසට ළඟා වන කන්ටේනරයක් හා කාරයක් පිළිවෙලින් u_1 හා $u_2 \text{ kmh}^{-1}$ ප්‍රවේග වලින් ගමන් කරයි. කන්ටේනර් රථයට සාපේක්ෂව කාරයේ ප්‍රවේගයේ විශාලත්වය හා දිශාව නිර්ණය කරන්න. O සිට කාරයට දුර s_2 වන විට O සිට කන්ටේනර් රථයේ ඉදිරිපසට දුර s_1 වේ. කන්ටේනර් රථයේ දිග l වේ.
- $\frac{s_2}{u_2} < \frac{s_1}{u_1}$ හෝ $\frac{s_2}{u_2} > \frac{s_1 + l}{u_1}$ වේ නම් කාරය කන්ටේනර් රථයේ නොගැටෙන බව අපෝහනය කරන්න.

- b) තිරසර α ආනත රළු අවල ආනත තලය මුදුනේ A සුමට අවල කප්පියක් සවිකර ඇත. ස්කන්ධය M වන අංශුව රළු තලය මත තබා A ට ඇඳූ අවිනතය තත්ත්වය A සුමට කප්පිය මතින් යවා ස්කන්ධය m අංශුව සවිකර m අංශුව සිරස්ව පහළට එල්ලී සිටින සේ තබා පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙන් මුදා හැර ඇත. M හා තලය අතර සර්ෂණ සංගුණකය μ වේ. M අංශුව පහළට වලින වීමට අවශ්‍යතාව, $M(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) > m$ බව පෙන්වන්න.
- පොළොවේ සිට A ට උස $2m$ නම් m අංශුව පොළොවේ සිට A ට පැමිණෙන ප්‍රවේගය සොයන්න.

- 16) a) A යුධ නැවක් හා B කන්ටේනර් ප්‍රවාහන නෞකාවක ප්‍රවේග $\underline{v}$ ද විස්තාපනය r වලින් ද දක්වමු. මධ්‍යහනයේ දී විස්තාපන හා ප්‍රවේග පහත දැක්වේ.
- $$\begin{aligned} r_A &= (13i + 5j) \text{ km} & V_A &= (3i - 10j) \text{ kmh}^{-1} \\ r_B &= (3i - 5j) \text{ km} & V_B &= (15i + 14j) \text{ kmh}^{-1} \end{aligned}$$
- යුධ නැවට සාපේක්ෂව කන්ටේනර් නෞකාවේ පෙන සොයා ඒවා අතර කෙටිම දුර ලබා ගන්න. යුධ නැවේ ප්‍රහාරක පරාසය 5 km නම් කන්ටේනර් නෞකාව අනතුරේ පවතින කාලය සොයන්න.

- b) රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය M වූ A නම් සමද්විපාද සාප්‍රකෝණ සුමට කුඤ්ඤයක ආනත මුහුණත මත ස්කන්ධය m වූ වෙනත් B නම් සමද්විපාද සාප්‍රකෝණී කුඤ්ඤයක් තබා ඇත. පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ තබා සිරුවෙන් මුදා හැරිය විට B කුඤ්ඤය A පාමුලට පැමිණෙන විට A තිරස් තලය දිගේ ගමන් කර ඇති දුර $\frac{m(a-b)}{M+m}$ බව පෙන්වන්න.



- 17) a) AB ඒකාකාර දණ්ඩක A කෙළවරට සැහැල්ලු රළු මුද්දක් සවිකර ඇත. A මුද්ද තිරස් රළු කම්බියක වලින වීමට නිදහස් වේ. දන්ඩේ $2a$ දිග හා බර w වේ. B සිට ඇඳූ අවිනතය තත්ත්වය අනෙක් කෙළවර තිරස් කම්බියේ C ට සවි කර ඇත. $BC = 2a$ වේ. දන්ඩේ A සිට Ka දුරින් $\frac{w}{2}$ බර අංශුවක් සවිකර ඇත. $0 \leq K \leq 2$ පහළ සිරසට θ ආනතව AB දණ්ඩ සමතුලිතව ඇත. W, θ, K ඇසුරෙන්,
- i) තත්ත්වේ ආතතිය සොයන්න.

ii) A හි සර්ෂණ බලය F ද, අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම් $\frac{F}{R} = \frac{(2+K) \tan \theta}{4-K}$ බව පෙන්වන්න.

iii) $\theta = 45^\circ$ විට සර්ෂණ සංගුණකය $\frac{2}{3}$ නම් සමතුලිත විට $0 < K < \frac{2}{5}$ බව පෙන්වන්න.

- b) AB ඉනිමඟක A කෙළවර රළු තිරස් ගෙබිමක් මත තිබෙමින් ද, B කෙළවර රළු තිරස් බිත්තියකට හේත්තු වෙමින් ද, නිසලව තිබේ. ඉනිමගේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G නම් $AG:GB = a:b$ වේ. ගෙබිමෙහි හා බිත්තියෙහි සර්ෂණ සංගුණක පිළිවෙලින් μ හා μ' නම් ඉනිමඟ සීමාකාරී සද්මතුලිතතාවයේ ඇති විට ගෙබිමට ඉනිමගේ ආතතිය $\tan^{-1} \left(\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)} \right)$ බව පෙන්වන්න.

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part A - Grade 12

Part A.

1). Let

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 4x - 2x^2 \\ &= -2 \left(x^2 - 2x - \frac{3}{2} \right) \textcircled{5} \\ &= -2 \left\{ (x-1)^2 - \frac{5}{2} \right\} \textcircled{5} \\ &= -2(x-1)^2 + 5 \textcircled{5} \end{aligned}$$

When, $f(x)_{\max} \therefore x = 1 \textcircled{5}$

$\underline{\underline{f(x)_{\max} = 5}} \textcircled{5}$

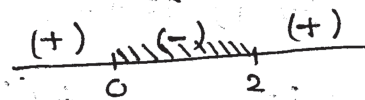
25

2). $\frac{3}{x} \leq \frac{x+1}{x-2}$

$\frac{3}{x} - \frac{x+1}{x-2} \leq 0 \textcircled{5}$

$\frac{3(x-2) - x^2 - x}{x(x-2)} \leq 0 \textcircled{5}$

$\frac{-x^2 + 2x - 6}{x(x-2)} \leq 0 \textcircled{5}$



but, $\textcircled{5} -x^2 + 2x - 6 > 0$ for $\forall x \in \mathbb{R}$

Therefore, Solⁿ is $\underline{\underline{x \in (0, 2)}} \textcircled{5}$

25

$$3) f(x) = x^4 - bx^3 - 11x^2 + 12x + a = \left[(x+2)(x+\lambda) \right]^2$$

$$\textcircled{5} = (x^2 + 4x + 4)(x^2 + 2\lambda x + \lambda^2)$$

$$x^3 \rightarrow -b = 2\lambda + 4 \quad \text{--- (1)}$$

$$x^2 \rightarrow -11 = \lambda^2 + 8\lambda + 4 \quad \text{--- (2) } \textcircled{10}$$

$$x^1 \rightarrow 12 = 4\lambda^2 + 8\lambda \rightarrow 3 = \lambda^2 + 2\lambda \quad \text{--- (3)}$$

$$x^0 \rightarrow a = 4\lambda^2 \quad \text{--- (4)}$$

From (3) ;

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -3, \lambda = 1$$

but, $\lambda = 1$ is not satisfy the eqⁿ (2).

Then

$$\underline{\underline{\lambda = -3}}$$

$$\underline{\underline{a = 36}} \textcircled{5}$$

$$\underline{\underline{b = 2}} \textcircled{5}$$



$$4) \frac{3x+5}{(3x-1)(3x+2)} = \frac{A}{(3x-1)} + \frac{B}{(3x+2)} \textcircled{5}$$

$$3x+5 = A(3x+2) + B(3x-1)$$

$$x^1 \rightarrow \textcircled{5} 3 = 3A + 3B \rightarrow A+B=1 \quad \text{--- (1)}$$

$$x^0 \rightarrow 5 = 2A - B \quad \text{--- (2) } \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \underline{\underline{A = 2}}, \underline{\underline{B = -1}} \textcircled{5}$$



$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \cos 2x - 2 \cos x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \cos^2 x - 2 \cos x}{x^2} \right) \textcircled{5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (\cos x - 1)}{x^2} \textcircled{5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \cdot 2 \sin^2 x/2}{\frac{x^2}{4} \times 4} \textcircled{5}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x/2}{x^2/4} \textcircled{5}$$

$$= (-1) \times (1)^2 \textcircled{5}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

25

$$6) \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$$

$$\frac{2x}{8} + \frac{2y}{18} \frac{dy}{dx} = 0 \textcircled{5}$$

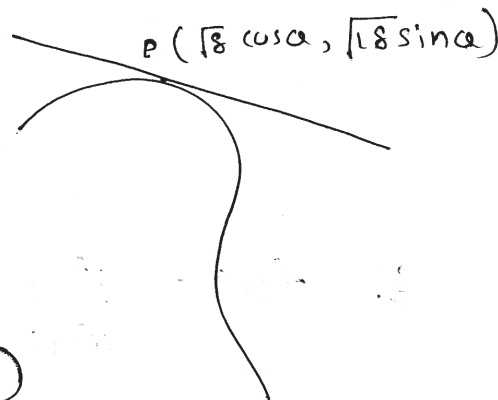
when $\alpha = \pi/4$,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{9} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$P_0 = (2, 3) \textcircled{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{9x}{4y} \textcircled{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9 \times 2}{4 \times 3} = -\frac{3}{2} \textcircled{5}$$



Therefore, tangent line is,

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-3}{2}$$

$$\underline{\underline{2y + 3x = 12}} \quad (5)$$

25

7). $x+y = \sin(x+y)$

$$1 + \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \quad (5)$$

$$\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) \left(1 - \cos(x+y)\right) = 0 \quad (5)$$

but, $1 - \cos(x+y) \neq 0$, ($\because x+y \neq 0$) (5)

$$\therefore 1 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \quad (5)$$

25

8). $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$$= \frac{x^2+1-2}{x^2+1} \quad (10)$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} \quad (5)$$

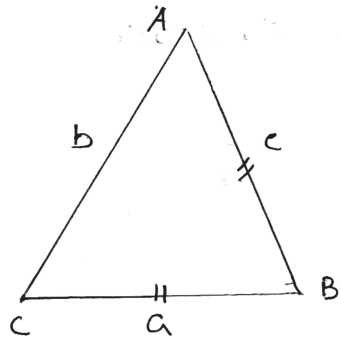
$$= 1 - \frac{2}{x^2+1} \quad (5)$$

$$\therefore f(x)_{\min} = -1$$

(5)

25

9)



When,

$$AB = BC$$

$$a = c \quad (5)$$

$$\sqrt{3}(a+c) = 2b$$

$$\sqrt{3} \times 2a = 2b$$

$$b = \sqrt{3}a \quad (5)$$

Applying Sine Rule for $\triangle ABC$,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{\sqrt{3}a} = \frac{\sin C}{a}$$

$$\sqrt{3} \sin A = \sin B = \sqrt{3} \sin C$$

$$\sin A = \sin C$$

$$\hat{A} = \hat{C}$$

$$\sqrt{3} \sin A = \sin(\pi - 2A)$$

$$= \sin 2A$$

$$\sqrt{3} \sin A = 2 \sin A \cos A \quad (5)$$

$$\sin A \neq 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos A$$

$$\hat{A} = \pi/6 \quad (5)$$

$$\hat{B} = 2\pi/3$$

$$\hat{C} = \pi/6$$



$$10). \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} = 1 - \sin x \cos x$$

L.H.S $\Rightarrow$

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \tan x}{1 + \tan x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x} \quad (5)$$

$$= \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos x (1 + \tan x)} \quad (5)$$

$$= \frac{(\cancel{\sin x} + \cancel{\cos x}) (\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) \times \cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x} (\cancel{\sin x} + \cancel{\cos x})} \quad (10)$$

$$= \underline{\underline{1 - \sin x \cos x}} \quad (5)$$

25

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part B - Grade 12

11) Let $f(x) = (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)$

$$f(x) = 3x^2 - 2x(a+b+c) + ab+bc+ac \quad (5)$$

For real distinct roots to $f(x) = 0$, show that,

$$\Delta_x > 0 \quad (5)$$

$$\Delta_x = 4(a+b+c)^2 - 4 \times 3(ab+bc+ac) \quad (10)$$

$$= 4 \{ (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) \}$$

$$= 4 \{ a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ac \} \quad (5)$$

$$= 2 \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} ; a \neq b \neq c \quad (10)$$

$$\therefore \Delta_x > 0 \quad (5)$$

$f(x)$ have two real distinct roots.

If the roots are p and q ,

$$p+q = \frac{2(a+b+c)}{3} \quad (5)$$

$$pq = \frac{ab+bc+ac}{3} \quad (5)$$

50

i) When, p, b, q are in arithmetic series,

$$p+q = 2b \quad (5)$$

$$\frac{2(a+b+c)}{3} = 2b$$

$$a+b+c = 3b \quad (5)$$

$$a+c = 2b$$

Therefore $(5) \underline{c, b, a}$ are in arithmetic series.

Then;

$$f(a) = (a-b)(a-c) \quad (1) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(c) &= (c-a)(c-b) \\ &= (a-c)(b-c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{but; } a+c &= 2b \quad (5) \\ (a-b) &= (b-c) \end{aligned}$$

$$\therefore f(c) = (a-c)(a-b) \quad (2) \quad (5)$$

Now, Consider,

$$\begin{aligned} -2f(b) &= -2(b-c)(b-a) \\ &= 2(b-c)(a-b) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{but, } 2b-2c = a+c-2c = (a-c) \quad (5)$$

$$\therefore -2f(b) = (a-c)(a-b) \quad (3)$$

Finally, From (1), (2) and (3).

$$(5) \underline{f(a) = -2f(b) = f(c)}$$

50

(ii) When c, b, a are in Geometric Series,

$$c, b, a$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$

$$b^2 = ac \quad (5)$$

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{b} > \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{b} \quad (5)$$

We show that;

$$\frac{p+q}{pq} = \frac{2}{b} \quad (5)$$

considering,

$$\frac{p+q}{pq} = \frac{2(a+b+c) \times 3}{3(ab+bc+ac)} \quad (10)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{(ab+bc+ac)} \quad (5)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{(ab+bc+ac)} \quad (\because b^2 = ac)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{(ab+bc+b^2)} \quad (5)$$

$$= \frac{2(a+b+c)}{b(a+b+c)} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{b} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{b} \quad (5)$$

50

Therefore, $\frac{1}{p}, \frac{1}{b}, \frac{1}{q}$ are in arithmetic series. 5

$$12) f(x) = (x^2+5)(ax+b) \quad (5)$$

$$f(1) = -b$$

$$f(-2) = 45$$

$$\text{Then,} \\ -b = 6(a+b) \quad (5)$$

$$a+b = -1 \quad (1)$$

$$45 = 9(b-2a)$$

$$5 = b-2a \quad (2) \quad (5)$$

From (1) and (2)

We have,

$$\underline{\underline{a = -2}} \\ \underline{\underline{b = 1}}$$

$$\text{Therefore, } f(x) = (x^2+5)(-2x+1) \quad (5) \quad [20]$$

$$\underline{\underline{f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 10x + 5}}$$

$$ax^3+bx+c \equiv (x^2+px+1)(ax+c) \quad (5)$$

Equating coefficients,

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \rightarrow 0 = c + ap \\ x \rightarrow b = pc + a \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = a + c\left(-\frac{c}{a}\right) \quad (5) \\ b = a - \frac{c^2}{a} \end{array}$$

$$\underline{\underline{ab = a^2 - c^2}} \quad (5)$$

Similarly,

$$cx^3 + bx^2 + a = (x^2 + px + 1)(cx + a) \quad (5)$$

Equating Coefficients,

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \rightarrow b = a + pc \\ x^1 \rightarrow 0 = pa + c \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = a + c \left(-\frac{c}{a} \right) \\ b = a - \frac{c^2}{a} \end{array} \quad (5)$$

$$(5) \underline{\underline{ab = a^2 - c^2}} \quad [40]$$

$$b)_{ii} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$\begin{aligned} D_f &= (\text{Domain of } f) \\ &= [0, 1) \quad (5) \quad 0 \leq x < 1 \end{aligned}$$

$$(ii). f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

considering,

$$(5) (1-x)^2 \geq 0$$

$$1 - 2x + x^2 \geq 0$$

$$1 + x^2 \geq 2x$$

$$(5) 1 \geq \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\therefore \underline{\underline{R_f = [-1, 1]}} \quad (5)$$

$$[20]$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \frac{3x+2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

$$f \circ g(x) = f\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$$

$$= \frac{3\left(\frac{x+2}{x-3}\right) + 2}{\frac{x+2}{x-3} - 1} \quad (5)$$

$$= \frac{3x+6+2x-6}{x+2-x+3}$$

$$= \frac{5x}{5} = x \quad (5)$$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{3x+2}{x-1} + 2}{\frac{3x+2}{x-1} - 3} \quad (5)$$

$$= \frac{3x+2+2x-2}{3x+2-3x+3}$$

$$= \frac{5x}{5} = x \quad (5)$$

$$= \frac{5x}{5} = x \quad (5)$$

Then;

$$\underline{\underline{f \circ g(x) = g \circ f(x) = x}}$$

30

$$(iv). f(x) = \frac{1-2x}{1+x}; \quad x \neq -1$$

$$\text{any } x_1, x_2 \in X$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{1-2x_1}{1+x_1} = \frac{1-2x_2}{1+x_2} \quad (5)$$

$$(1-2x_1)(1+x_2) = (1+x_1)(1-2x_2)$$

$$1+x_2-2x_1-2x_1x_2 = 1-2x_2+x_1-2x_1x_2$$

$$-3x_2 = 3x_1$$

$$(5) \quad \underline{\underline{x_1 = x_2}}$$

Therefore, $f(x)$ is one-one function. (5)

$$\text{any } y \in C_f,$$

$$f(x) = y = \frac{1-2x}{1+x}$$

$$y(1+x) = 1-2x \quad (5)$$

$$x(y+2) = 1-y$$

$$x = \frac{1-y}{y+2} \in \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$(5)$$

$\therefore f(x)$ is onto-function.

$$\underline{\underline{f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x+2}}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)}} \quad (5)$$

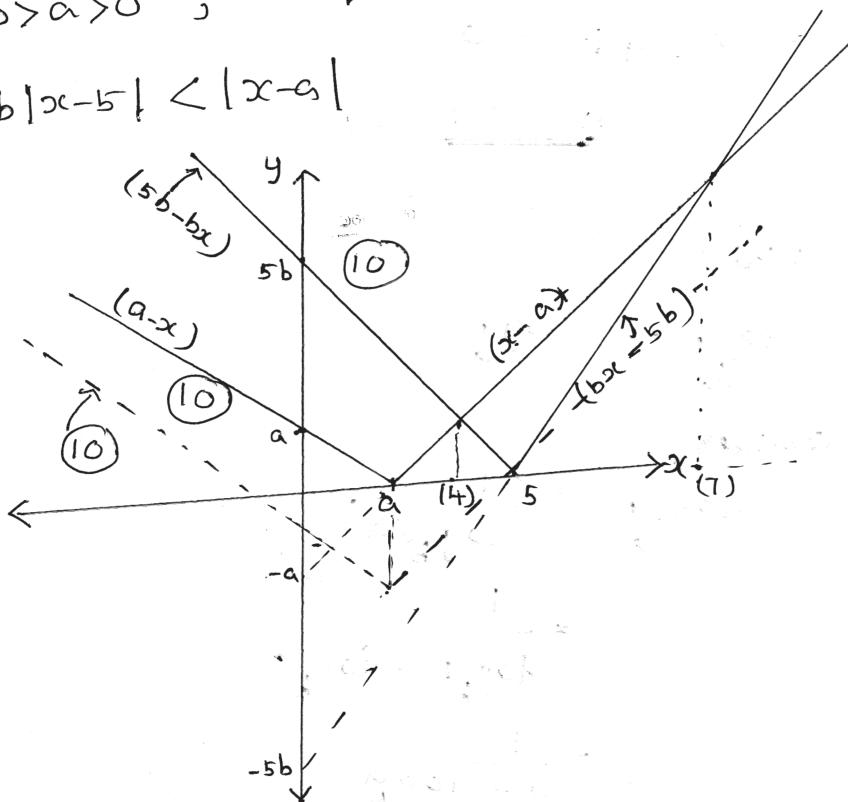
$$\underline{\underline{R_f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)}} \quad (5)$$

[40]

13) $y = |x-a|$, $y = b|x-5|$

$b > a > 0$; $b \neq 1$

$b|x-5| < |x-a|$



$x-a = 5b-bx$

When $x = 4$, (5)

$4-a = 5b-4b$

$a+b = 4$ — (1)

$x-a = bx-5b$

When, $x = 7$, (5)

$7-a = 7b-5b$
 $= 2b$

$a+2b = 7$ — (2)

From (1) and (2)

$b = 3$ (5)

$a = 1$ (5)

For exists only one solution for the eqⁿ

$$|x-1| + k = 3|x-5| \quad ; \quad x = 5 \quad (5)$$

$$5-1 + k = 0$$

$$\underline{k = -4} \quad (5)$$

60

b). $a > 0$;

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

consider,

$$\log_{\frac{1}{a}} b = \frac{1}{\log_b (\frac{1}{a})} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\log_b 1 - \log_b a} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{0 - \log_b a}$$

$$= \underline{-\log_a b} \quad (5)$$

15

$x, y > 0, \quad x \neq y \neq 1$,

$$\log_x (\log_y p) + \log_{\frac{1}{x}} (\log_{\frac{1}{y}} q) = 1$$

$$\log_x (\log_y p) + \log_{\frac{1}{x}} (-\log_y q) = 1 \quad (5)$$

$$\log_x (\log_y p) + \log_{\frac{1}{x}} (\log_y (\frac{1}{q})) = 1 \quad (5)$$

$$\log_x (\log_y p) + (-\log_x [\log_y (\frac{1}{q})]) = 1$$

$$\log_x \left[\frac{\log_y p}{\log_y (\frac{1}{q})} \right] = 1 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{\log_y p}{\log_y \frac{1}{q}} = x$$

$$\log_y (p) = \log_y \left(\frac{1}{q}\right)^x \quad (5)$$

$$\therefore p = \frac{1}{q^x}$$

$$\underline{pq^x = 1} \quad (5)$$

40

$$(ii). \log_b (\sqrt{x^2+1}-x) + \log_b \sqrt{x^2+1} + x$$

$$= \log_b (\sqrt{x^2+1}-x) (\sqrt{x^2+1}+x) \quad (5)$$

$$= \log_b (x^2+1-x^2)$$

$$= \log_b 1 \quad (5)$$

15

$$= \underline{0} \quad (5)$$

$$(iii). \frac{\log_3 8}{\log_{\frac{16}{9}} \log_{\frac{10}{4}}}$$

$$= \frac{\log_{10} 8 \times \log_{10} 9 \times \log_{10} 4}{\log_{10} 3 \times \log_{10} 16 \times \log_{10} 4} \quad (5)$$

$$= \frac{3 \cancel{\log_{10} 2} \times 2 \cancel{\log_{10} 3} \times \log_{10} 4}{\cancel{\log_{10} 3} \times 4 \cancel{\log_{10} 2}} \quad (5)$$

17

$$= \frac{3}{2} \log_{10} 4$$

$$= \frac{3}{2} \times 2 \log_{10} 2$$

$$= \underline{\underline{3 \log_{10} 2}} \quad (5)$$

20

14) (a)

$$\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(\pi/3 - x)}{2 \cos x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2 \sin(\pi/6 - x/2) \cos(\pi/6 - x/2)}{2 - (\cos x - \cos \pi/3)} \quad (5)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\cancel{2} \sin(\pi/6 - x/2) \cos(\pi/6 - x/2)}{2 \times \cancel{2} \sin(x/2 + \pi/6) \cancel{\sin(\pi/6 - x/2)}} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\cos 0}{\sin \pi/3} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 \quad (5) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

30

b). Let $y = \sqrt{1-2x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \textcircled{5} \left\{ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2(x+\Delta x)^2} - \sqrt{1-2x^2}}{\Delta x} \textcircled{5}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1-2(x+\Delta x)^2 - 1+2x^2}{\Delta x \left\{ \sqrt{1-2(x+\Delta x)^2} + \sqrt{1-2x^2} \right\}} \textcircled{5}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x^2 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta x^2)}{\Delta x \left\{ \sqrt{1-2(x+\Delta x)^2} + \sqrt{1-2x^2} \right\}} \textcircled{5}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2(2x - \Delta x)}{\left\{ \sqrt{1-2(x+\Delta x)^2} + \sqrt{1-2x^2} \right\}} \textcircled{5}$$

$$= \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}} \textcircled{5}$$

30

c) (i) $y = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \sin x}{1 + 2 \sin x} \right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \sin x}{1 + 2 \sin x} \right)^2} \times \left\{ \frac{(1 + 2 \sin x)(-\cos x) - (1 - \sin x)2 \cos x}{(1 + 2 \sin x)^2} \right\} \quad (15)$$

(ii). $y = e^{ax} \cos bx$

$$\frac{dy}{dx} = -b e^{ax} \sin bx + a \cos bx e^{ax} \quad (10)$$

(iii) $y = \ln \left| \frac{a + b \cos x}{b + a \cos x} \right|$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{b + a \cos x}{a + b \cos x} \right) \times \left\{ \frac{(b + a \cos x)(-b \sin x) - (a + b \cos x)(-a \sin x)}{(b + a \cos x)^2} \right\} \quad (15) \quad [40]$$

d) $y = \sqrt{4 + \sin^2 x}$

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{4 + \sin^2 x}} \quad (10)$

$$\underline{\underline{y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \sin 2x}} \quad (05)$$

(ii).

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} \cos 2x \quad (10)$$

$$\underline{\underline{y \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right) + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} = -2 \sin 2x}} \quad (10)$$

$$\underline{y \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right) + 4y \frac{dy}{dx} = 0} \quad (5)$$

$$\{y\}_{x=0} = 2$$

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{x=0} = 0 \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{d^2 y}{dx^2} \right\}_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left\{ \frac{d^3 y}{dx^3} \right\}_{x=0} = 0 \quad (5)$$

50

$$(15) \quad x \neq -2, 4,$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x-4)}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-4)4x - 2x^2(x+2+x-4)}{(x+2)^2(x-4)^2} \quad (10)$$

$$= \frac{(x+2)(x-4)4x - 2x^2(2x-2)}{(x+2)^2(x-4)^2} \quad (5)$$

$$= \frac{4x(x^2 - 2x - 8 - x^2 + x)}{(x+2)^2(x-4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x(x+8)}{(x+2)^2(x-4)^2} \quad (5)$$

20

For turning points,

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Then, } x &= 0, & x &= -8 \\ y &= 0, & y &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

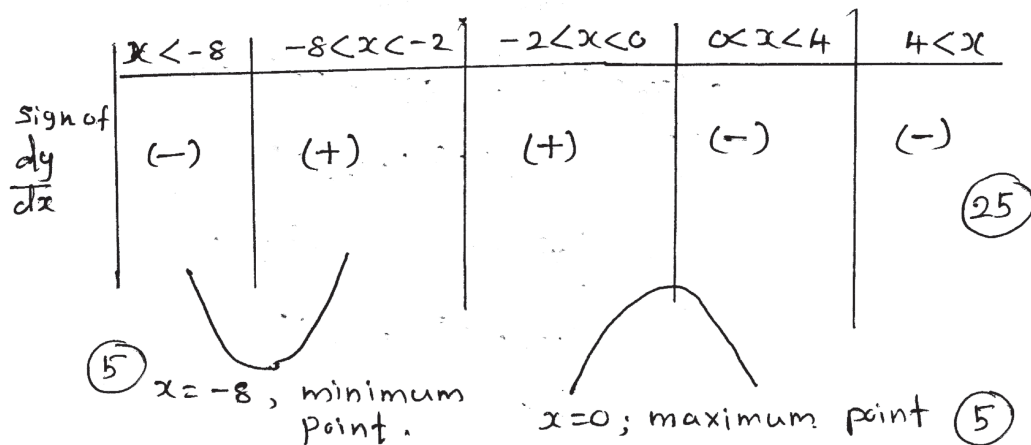
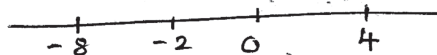
Vertically asymptotes are

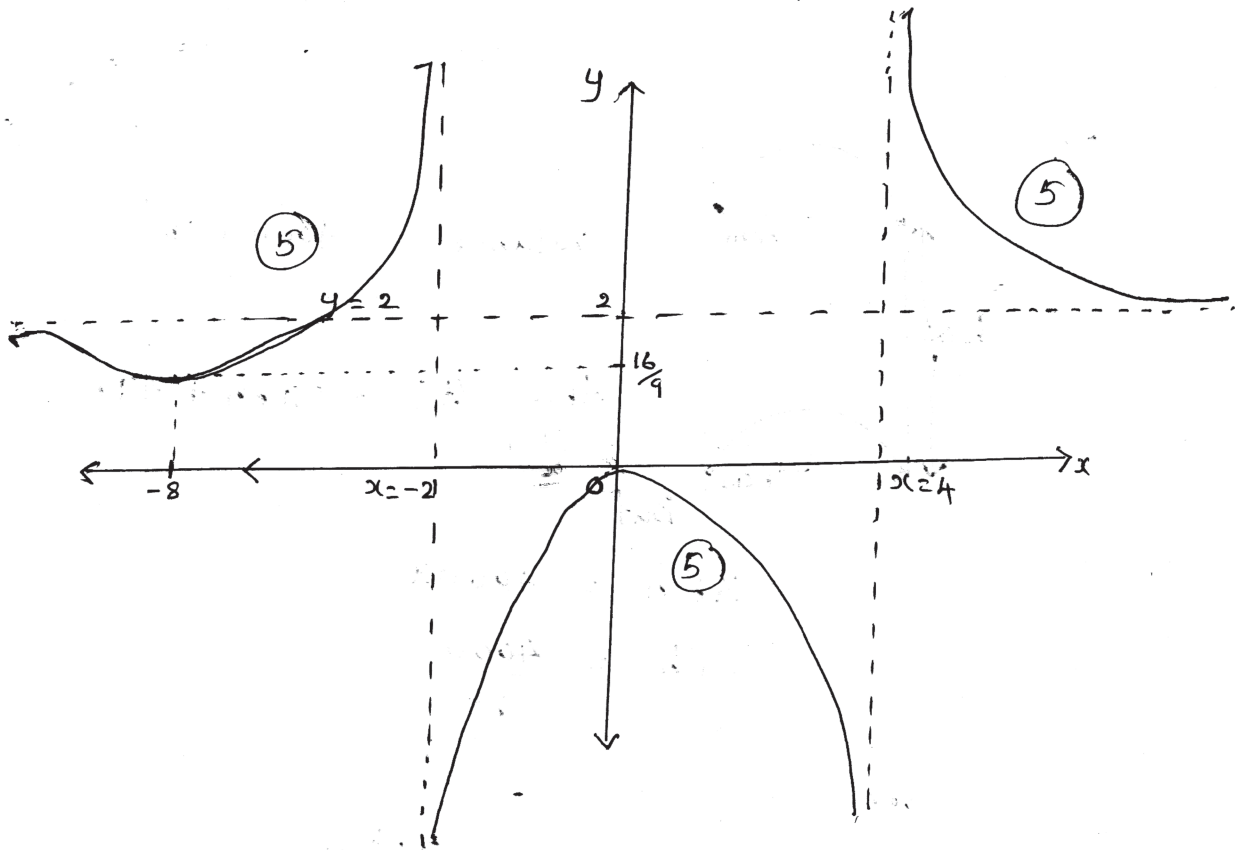
$$\underline{x = -2} \quad \text{and} \quad \underline{x = 4} \quad (5)$$

Horizontal asymptote

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^2}{(x+2)(x-4)} = 2$$

$$\therefore \underline{y = 2} \quad (5)$$





Considering the above graph,

$$2x^2 - k(x+2)(x-4) = 0$$

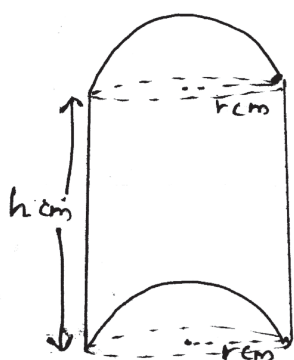
$$\textcircled{5} \frac{2x^2}{(x+2)(x-4)} = k$$

Range of the k , equation having not real roots,

$$\underline{\underline{0 < k < \frac{16}{9} \textcircled{5}}}$$

75

b)



$$\text{volume} = 4000\pi \text{ cm}^3$$

$$\text{Area (A)} = 2\pi rh + 4\pi r^2 \quad (5)$$

But,

$$\pi r^2 h = 4000\pi$$

$$(5) \quad h = \frac{4000}{r^2}$$

Therefore,

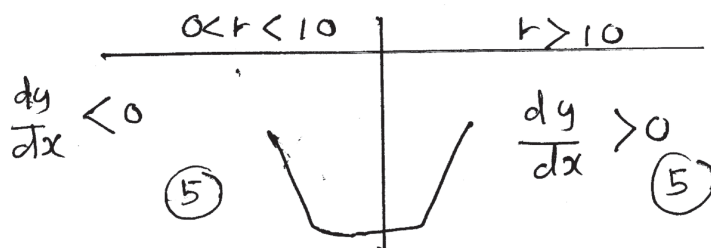
$$A(r) = 2\pi r \cdot \frac{4000}{r^2} + 4\pi r^2 \quad (5)$$

$$= \frac{2\pi \times 4000}{r} + 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = 8000\pi \left(-\frac{1}{r^2}\right) + 8\pi r \quad (10)$$

$$= \frac{8\pi}{r^2} (r^3 - 10^3)$$

For $\frac{dA}{dr} = 0$, $r = 10 \text{ cm}$



$\therefore r = 10 \text{ cm}$ is minimum point.
(5)

$\therefore$ radius of the cylinder,

$$\underline{r = 10 \text{ cm}} \quad (5)$$

Height of the cylinder,

$$h = \frac{4000}{10^2}$$

$$\underline{h = 40 \text{ cm}} \quad (5)$$

$A_{\text{(min)}}$ (minimum Area)

$$= 2\pi \times \frac{4000}{10} + 4\pi \times 10^2$$

$$= 800\pi + 400\pi$$

$$\underline{= 1200\pi \text{ cm}^2} \quad (5)$$

55

(16) (a). $\frac{\sin p}{1 - \cos p} = \cot q$

$$\frac{\sin p}{1 - \cos p} = \frac{\cos q}{\sin q}$$

$$\sin p \sin q = \cos q - \cos q \cos p \quad (5)$$

$$\cos q \cos p + \sin p \sin q = \cos q$$

$$(5) \cos(p - q) = \cos q$$

25

$$\Rightarrow p - q = q$$

$$\underline{p = 2q} \quad (5)$$

15

$$\therefore \frac{\sin 2q}{1 - \cos 2q} \quad (5) = \cot q$$

$$\tan q = \frac{1 - \cos 2q}{\sin 2q}$$

When,

$$q = 7\frac{1}{2}^\circ \quad (5)$$

$$\tan(7\frac{1}{2}^\circ) = \frac{1 - \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} \quad (5)$$

$$\text{but, } \cos 15^\circ = (\cos \pi/4 \cos \pi/6 + \sin \pi/4 \sin \pi/6) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\sin 15^\circ = \sin \pi/4 \cos \pi/6 - \cos \pi/4 \sin \pi/6$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\text{Then, } \tan(7\frac{1}{2}^\circ) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} \quad (5)$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}-3-\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\underline{\underline{\tan(\pi/2) = \sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2} \quad (5)}}$$

45

b). If $\sin \alpha \neq 0$,

$$= \frac{\sin 4\alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{2\cos 2\alpha \sin 2\alpha - (3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{2(2\cos^2 \alpha - 1)2\sin \alpha \cos \alpha - 3\sin \alpha + 4\sin^3 \alpha}{\sin \alpha}$$

$$= 4(2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 3 + 4(1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \underline{\underline{8\cos^3 \alpha - 4\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha + 3 \quad (5)}}$$

25

c). Let, $f(x) = 2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x$

$$(e), f(x) = \sqrt{3}(\cos 2x + 1) - \sin 2x$$

$$= \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3}$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \sqrt{3} \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{2\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + \sqrt{3}}}$$

$$\underline{\underline{a = 2}}, \quad (5) \quad \underline{\underline{b = \sqrt{3}}}$$

27

$$ii) f(x) = \sqrt{3} + 1$$

$$2\sin(\pi/3 - 2x) + \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1$$

$$(5) \sin(\pi/3 - 2x) = 1/2 = \sin \pi/6$$

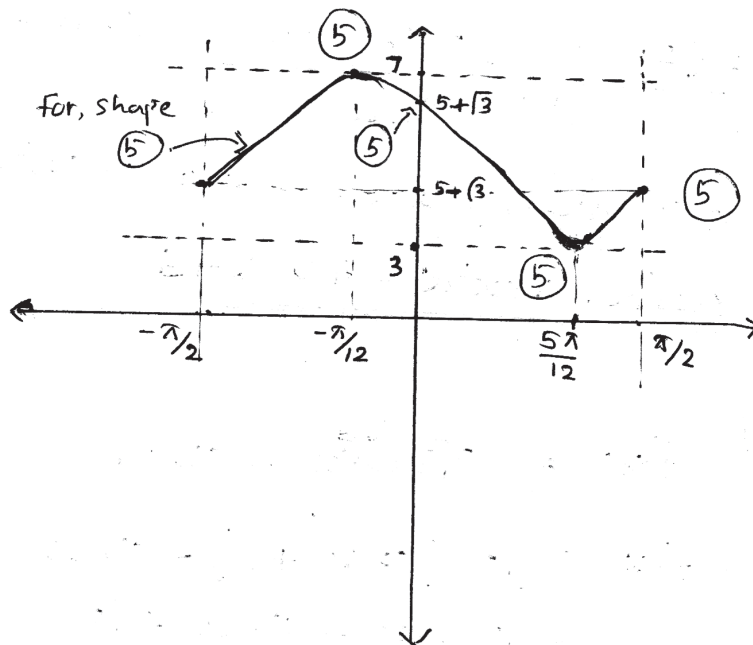
$$\underline{\underline{\pi/3 - 2x = n\pi + (-1)^n \pi/6}} \quad (5) \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(iii) g(x) = f(x) - \sqrt{3} + 5$$

$$(5) = 2\sin(\pi/3 - 2x) + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 5$$

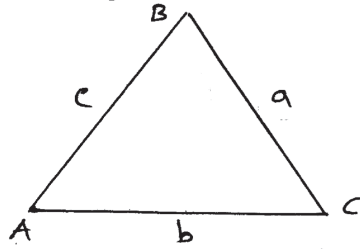
$$g(x) = 2\sin(\pi/3 - 2x) + 5$$

$$g(x) = 5 - 2\sin(2x - \pi/3) \quad (5)$$

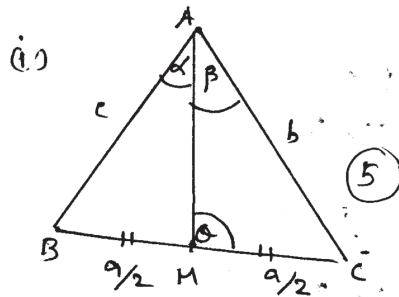


65

(17) In any triangle ABC, sine Formula,



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (5)$$



From $\triangle ABM$,

Sine Formula,

$$\frac{AM}{\sin B} = \frac{BM}{\sin \alpha} \quad (10)$$

$$\frac{AM}{\sin(\alpha - \alpha)} \quad (5) \quad \sin \alpha$$

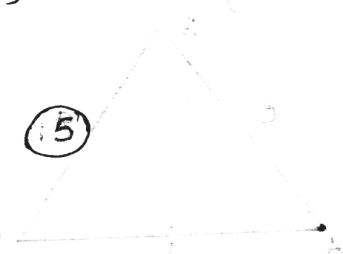
$$AM = \frac{BM \sin(\alpha - \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= BM \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} \right) \quad (5)$$

$$AM = \frac{BM (\sin \alpha \cot \alpha - \cos \alpha)}{\quad}$$

(5)

35

ii). From $\triangle AMC$, 

Sine Formula,

$$\frac{AM}{\sin C} = \frac{MC}{\sin \beta} \quad (5)$$

but, $\sin C = \sin(\beta + \alpha)$

$$MC = BM.$$

Hence, $\frac{AM}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{BM}{\sin \beta} \quad (5)$

$$\frac{AM}{BM} = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \beta} \quad (5)$$

From (i),

$$\frac{AM}{BM} = (\sin \alpha \cot \alpha - \cos \alpha) \quad (5)$$

Then,

$$\sin \alpha \cot \alpha - \cos \alpha = \frac{\sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \beta} \quad (5)$$

$$\sin \alpha \cot \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha + \cot \beta \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \cot \alpha =$$

$$\cot \alpha - \cot \alpha = \cot \alpha + \cot \beta$$

$$(5) \quad \underline{\underline{2 \cot \alpha = (\cot \alpha + \cot \beta)}}$$

30

$$(b). \quad b(\cos A + \cos C) = 2(a+c)\sin^2(B/2)$$

$$\frac{b}{a+c} = \frac{2\sin^2(B/2)}{\cos A + \cos C} \quad (5)$$

R.H.S.

$$\frac{2\sin^2(B/2)}{\cos A + \cos C}$$

$$= \frac{1 - \cos B}{\cos A + \cos C} \quad (5)$$

$$= 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad (5)$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{b(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{a(b^2 + c^2 - a^2) + c(a^2 + b^2 - c^2)} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{b^2(a+c) + ac(a+c) - (a+c)(a^2 - ac + c^2)} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 + ac - a^2 + ac - c^2 \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b \{ b^2 - (a-c)^2 \}}{(a+c) \{ b^2 - a^2 - c^2 + 2ac \}} \quad (5)$$

$$= \frac{b}{(a+c)} \quad (5)$$

50

$$(c). (\cos 4\alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin 4\alpha + \sin \alpha)^2 = 2\sqrt{3} \sin 3\alpha$$

$$2 + 2 \cos \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \sin 4\alpha = 2\sqrt{3} \sin 3\alpha$$

$$1 + \cos(3\alpha) = \sqrt{3} \sin 3\alpha$$

$$-\cos 3\alpha + \sqrt{3} \sin 3\alpha = 1$$

$$2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3\alpha - \frac{1}{2} \cos 3\alpha \right) = 1$$

$$2 \sin \left(3\alpha - \pi/6 \right) = 1$$

$$\sin(3\alpha - \pi/6) = 1/2 = \sin \pi/6$$

$$3\alpha - \pi/6 = n\pi + (-1)^n \pi/6, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} (n\pi + (-1)^n \pi/6 + \pi/6), \quad n \in \mathbb{Z}$$

35

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics II - Part A - Grade 12

Grade 12

$$\begin{aligned} 01) \quad \vec{s} &= ut + \frac{1}{2} at^2 \\ &= 2t + \frac{1}{2} t^2 = \frac{4t + t^2}{2} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow s &= ut + \frac{1}{2} at^2 \\ &= 3t - \frac{1}{2} \times 2t^2 = 3t - t^2 \quad (5) \end{aligned}$$

$\therefore$ The position vector after time t ,

$$\vec{r} = \left(\frac{4t + t^2 + 4}{2} \right) \underline{i} + (3t - t^2 - 5) \underline{j} \quad (5)$$

The velocity vector after time t ,

$$\underline{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} (4 + 2t) \underline{i} + (3 - 2t) \underline{j} \quad (5)$$

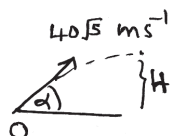
$$\underline{v} = (2 + t) \underline{i} + (3 - 2t) \underline{j}$$

$$\begin{aligned} |\underline{v}| &= \sqrt{(2+t)^2 + (3-2t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + 4t + 4 + 9 - 12t + 4t^2} \end{aligned}$$

$$|\underline{v}| = \sqrt{5t^2 - 8t + 13} \quad (5)$$

25

02)



$$\tan \alpha = 2$$



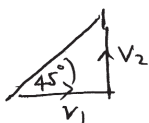
$$\begin{aligned} u &= 40\sqrt{5} \sin \alpha \\ &= 40\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 80 \text{ m/s} \quad (5) \end{aligned}$$

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = (80)^2 - 20 H$$

$$H = \frac{80 \times 80}{20} = 320 \text{ m} \quad (5)$$

II



$$V_1 = \text{initial horizontal velocity} \\ = 40 \sqrt{5} \cos \alpha = 40 \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ = 40 \text{ ms}^{-1} \quad (5)$$

$$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$V_2^2 = (80)^2 - 2 \times 10 h$$

$$V_2^2 = 80^2 - 20h$$

$$\tan 45 = \frac{V_2}{V_1} = 1$$

$$V_2^2 = V_1^2$$

$$V_2^2 = 40^2 \quad (5)$$

$$80^2 - 20h = 40^2$$

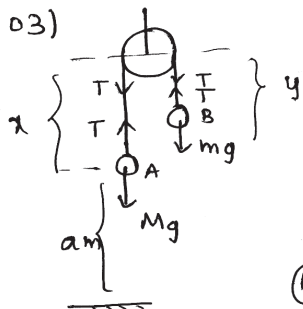
$$20h = (80 - 40)(80 + 40)$$

$$h = 2 \times 120 \text{ m}$$

$$h = \underline{\underline{240 \text{ m}}} \quad (5)$$

25

03)



the length of the string $x + y = l$

differentiating w.r.t. time

$$\dot{x} + \dot{y} = 0$$

$$\ddot{x} = -\ddot{y} \quad (1)$$

$$(M) \quad \downarrow F = ma$$

$$Mg - T = M\ddot{x} \quad (2)$$

$$(m)$$

$$mg - T = m\ddot{y} \quad (3)$$

$$(M - m)g = (M + m)\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{(M - m)g}{M + m} \quad (5)$$

For (M) to hit the table

$$\downarrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 0 + 2 \left(\frac{M - m}{M + m} \right) g \times a$$

$$v = \left[\frac{2a(M - m)g}{M + m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

time taken to hit the table = t

$$\downarrow v = u + at$$

$$\left[\frac{2a(M - m)g}{M + m} \right]^{\frac{1}{2}} = gt$$

$$t = \sqrt{\frac{2a(M - m)}{(M + m)g}} \quad (5)$$

Then the particle B moves under gravity.

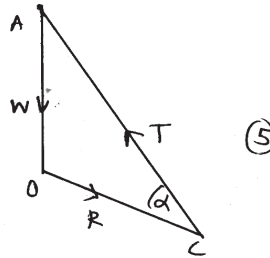
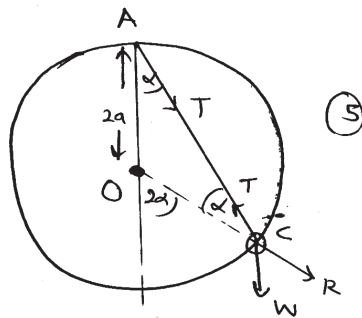
$$\uparrow S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$0 = \left[\frac{2a(M-m)g}{M+m} \right]^{\frac{1}{2}} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (5)$$

$$t=0 \text{ or } t = 2 \sqrt{\frac{2a(M-m)}{g(M+m)}} = \sqrt{\frac{8a(M-m)}{g(M+m)}} \quad (5)$$

25

4)



using the triangle law on forces

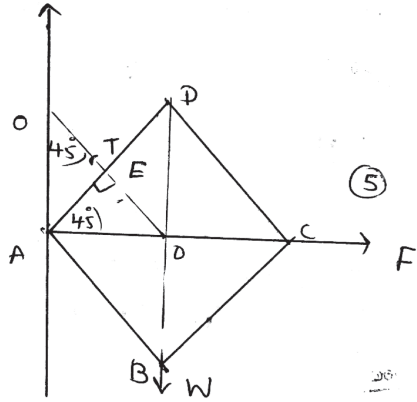
$$\frac{R}{OC} = \frac{T}{CA} = \frac{W}{AO}$$

$$\frac{R}{2a} = \frac{T}{2\sqrt{3}a} = \frac{W}{2a} \quad (5)$$

$$R = W \quad (5) \qquad T = \sqrt{3} W \quad (5)$$

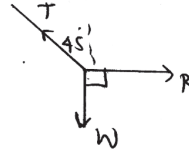
$$\overline{25}$$

5)



$$AE = OE$$

$$\underline{\underline{OE = a}} \quad (5)$$



Using the Lami's theorem,

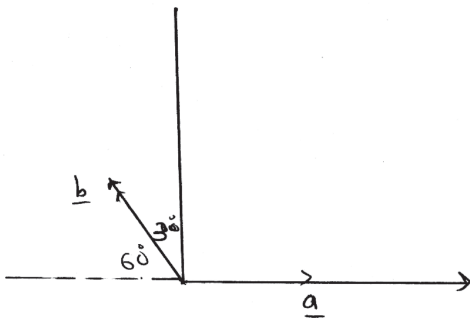
$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{W \cdot \sin (180^\circ - 45^\circ)} = \frac{W}{\sin (90^\circ + 45^\circ)} \quad (5)$$

$$T = \frac{R}{\sin 45^\circ} = \frac{W}{\cos 45^\circ}$$

$$T = \sqrt{2} W \quad (5), \quad R = W \quad (5)$$

25

6)



$$\underline{b} = -b \cos 60^\circ \underline{i} + b \sin 60^\circ \underline{j} \quad (5)$$

$$= -\frac{b}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{3} b}{2} \underline{j}$$

$$\underline{a} + \underline{b} = a \underline{i} + \left(\left(-\frac{b}{2} \right) \underline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} b \underline{j} \right) \quad (5)$$

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = \left(\underline{a} - \frac{\underline{b}}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{4} - ab + \frac{3b^2}{4}$$

$$= a^2 + b^2 - ab \quad (5)$$

since $|a+b| = a$

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = a^2 + b^2 - ab = a^2 \quad (5)$$

$$b(b-a) = 0$$

$$b = 0 \text{ or } b = a \quad (5)$$

$$\sqrt{25}$$

$\therefore$ magnitudes of a and b are equal.

7) Since $\underline{a}$ and $\underline{b}$ are perpendicular to each other

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \quad (5)$$

$$(2\underline{i} + P\underline{j}) \cdot (-5\underline{i} + 2\underline{j}) = 0$$

$$-10 + 2P = 0$$

$$P = 5 \quad (5)$$

$$\underline{a} = 2\underline{i} + 5\underline{j}$$

$$\underline{b} - \underline{a} = -5\underline{i} + 2\underline{j} - (2\underline{i} + 5\underline{j}) = -7\underline{i} - 3\underline{j}$$

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{a}) &= (2\underline{i} + 5\underline{j}) \cdot (-7\underline{i} - 3\underline{j}) \\ &= -14 - 15 \\ &= -29 \quad (5) \end{aligned}$$

If the angle between $\underline{a}$ and $\underline{b} - \underline{a}$ is θ ,

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} - \underline{a}) = |\underline{a}| |\underline{b} - \underline{a}| \cos \theta$$

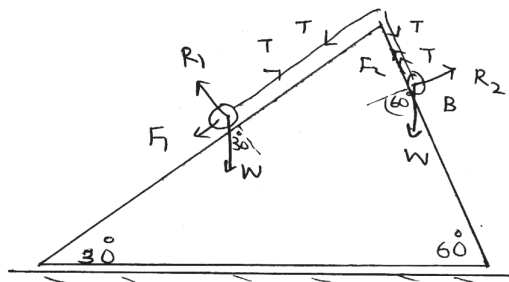
$$-29 = \sqrt{4+25} \times \sqrt{49+9} \times \cos \theta \quad (5)$$

$$\cos \theta = \frac{-29}{\sqrt{29} \times \sqrt{58}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (5)$$

25

8)



$$R_1 = W \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad (1) \quad (5)$$

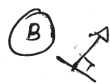
$$F_1 = \mu R_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \mu W \quad (3)$$

$$\rightarrow T - F_1 - W \sin 30 = 0$$

$$T - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu W - \frac{W}{2} = 0 \quad (5)$$

$$T = \frac{W}{2} (\sqrt{3} \mu + 1) \quad (2)$$



$$R_2 - W \cos 60^\circ = 0$$

$$R_2 = \frac{W}{2}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \mu R_2 \\ &= \frac{\mu W}{2} \quad (5) \end{aligned}$$



$$T + R_2 = W \sin 60$$

$$T + \frac{\mu W}{2} = \frac{W\sqrt{3}}{2}$$

$$T = \frac{W}{2} (\sqrt{3} - \mu) \quad (4) \quad (5)$$

by (2) & (4)

$$\frac{W}{2} (\sqrt{3}\mu + 1) = \frac{W}{2} (\sqrt{3} - \mu)$$

$$(\sqrt{3} + 1)\mu = \sqrt{3} - 1 \quad (5)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

25

9)

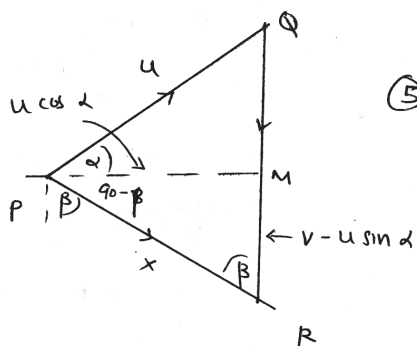
$$\underline{V}_{T,E} = \cancel{u}$$

$$\underline{V}_{R,E} = \downarrow v$$

Using the principle of relative velocity,

$$\underline{V}_{R,T} = \underline{V}_{R,E} + \underline{V}_{E,T}$$

$$= \downarrow_R^Q v + \nearrow_P^Q u$$



$$\begin{aligned} X^2 &= PM^2 + MR^2 \\ &= u^2 \cos^2 \alpha + (v - u \sin \alpha)^2 \\ &= u^2 \cos^2 \alpha + v^2 + u^2 \sin^2 \alpha - 2uv \sin \alpha \end{aligned}$$

$$= u^2 + v^2 - 2uv \sin \alpha$$

$$X = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \sin \alpha} \quad (5)$$

$$\tan \beta = \frac{u \cos \alpha}{v - u \sin \alpha}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{u \cos \alpha}{v - u \sin \alpha} \right) \quad (5)$$

If $u = V \sin \alpha$

$$\tan \beta = \frac{V \sin \alpha \cos \alpha}{V - V \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \beta = \tan \alpha \quad (5)$$

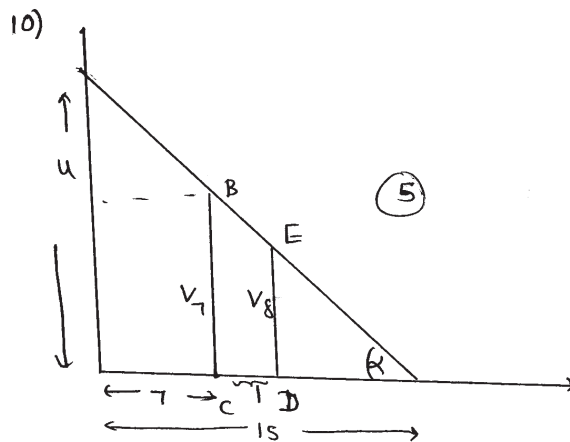
$$\beta = \alpha$$

$$\therefore \hat{QRR} = 90 - \beta + \alpha$$

$$= 90 - \beta + \beta$$

$$= 90^\circ \quad (5)$$

25



$$\tan \alpha = 10$$

$$\frac{u - V_7}{7} = 10$$

$$u - V_7 = 70$$

$$V_7 = u - 70$$

$$\frac{u - V_8}{8} = 10$$

$$V_8 = u - 80 \quad (5)$$

displacement at the 8th second = Area of trapezium BCDE

$$\left(\frac{V_7 + V_8}{2} \right) 1 = 75$$

$$u - 70 + u - 80 = 150 \quad (5)$$

$$2u = 300$$

$$u = 150 \text{ m s}^{-1}$$

$$\tan \alpha = 10$$

$$\frac{u}{f} = 10$$

$$\frac{150}{10} = f$$

$$f = 15 \text{ s} \quad (5)$$

If the maximum height is H

$$H = \frac{1}{2} \times 150 \times 15$$

$$= 75 \times 15$$

$$H = 1125 \text{ m} \quad (5)$$

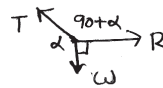
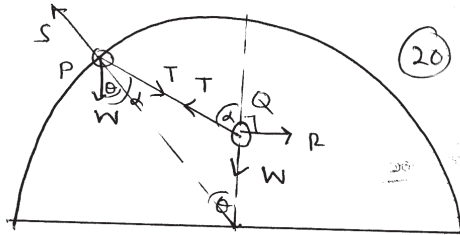
25

Third Term Test - 2019
Combined Mathematics II - Part B - Grade 12

Part B

11) a)

Using the Lami's theorem,



$$\frac{T}{\sin 90^\circ} = \frac{R}{\sin (180 - \alpha)} = \frac{W}{\sin (90 + \alpha)} \quad (10)$$

$$T = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{W}{\cos \alpha} \quad (1) \quad (5)$$

$$R = W \tan \alpha \quad (2) \quad (10)$$

Using the Lami's theorem to P,

$$\frac{S}{\sin \alpha} = \frac{W}{\sin (180 - \alpha + \theta)} = \frac{T}{\sin (180 - \theta)} \quad (10)$$

$$\frac{S}{\sin \alpha} = \frac{W}{\sin (\alpha - \theta)} \Rightarrow S = \frac{W \sin \alpha}{\sin (\alpha - \theta)} \quad (3) \quad (5)$$

$$T = \frac{W \sin \theta}{\sin (\alpha - \theta)} \quad (4) \quad (5)$$

by (1) and (4)

$$\frac{W}{\cos \alpha} = \frac{W \sin \theta}{\sin (\alpha - \theta)} \quad (5) \quad (5)$$

$$W (\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) = W \cos \alpha \sin \theta$$

$$W \tan \alpha = (W + W) \tan \theta \quad (10)$$

When $W = 4w$ and $a = 3l$

$$w \tan \alpha = 5w \tan \theta$$

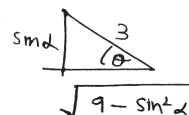
$$\tan \alpha = 5 \tan \theta \quad (A) \quad (5)$$

Using the sin rule

$$\frac{l}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin (180 - \alpha)} \quad (10)$$

$$\frac{l}{\sin \theta} = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{3l}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = 3 \sin \theta \quad (5)$$



by (A),

$$\tan \theta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{9 - \sin^2 \alpha}} \quad (10)$$

$$\tan \alpha = \frac{5 \sin \alpha}{\sqrt{9 - \sin^2 \alpha}} \quad (5)$$

$$\sin \alpha \left[\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{5}{\sqrt{9 - \sin^2 \alpha}} \right] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{5}{\sqrt{9 - \sin^2 \alpha}}$$

$$9 - \sin^2 \alpha = 25 \cos^2 \alpha$$

$$9 - \sin^2 \alpha = 25(1 - \sin^2 \alpha) \quad (5)$$

$$24 \sin^2 \alpha = 16$$

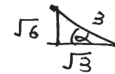
$$\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (5)$$

Since α is an acute angle $\sin \alpha > 0$ (10)

$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

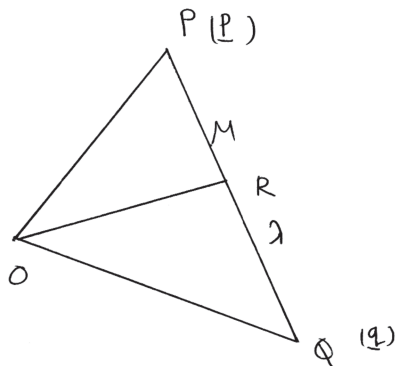
by (1) $T = \frac{W}{\cos \alpha} = \frac{W \times 3}{\sqrt{3}}$

$$T = \sqrt{3} W \quad (10)$$



150

12)



By the triangle OPR,

$$\vec{OR} = \vec{OP} + \vec{PR} \quad (5)$$

$$= \vec{OP} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \vec{PQ} \quad (10)$$

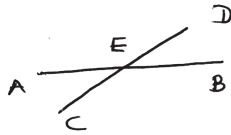
$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \vec{P} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (\vec{Q} - \vec{P}) \quad (10)$$

$$= \frac{(\lambda + \mu) \vec{P} + \mu (\vec{Q} - \vec{P})}{\lambda + \mu}$$

$$= \frac{\lambda \vec{P} + \mu \vec{Q}}{\lambda + \mu} \quad (5)$$

$$= \lambda \vec{P} + \mu \vec{Q} \quad (5) \quad (\because \lambda + \mu = 1)$$





$$\underline{d} = \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} + \gamma \underline{c}$$

$$\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{d} - \gamma \underline{c} \quad (5)$$

$$\frac{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}}{\lambda + \mu} = \frac{\underline{d} - \gamma \underline{c}}{\lambda + \mu} \quad (6) \quad (1)$$

$$\lambda + \mu = 1 - \gamma \quad (2) \quad (5)$$

by (1)
$$\frac{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}}{\lambda + \mu} = \frac{\underline{d} - \gamma \underline{c}}{1 - \gamma} \quad (10)$$

By $\frac{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}}{\lambda + \mu}$, it gives a point which lies on AB

$\frac{\underline{d} - \gamma \underline{c}}{1 - \gamma}$ gives a point which lies on CD.

$\therefore$ that is the intersection point of the lines AB and CD.

$$\underline{e} = \frac{\lambda \underline{a} + \mu \underline{b}}{\lambda + \mu} \quad (5) \quad (10)$$

45

b) If the algebraic sum of moments of the ^{system of} forces is M,

$$M = G - 2Y + 4X.$$

The moment about (2,1) is 11.

$$11 = G - 2Y + X \quad (1) \quad (5)$$

The moment about (0,0) is 5.

$$5 = G - 0 - 0 \Rightarrow G = 5 \quad (5)$$

$$11 = 5 - 2Y + X$$

$$6 = X - 2Y \quad (2) \quad (5)$$

$$24 = 4X - 8Y \quad (3)$$

The moment about (-3,4) is -15.

$$-15 = G + 3Y + 4X$$

$$-15 = 5 + 3Y + 4X$$

$$-20 = 3Y + 4X \quad (4) \quad (5)$$

by ③ and ④

$$24 - (-20) = -8y - 3y$$

$$44 = -11y$$

$$y = -4 \quad (5)$$

$$6 = x - 2y$$

$$6 = x + 8$$

$$x = -2 \quad (5)$$

∴ The line of action of the resultant.

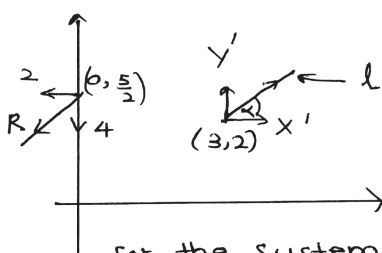
$$5 - x(4) + y(-2) = 0$$

$$4x - 2y + 5 = 0 \quad (5)$$

$$y = 2x + \frac{5}{2}$$

$$\tan \alpha = 2$$

∴ The resultant cut the y axis at $(0, \frac{5}{2})$.
(5)



for the system to reduce to a couple (5)

$$\rightarrow -2 + x' = 0 \Rightarrow x' = 2 \quad (5)$$

$$\uparrow -4 + y' = 0 \Rightarrow y' = 4 \quad (5)'$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{2} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} 2 \quad (5)$$

If a point on the line l is (x, y) ,

$$\frac{y-2}{x-3} = 2$$

$$y-2 = 2x-6$$

$$y-2x+4=0 \Rightarrow 2x-y-4=0 \quad (5)$$

The moment of the couple,

$$\curvearrowleft G = 4 \times 3 + 2 \left(\frac{5}{2} - 2 \right)$$

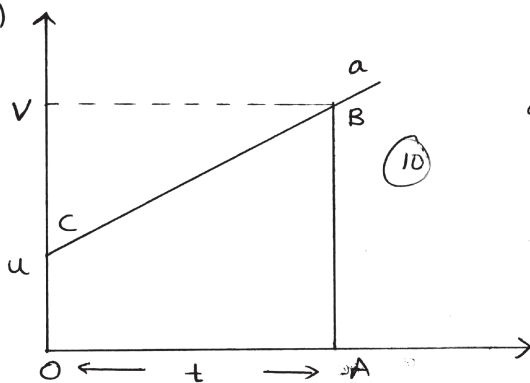
$$= 12 + \left(2 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$\curvearrowleft G = 13 \quad \text{in the anticlockwise direction.} \quad (5)$$

70

(13)

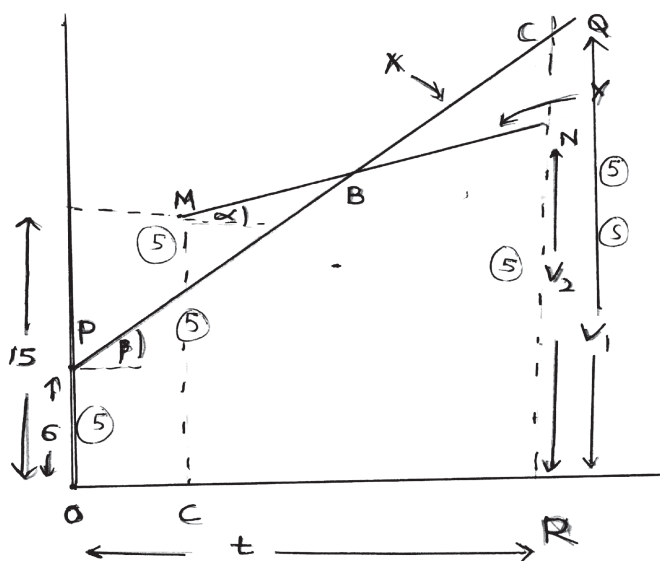
a)



distance travelled = Area of the trapezium OABC (5)

$$S = \frac{1}{2}(u+v)t \quad (5)$$

20



$$\tan \beta = 2$$

30

$$\frac{V_1 - 6}{t} = 2$$

$$V_1 = 6 + 2t \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\frac{V_2 - 15}{t - 2} = \frac{3}{2}$$

$$V_2 = 15 + \frac{3}{2}(t - 2) \quad (5)$$

When X and Y meet each other,

displacement of X = displacement of Y (5)

Area of trapezium OPQR = Area of trapezium CMNR

$$\left(\frac{6 + V_1}{2}\right)t = \left(15 + \frac{V_2}{2}\right)(t - 2) \quad (5)$$

$$\left(\frac{6 + 6 + 2t}{2}\right)t = \left[15 + 15 + \frac{3}{2}(t - 2)\right](t - 2) \quad (5)$$

$$(12 + 2t)t = 30t + \frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4) - 60$$

$$t^2 - 24t + 108 = 0 \quad (5)$$

$$(t - 6)(t - 18) = 0$$

$$t = 6 \text{ or } t = 18 \quad (5)$$

At B, when $t=6$ Y passes X.

At C, when $t=18$ X passes Y. (5)

45

II the distance BC = displacement at X when $t=18$ - displacement at X when $t=6$. (5)

= Area of trapezium OPQR when $t=18$ - Area of trapezium OPQR when $t=6$. (5)

$$= \left(\frac{6+V_1}{2} \right) t \Big|_{t=18} - \left(\frac{6+V_1}{2} \right) t \Big|_{t=6} \quad (5)$$

$$= \left(\frac{6+6+2t}{2} \right) t \Big|_{t=18} - \left(\frac{6+6+2t}{2} \right) t \Big|_{t=6}$$

$$= 24(18) - 12 \times 6$$

$$= 432 - 72$$

$$= 360 \text{ m} \quad (5)$$

15

III At time t , if the distance between X and Y is S ,

S = Area of trapezium LMNR - Area of trapezium OPQR (5)

$$= \left(\frac{15+V_2}{2} \right) (t-2) - \left(\frac{6+V_1}{2} \right) t \quad (5)$$

$$= \left[\frac{15 + 15 + \frac{3}{2}(t-2)}{2} \right] (t-2) - \left(\frac{6+6+2t}{2} \right) t$$

$$= 15(t-2) + \frac{3}{4}(t-2)^2 - 6t - t^2$$

$$= \frac{1}{4} [60t - 120 + 3t^2 - 12t + 12 - 24t - 4t^2]$$

$$= -\frac{1}{4} (t^2 - 24t + 108) \quad (5)$$

differentiating w.r.t. time

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{4} (2t - 24) = \frac{1}{2} (12 - t) \quad (5)$$

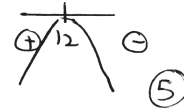
20

for minimum or maximum value of t , $\frac{ds}{dt} = 0$. (5)

$$\frac{1}{2} (12 - t) = 0, \quad t = 12.$$

$$t < 12, \quad \frac{ds}{dt} > 0$$

$$t > 12, \quad \frac{ds}{dt} < 0$$



$\therefore S$ is maximum when $t = 12$. (5)

$$S_{\max} = \left[15(t-2) + \frac{3}{4} (t-2)^2 - 6t - t^2 \right]_{t=12}$$

$$= 150 + \frac{3 \times 100}{4} - 72 - 144$$

$$= 9 \text{ m} \quad (5)$$

20

$$v_1 = 6 + 2t$$

$$v_2 = 15 + \frac{3}{2} (t-2)$$

The distance between x and y is maximum when $v_1 = v_2$.

$$6 + 2t = 15 + \frac{3}{2} (t-2)$$

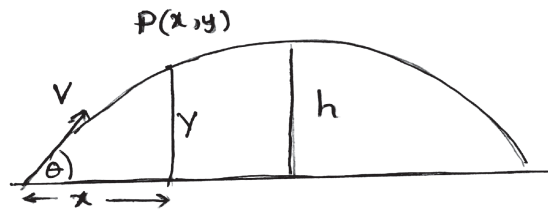
$$t = 30 - 18 = \underline{\underline{12}}$$

$\therefore$ When $t = 12$, S is maximum.

$$S_{\max} = -\frac{1}{4} (12^2 - 288 + 108)$$

$$= -\frac{1}{4} (-36) = \underline{\underline{9 \text{ m}}}$$

14.)



$$\rightarrow s = ut$$

$$x = V \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V \cos \theta} \quad (5)$$

$$\uparrow s = ut + \frac{1}{2} at^2$$

$$y = V \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 \quad (5)$$

$$= V \sin \theta \times \frac{x}{V \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V \cos \theta} \right)^2 \quad (5)$$

$$= x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{V^2} \sec^2 \theta$$

$$= x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{V^2} (1 + \tan^2 \theta) \quad (10)$$

$$= x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{V^2} - \frac{gx^2 \tan^2 \theta}{2V^2} \quad \swarrow$$

$$d \tan \alpha - \frac{gd^2}{2V^2} - \frac{gd^2}{2V^2} \tan^2 \alpha > h \quad (5)$$

$$\frac{gd^2}{2V^2} \tan^2 \alpha - d \tan \alpha + \frac{gd^2}{2V^2} + h < 0 \quad (10)$$

$$\tan^2 \alpha - \frac{2V^2 \tan \alpha}{gd} + 1 + \frac{2V^2 h}{gd^2} < 0 \quad (10)$$

$$\Delta = \left(\frac{2V^2}{gd} \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{2V^2 h}{gd^2} \right) \quad (5)$$

$$= \frac{4V^4}{g^2 d^2} - \left(4 + \frac{8V^2 h}{gd^2} \right) = \frac{4}{g^2 d^2} [V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh]$$

If $\Delta > 0$, $\tan^2 \alpha - \frac{2V^2}{qd} \tan \alpha + 1 + \frac{2V^2 h}{qd^2}$ can be

factorized as $(\tan \alpha - \tan \alpha_1)(\tan \alpha - \tan \alpha_2)$ (10)

Then for $\tan^2 \alpha - \frac{2V^2}{qd} \tan \alpha + 1 + \frac{2V^2 h}{qd^2} < 0$,

$\tan \alpha$ should lie between $\tan \alpha_1$ and $\tan \alpha_2$.

$\therefore \alpha$ should lie between α_1 and α_2 . (10)

$$\begin{aligned}\Delta &= V^4 - 2V^2 qh - q^2 d^2 \\ &= (V^2 - V_1^2)(V^2 - V_2^2)\end{aligned}$$

$$V_1^2 = \frac{2qh \pm \sqrt{(2qh)^2 - 4 \times 1(-q^2 d^2)}}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{2qh \pm \sqrt{4q^2 h^2 + 4q^2 d^2}}{2}$$

$$= \frac{2qh \pm 2q \sqrt{h^2 + d^2}}{2}$$

$$= qh \pm q \sqrt{h^2 + d^2}$$

$$= q [h \pm \sqrt{h^2 + d^2}]$$

$$V_1^2 = q(h + \sqrt{h^2 + d^2}) \quad V_2^2 = q[h - \sqrt{h^2 + d^2}] \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\Delta &= V^2 - 2V^2 qh - q^2 d^2 \\ &= [V^2 - q(h + \sqrt{h^2 + d^2})][V^2 + q(h + \sqrt{h^2 + d^2})]\end{aligned}$$

For $\Delta > 0$,

$$V^2 - q(h + \sqrt{h^2 + d^2}) > 0 \quad (10)$$

$$V > \underbrace{\sqrt{q(h + \sqrt{h^2 + d^2})}}_u \quad (5)$$

If V is greater than the minimum value of u , $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. (10)

Also, $\tan^2 \alpha - \frac{2V^2}{gd} \tan \alpha + 1 + \frac{2V^2h}{gd^2}$ (120)

If the solutions are $\tan \alpha_1$ and $\tan \alpha_2$,

$$\tan \alpha_1, \tan \alpha_2 = \frac{\frac{2V^2}{gd} \pm \sqrt{\left(\frac{2V^2}{gd}\right)^2 - 4 \times 1 \left[1 + \frac{2V^2h}{gd^2}\right]}}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{2V^2}{gd} \pm \frac{2}{gd} \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{2}$$

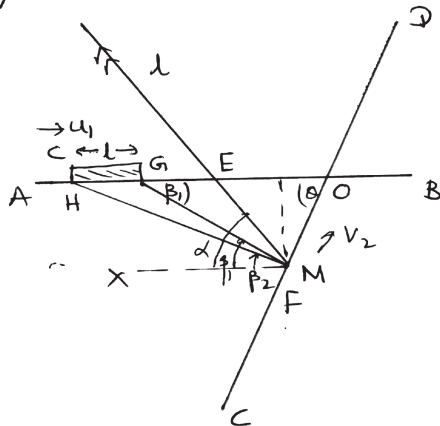
$$= \frac{V^2 \pm \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{gd} \quad (10)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{V^2 - \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{gd}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{V^2 + \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{gd}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{V^2 - \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{gd} \right) \quad \alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{V^2 + \sqrt{V^4 - g^2 d^2 - 2V^2 gh}}{gd} \right)$$

(10)

15)



$$\angle EFX = \alpha$$

$$\angle QFX = \beta_1$$

$$\angle HFX = \beta_2$$

I In the relative motion, if $\alpha > \beta$,
the car doesn't collide with the container. (5)

II If $\alpha < \beta$ the car and the container doesn't collide.

$$\underline{V}_{C,E} = \underline{u}_1 \quad \underline{V}_{M,E} = \begin{array}{c} u_2 \\ \nearrow \theta \end{array} \quad (5)$$

$$\underline{V}_{M,C} = \underline{V}_{M,E} + \underline{V}_{E,C}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \underline{X} \end{array} = \begin{array}{c} u_2 \\ \nearrow \theta \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow u_1 \\ \underline{X} \end{array} \quad (5)$$

$$\leftarrow X \cos \alpha = -u_2 \cos \theta + u_1 \quad - (1) \quad (5)$$

$$\uparrow X \sin \alpha = u_2 \sin \theta \quad - (2) \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \frac{u_2 \sin \theta}{u_1 - u_2 \cos \theta} \quad (5)$$

$$\tan \beta_1 = \frac{S_2 \sin \theta}{S_1 - S_2 \cos \theta} \quad (5)$$

To not collide with the container $\alpha > \beta_1$

$$\tan \alpha > \tan \beta_1 \quad (5)$$

$$\frac{u_2 \sin \theta}{u_1 - u_2 \cos \theta} > \frac{S_2 \sin \theta}{S_1 - S_2 \cos \theta} \quad (5)$$

$$u_2 S_1 - u_2 S_2 \cos \theta > u_1 S_2 - u_2 S_2 \cos \theta$$

$$u_2 S_1 > u_1 S_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} > \frac{u_1}{u_2}$$

$$\underline{\underline{\frac{S_1}{u_1} > \frac{S_2}{u_2}}} \quad (5)$$



$$\alpha < \beta_2 \quad (5)$$

$$\tan \alpha < \tan \beta_2$$

$$\tan \alpha = \frac{u_2 \sin \theta}{u_1 - u_2 \cos \theta} \quad (5)$$

$$\tan \beta_2 = \frac{s_2 \sin \theta}{l + (s_1 - s_2 \cos \theta)} \quad (5)$$

$$\frac{u_2 \sin \theta}{u_1 - u_2 \cos \theta} < \frac{s_2 \sin \theta}{l + (s_1 - s_2 \cos \theta)} \quad (5)$$

$$u_2 [l + (s_1 - s_2 \cos \theta)] < s_2 (u_1 - u_2 \cos \theta)$$

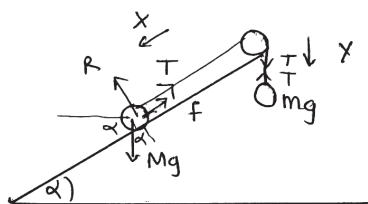
$$u_2 (l + s_1) - u_2 s_2 \cos \theta < u_1 s_2 - s_2 u_2 \cos \theta$$

$$u_2 (l + s_1) < u_1 s_2 \quad (5)$$

$$\frac{l + s_1}{u_1} < \frac{s_2}{u_2}$$

$$\frac{s_2}{u_2} > \frac{s_1 + l}{u_1} \quad (5)$$

30



$$a_{M,E} = \ddot{x}$$

$$a_{m,E} = \ddot{y} \quad (5)$$

for the length of the string $x + y + c = l$ (5)
differentiating w.r.t. time.

$$\ddot{x} + \ddot{y} = 0$$

$$\ddot{x} = -\ddot{y} \quad (5)$$

for the equilibrium,

$$R = Mg \cos \alpha \quad (5)$$

$$F = \mu R$$

$$R = \mu Mg \cos \alpha \quad (5)$$

$$\textcircled{M} \downarrow F = ma$$

$$Mg \sin \alpha - T - F = M\ddot{x} \quad \textcircled{5}$$

$$Mg \sin \alpha - T - \mu Mg \cos \alpha = M\ddot{x} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{m} \downarrow F = ma$$

$$mg - T = m\ddot{y} \quad \textcircled{5}$$

$$\ddot{y} = -\ddot{x}$$

$$mg - T = -m\ddot{x} \quad \textcircled{3}$$

$$Mg \sin \alpha - mg - \mu Mg \cos \alpha = (M+m)\ddot{x} \quad \textcircled{5}$$

$$Mg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - mg = (M+m)\ddot{x}$$

$$\frac{g}{(M+m)} [M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m] = \ddot{x} \quad \textcircled{5}$$

$$\text{for } M \text{ to move downwards } \ddot{x} > 0. \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{g}{(M+m)} [M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m] > 0$$

$$M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m > 0$$

$$\underline{\underline{M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha > m}} \quad \textcircled{5}$$

60

If the velocity which the particle m comes to the point A is V,

$$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$$

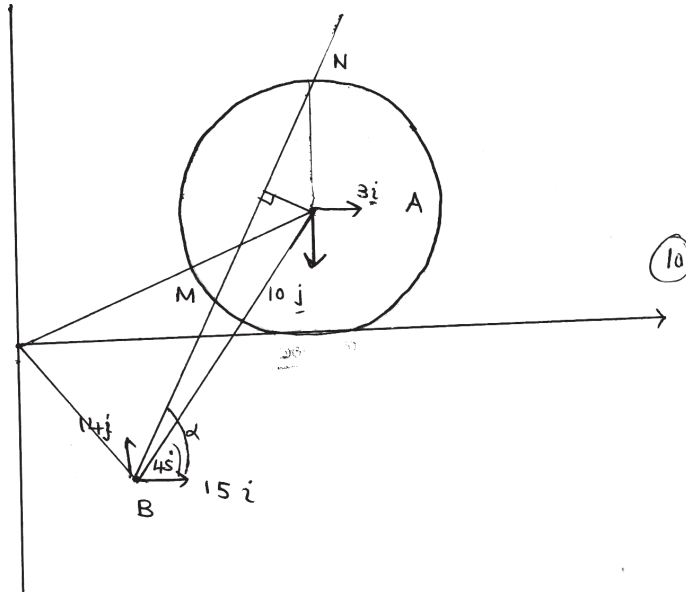
$$v^2 = 0 + 2\ddot{x} \times 2m \quad \textcircled{5}$$

$$v^2 = 4\ddot{x}$$

$$V = 2 \sqrt{\frac{g}{(M+m)} [M \sin \alpha - \mu M \cos \alpha - m]} \quad \textcircled{5}$$

10

16) a)



$$\underline{V}_{A,E} = 3\underline{i} - 10\underline{j}$$

$$\underline{V}_{B,E} = 15\underline{i} + 14\underline{j}$$

$$\underline{V}_{B,A} = \underline{V}_{B,E} + \underline{V}_{E,A}$$

$$= 15\underline{i} + 14\underline{j} - (3\underline{i} - 10\underline{j})$$

$$= 12\underline{i} + 24\underline{j} = 12(\underline{i} + 2\underline{j}) \quad (10)$$

$$\boxed{20}$$

$$|\underline{V}_{B,A}| = 12\sqrt{1+4} = 12\sqrt{5} \quad (5)$$

If the angle which $\underline{V}_{B,A}$ makes with the horizontal is α ,
 $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \quad (5)$

Using the triangle law of vector addition to the triangle OAB,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}$$

$$= \underline{a} - \underline{b}$$

$$= 13\underline{i} + 5\underline{j} - (3\underline{i} - 5\underline{j})$$

$$= 10\underline{i} + 10\underline{j} = 10(\underline{i} + \underline{j}) \quad (10)$$

$$|\overrightarrow{BA}| = 10\sqrt{2} \quad (5)$$

If the angle which BA makes with horizontal is θ ,

$$\tan \theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = 45^\circ \quad (5)$$

If the shortest distance is d ,

$$d = 10\sqrt{2} \sin(\alpha - 45) \quad (5)$$

$$d = 10\sqrt{2} [\sin \alpha \cos 45 - \cos \alpha \sin 45] \quad (5)$$

$$= 10\sqrt{2} \left[\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5}} (2-1)$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ km} \quad (5)$$

50

$$t = \left| \frac{V_{BA}}{V_{BA}} \right| \quad (5)$$

$$= \frac{MN}{12\sqrt{5}} \quad (5)$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{12\sqrt{5}} = \frac{1}{6} \text{ hour} = 10 \text{ minutes} \quad (5)$$

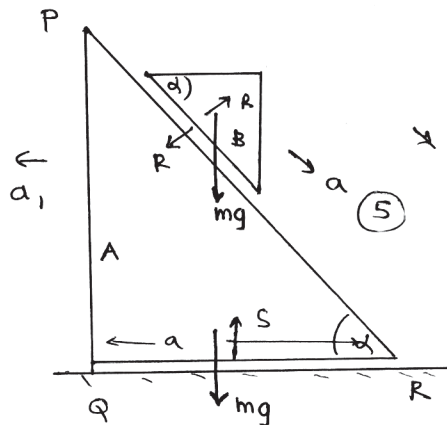
$$ML = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2}$$

$$= \sqrt{25 - 20}$$

$$= \sqrt{5}$$

$$MN = 2\sqrt{5} \quad (5)$$

20



$$a_{A,E} = a_1$$

$$a_{B,E} = \begin{matrix} a_1 \\ \swarrow \\ a \end{matrix} \quad (5)$$

$$F = ma$$

$$mg \sin \alpha = m(a - a_1 \cos \alpha) \quad (1) \quad (5)$$

$$\text{for the system} \rightarrow F = ma$$

$$0 = -Ma_1 + m(a \cos \alpha - a_1) \quad (5)$$

$$(M+m)a_1 = ma \cos \alpha$$

$$a_1 = \frac{ma \cos \alpha}{M+m} \quad (5)$$

$$g \sin \alpha = a - \frac{ma \cos^2 \alpha}{M+m} = \frac{a}{M+m} (M+m - m \cos^2 \alpha)$$

(5)

$$= \frac{a}{M+m} (M+m \sin^2 \alpha)$$

$$a = \frac{(M+m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m a \cos \alpha}{M+m} \\ &= \frac{m \cos \alpha}{M+m} \times \frac{(M+m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{m g \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5) \end{aligned}$$

When B comes to A, the distance which it should travel relative to A = $\frac{a-b}{\cos \alpha}$ (5)

If the time taken for it is t ,
 $\therefore s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$\frac{a-b}{\cos \alpha} = 0 + \frac{1}{2} \left(\frac{(M+m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \right) t^2$$

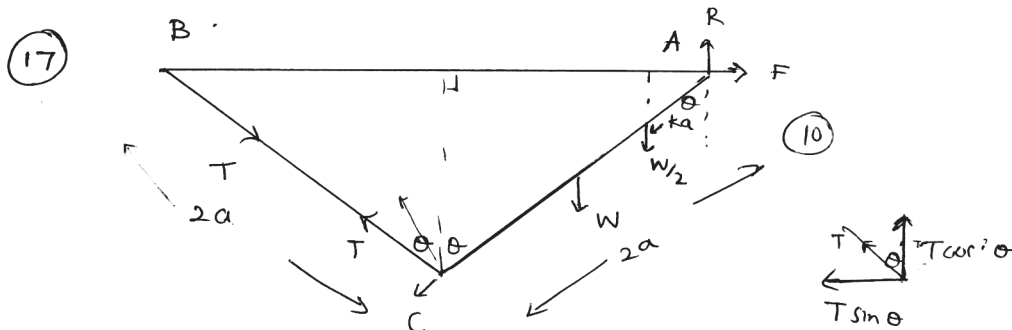
$$t^2 = \frac{a-b}{\cos \alpha} \times \frac{2 (M + m \sin^2 \alpha)}{(M+m) g \sin \alpha} \quad (5)$$

If the distance travelled by A within this time is S_A ,
 $\leftarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$S_A = 0 + \frac{1}{2} \frac{m g \sin \alpha \cos \alpha}{(M + m \sin^2 \alpha)} \times \frac{(a-b)}{\cos \alpha} \times \frac{2 (M + m \sin^2 \alpha)}{(M+m) g \sin \alpha}$$

$$S_A = \frac{m(a-b)}{M+m} \quad (10)$$

60



For the equilibrium

A) $-T \cos (2\theta - 90) \times 2a + W a \cos (90 - \theta) + \frac{W}{2} ka \cos (90 - \theta) = 0$

$$T \sin 2\theta \times 2a = W a \left(\sin \theta + \frac{k}{2} \sin \theta \right) \quad (10)$$

$$T = \frac{W \sin \theta (2+k)}{4 \sin \theta \cos \theta} = \frac{W (2+k)}{4 \cos \theta} \quad (5)$$

$\rightarrow$ AB $F - T \sin \theta = 0$

$$F = \frac{W}{4} \frac{(2+k) \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{W}{4} (2+k) \tan \theta$$

(10)

$\uparrow$ $R = W + \frac{W}{2} + T \cos \theta$

$$= \frac{3W}{2} - \frac{W}{4} (2+k)$$

$$= \frac{W}{4} (6 - 2 - k) = \frac{W}{4} (4 - k) \quad (5)$$

$$\frac{F}{R} = \frac{W (2+k) \tan \theta}{4 \times \frac{W}{4} (4-k)} = \frac{(2+k) \tan \theta}{4-k} \quad (5)$$

When $\theta = 45^\circ$, $\frac{F}{R} = \frac{2+k}{4-k} \quad (5)$

If $\mu = \frac{2}{3}$, In equilibrium, $\left| \frac{F}{R} \right| < \frac{2}{3} \quad (5)$

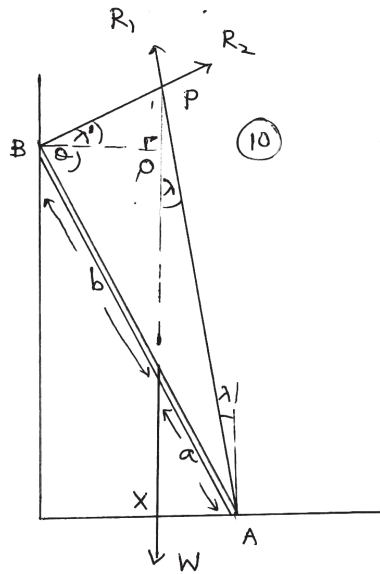
$$\frac{2+k}{4-k} < \frac{2}{3} \quad (5)$$

$$6 + 3k < 8 - 2k$$

$$5k < 2$$

$$k < \frac{2}{5} \quad (5)$$

$$\therefore 0 < k < \frac{2}{5} \quad (10) \quad (\because 0 < k < 2)$$



$$\tan \lambda = \mu \quad (5)$$

$$\tan \lambda' = \mu' \quad (5)$$

In the triangle BOP,

$$\tan \lambda' = \frac{PO}{BO} \quad (5)$$

$$\mu' = \frac{PO}{b \cos \theta}$$

$$PO = \mu' b \cos \theta \quad (10)$$

$$OX = (a+b) \sin \theta \quad (5)$$

$$PX = PO + OX$$

$$= \mu' b \cos \theta + (a+b) \sin \theta \quad (5)$$

$$XA = a \cos \theta \quad (5)$$

In the triangle PXA,

$$\tan \lambda = \frac{XA}{PX} = \frac{a \cos \theta}{\mu' b \cos \theta + (a+b) \sin \theta}$$

$$\mu = \frac{a \cos \theta}{\mu' b \cos \theta + (a+b) \sin \theta} \quad (10)$$

$$\mu \mu' b \cos \theta + \mu (a+b) \sin \theta = a \cos \theta$$

$$\mu (a+b) \sin \theta = (a - \mu \mu' b) \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{a - \mu \mu' b}{\mu (a+b)}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{a - \mu \mu' b}{\mu (a+b)} \right) \quad (10)$$