



තෙවන වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2019

Third Term Test - Grade 13 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය I

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ .	1
	2
අධීක්ෂණය	

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I (A කොටස)

01. සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ බව ගණිත අනුප්පාතන මූලධර්මය මගින් පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

02. $3|x-2| > 4x - x^2$ යන අසමානතාවය තෘප්ත කරන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

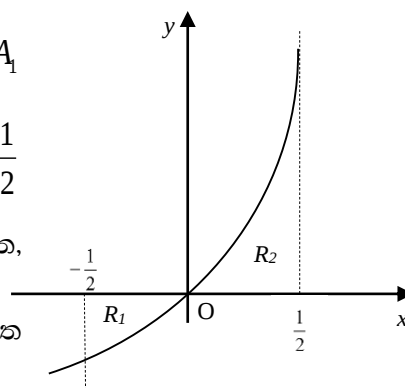
.....

.....

.....

[illegible]

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins or other markings visible.

[illegible][illegible]

07. $t \geq -1$ සඳහා $x = (t+1)^2$ හා $y = \frac{1}{2}t^3 + 3$ පරාමිතික සමීකරණය මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ.

$t = 2$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේ දී C වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්භයේ සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

08. සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාද දෙකක සමීකරණ $7x - y + 3 = 0$ හා $x + y - 3 = 0$ මගින් දෙනු ලැබේ. එහි තුන්වන පාදය $(1, -10)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. එහි සමීකරණය සොයන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 13 - I (B කොටස)

❖ ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. a. $f(x) = x^2 + (k+6)x + 6k$ නම්,

i. සියළු ම තාත්වික අගය සඳහා $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්වික මූල තිබෙන බව පෙන්වන්න.
එම මූල α, β නම්, $(\alpha^2 + 1), (\beta^2 + 1)$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය ලබාගන්න.

ii. $f(x-k) - 2x = 0$ සමීකරණයේ මූල $0, -4$ වන පරිදි k හි අගය සොයන්න. k හි මෙම අගය සඳහා $f(x-k) - 2x$ හි අවම අගය සොයන්න.

b. $f(x)$ යනු මාත්‍රය 2ක් වන බහුපදයකි. $f(x)$ යන්න $(x-1), (x+2)$ හා $(2x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂ පිළිවෙලින් $-3, +3$ හා 0 වේ. $f(x)$ සොයන්න.

$g(x)$ යනු මාත්‍රය 4ක් හා නායක සංගුණකය 2 වන බහුපදයක් වන අතර, $f(x)$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයකි. $(x+1)^2$ න් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $39x+21$ වේ. $g(x)$ සොයන්න.

12. a. $(a), (b)$ හා (c) යනුවෙන් කොටස් 3කින් සමන්විත ප්‍රශ්න පත්‍රයක (a) කොටසේ ප්‍රශ්න 6ක් ද (b) හා (c) කොටස්වල ප්‍රශ්න 3 බැගින් ද යනුවෙන් ප්‍රශ්න 12ක් ඇතුළත්ය. විභාග අපේක්ෂකයෙක් අවම වශයෙන් (a) කොටසෙන් ප්‍රශ්න 2 ක් ද (b) හා (c) කොටස්වලින් ප්‍රශ්න 1 බැගින් ද ලෙස ප්‍රශ්න 6ක් තෝරාගෙන පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. විභාග අපේක්ෂකයාට ප්‍රශ්න 6 තෝරා ගත හැකි ආකාර ගණන සොයන්න.

b. පිළිවෙලින් $(2r+1)^2 - (2r-1)^2 \equiv 8r$ හා $[r(r+1)]^2 - [r(r-1)]^2 \equiv 4r^3$ සර්ව සාමාන්‍ය උපයෝගී කර ගනිමින් $\sum_{r=1}^n r = \frac{n}{2}(n+1)$ බව ද $\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$ බව ද පෙන්වන්න.

තවද $\frac{1}{1^3} + \frac{1+2}{1^3+2^3} + \frac{1+2+3}{1^3+2^3+3^3} + \dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය වන Ur ලියන්න.

$Ur \equiv f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ ශ්‍රිතයක් සොයා එමගින් $\sum_{r=1}^n Ur$ අගයන්න.

ශ්‍රේණියේ අභිසාරී බව ද පෙන්වන්න.

13. a. $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ හා $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$ හා $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ නම්, PQ සොයන්න. $PQ - R = A$ වන පරිදි

A න්‍යාසයක් ලබා ගන්න. $A^2 + \lambda I = \mu A$ වන පරිදි λ, μ නියත සොයන්න. මෙහි I මගින් ගණය 2 වූ ඒකක න්‍යාසයක් නිරූපණය වේ. එමගින් A න්‍යාසයේ ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

- b. z_1 හා z_2 යනු $\frac{z_1 + 4}{z_1} = 2 - i$ හා $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ වන ආකාරයේ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි ගනිමු.

z_1 සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $\lambda(1+i)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි λ තාත්වික වේ. λ හි අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

$|z_1| = |z_2|$ බව පෙන්වන්න. $\arg(z_1)$ හා $\arg(z_2)$ සොයන්න.

$|z - z_1| = |z - z_2|$ වන පරිදි z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට ආදාල පථයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$z = z_1 + z_2$ නම් z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව $|z - z_1| = |z - z_2|$ තෘප්ත කරණ බව පෙන්වා, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවට අනුරූප පිහිටීම ලකුණු කර පෙන්වන්න. ඒනයින් $\arg(z_1 + z_2)$ සොයන්න.

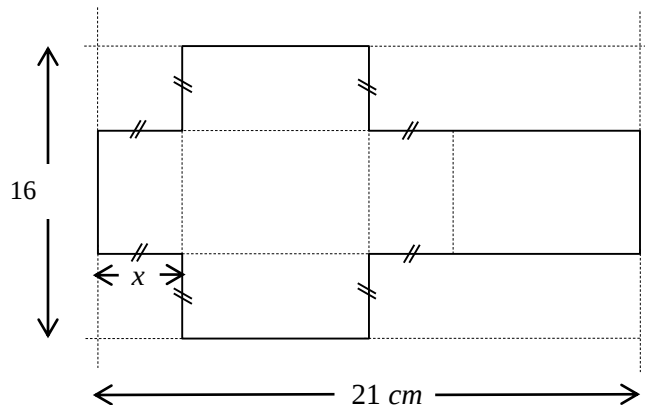
14. a. $x \neq 2$ හා $x \neq \frac{2}{3}$ සඳහා $f(x) = \frac{16x}{(x-2)^2(3x-2)}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය $f'(x)$ යන්න $f'(x) = \frac{-32(x-1)(3x+2)}{(x-2)^3(3x-2)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

$y = f(x)$ හි ස්පර්ශෝන්මුඛවල සමීකරණ ලියා දක්වන්න. තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය $y = f(x)$ වක්‍රය

ප්‍රස්ථාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

- b. පළල 16 cm සහ දිග 21 cm වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කාඩ්බෝඩ් කැබැල්ලක 16 cm ක් දිග පැත්තේ කොන් දෙකකින්, සමචතුරස්‍ර කපා ඉවත්කරීමෙන් (රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි) හා සෘජුකෝණාස්‍ර දෙකක් කපා ඉවත්කරීමෙන් (රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි) සංවෘත පෙට්ටියක් සාදා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත.



- පෙට්ටියේ පරිමාව $V(x)$ සඳහා ප්‍රකාශනයක් cm^3 වලින් සොයන්න.
- උපරිම පරිමාවකින් පෙට්ටියක් සාදා ගැනීමට කපා ඉවත් කරන සමචතුරස්‍රයේ පැත්තක දිග සොයන්න.

15. a. $\frac{x^2 - 2}{(x-2)^2} \equiv A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ වන පරිදි A, B හා C හි අගයයන් සොයන්න.

$y = \frac{x^2 - 2}{(x-2)^2}$ සමීකරණය සහිත වක්‍රයෙන් ද x - අක්ෂයෙන් ද $x=3$ හා $x=4$ රේඛා මගින් ද ආවෘත පෙදෙස R මගින් නිරූපණය කෙරේ. R සඳහා වර්ග ඒකක $(2+4\ln 2)$ ක වර්ගඵලයක් සහිත බව පෙන්වන්න.

b. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x^3 e^{x^2} dx$ සොයන්න.

c. $t = \tan x$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ බව සාධනය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$ අනුකලය අගයන්න.

16. a. P සහ Q යනු පිළිවෙළින් x හා y අක්ෂ මත වූ ප්‍රතින්ත විචල්‍ය ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. A යනු $(1, 1)$ ලක්ෂ්‍යයයි. A සිට PQ ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය R වේ.

$P = (\lambda, 0)$ සහ $Q = (0, \mu)$ ලෙස ගෙන λ හා μ ඇසුරෙන් R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. මෙහි $\lambda, \mu > 0$ වේ.

$\hat{PAQ}$ සෘජුකෝණයක් වන පරිදි x හා y අක්ෂ මත P සහ Q විචල්‍ය වේ නම්, R ලක්ෂ්‍යය $x + y - 1 = 0$ සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

b. $x^2 + y^2 + 2g_i x + 2f_i y + c_i = 0$; $i = 1, 2$ වෘත්ත ඡේදනය වේ නම්, පොදු ඡායායේ සමීකරණය $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + c_1 - c_2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

PQ යනු $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ වෘත්තයේ විචල්‍ය ඡායායකි. PQ මගින් $(4, 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී සෘජුකෝණයක් ආපාතනය වන පරිදි PQ ඡායා විචල්‍ය වේ නම්, PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

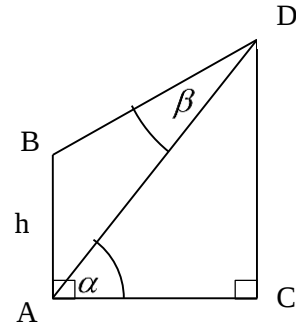
17. a. $3\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 2\cos 2x$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයිත්, $-\pi \leq x \leq \pi$ සඳහා $y = 3\cos^2 x - \sin^2 x$ හි ප්‍රස්ථාරයේ අක්ෂ හමුවන ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක දක්වමින් දළ සටහනක් අඳින්න.

b. සුපුරුදු අංකනයෙන් ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා වන සයින් සූත්‍රය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

උස h වන AB නම් කණුවක පතුලේ සිට බලන විට CD නම් කුළුණක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය α වේ. කණුව මගින් කුළුණ මුදුනේ ආපාතිත කෝණය β වේ.

$$AD = \frac{h \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$



ඒ නයිත්, කුළුණේ උස CD යන්න $CD = \frac{h \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන.

$$AB = AC \text{ නම්, } \tan \beta = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

c. $\sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 2)$ යන්න සපුරාලන x හි අගයයන් සොයන්න.



තෙවන වාර පරීක්ෂණය - 13 ශ්‍රේණිය - 2019

Third Term Test - Grade 13 - 2019

විභාග අංකය

සංයුක්ත ගණිතය II

කාලය පැය තුනයි

උපදෙස්

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.
 A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
 සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න.
 වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
 ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
- නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටසට B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාවේ පිටත භාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි

සංයුක්ත ගණිතය II		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිශතය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලකුණු	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ . 1	
2	
අධීක්ෂණය	

(A කොටස)

- 01) ස්කන්ධය m වන A නම් අංශුවක් සුමට තිරස් තලයක් මත u ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය මාර්ගයක චලනය වී ස්කන්ධය $2m$ වන B නම් සමාන අරය සහිත අංශුවක් සමඟ සරලව ගැටේ. අංශු දෙකෙහි ගැටුම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e නම් ගැටුමට පසු A හා B හි ප්‍රවේග ලබා ගන්න. A හි ප්‍රවේගය ප්‍රත්‍යාවර්තය වේ නම් $e > \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

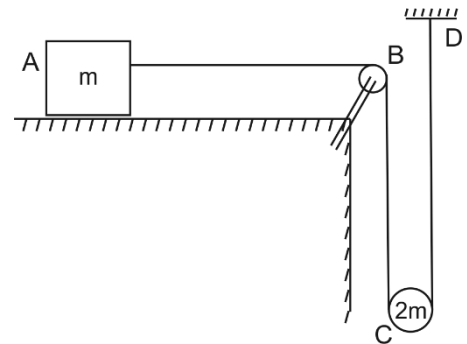
.....

.....

.....

.....

- 02) දී ඇති රූපයේ පෙනෙන පරිදි සුමට නොවන තිරස් මේස තලයක් මත ස්කන්ධය m වන A නම් ලී කුට්ටියක් තබා එයට ගැට ගැසූ ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මේස ගැට්ටේ සවිකළ B සුමට අවල කප්පියක් මතින් පන්නා තවත් C නම් ස්කන්ධය $2m$ වන සුමට සවල කප්පියක් යටින් පන්නා අනෙක් කෙළවර සිවිලිමක වූ අවල D ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා A කුට්ටිය ආරම්භයේදී අල්වා තබා සිරුවෙන් අතහැරිය විට A, B දෙසට චලනයවේ. A හා මේස තලය අතර සර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{4}$ වන අතර AB තන්තු කොටස තිරස්ව ද BC හා CD තන්තු කොටස් සිරස්ව ද වේ. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{3mg}{4}$ බව පෙන්වන්න.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

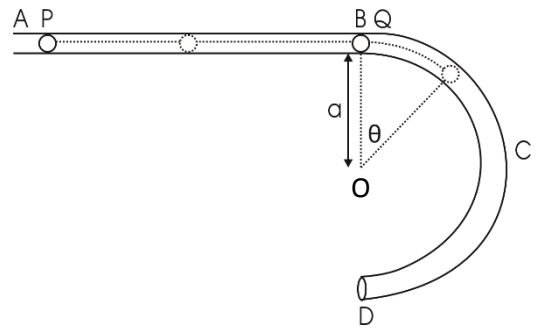
.....

.....

.....

.....

- 03) රූපයේ දැක්වෙන්නේ AB කොටස තිරස් හා BCD කොටස කේන්ද්‍රය O වූ අරය a වූ වෘත්තාකාර කොටසකින් ද සමන්විත සුමට පෘෂ්ඨ සහිත එකම සිරස් තලයක සවිකොට ඇති සිහින් නලයකි. ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m හා $2m$ බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙකක් දිග l වන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් ඇඳා, තන්තුව ඇඳි පවතින ලෙස P අංශුව AB අතරත් Q අංශුව B හිදීත් පිහිටන ලෙස තබා ඇත.



Q අංශුව දැන් P ගෙන් ඉවතට PQ දෙසට සිරුවෙත්

තල්ලු කරනු ලැබේ. Q අංශුව BCD වෘත්තාකාර නලය තුළ OB උඩු සිරස් සමඟ θ සුළු කෝණයක් තනන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය $a\dot{\theta}$ නම් $(a\dot{\theta})^2 = \frac{4}{3} ag(1 - \cos\theta)$ යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

එනමින් $\theta = \frac{\pi}{3}$ දී Q අංශුවේ ත්වරණය $\frac{g}{3}\sqrt{7}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 04) සුමට නොවන තිරස් තලයක් මත a පරතරයකින් වූ A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක් මත P හා Q නම් අංශු දෙකක් තබා ඇත. P හා Q එකිනෙක හමුවන පරිදි පිළිවෙලින් $2u$ හා $4u$ ප්‍රවේග වලින් A හා B ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව දිගේ ප්‍රක්ෂේප කෙරේ. එක එකක් අංශු හා තිරස් තලය අතර, සමාන μ සර්ෂණ සංගුණක පවතින අතර ඒවා එක එකක් μg මන්දන සහිතව චලනය වේ. අංශු දෙක AB අතර මැද ලක්ෂ්‍යයක දී යන්තම් හමුවේ නම් P හා Q හි චලිත නිරූපණය කරන ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්ථාර එකම සටහනක අඳින්න. එනමින් $\mu = \frac{10u^2}{ag}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 05) තිරසර 30^0 ක ආනතියක් සහිත තලයක ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් M සහිත කි.වොට්. H ජවයෙන් ක්‍රියා කරන දුම්ඊය එන්ජිමක් සමාන ස්කන්ධයක් සහිත මැදිරියක් ඇඳගෙන එක එකක් මත සමාන නිව්ටන් R ප්‍රතිරෝධය සහිතව තලයේ වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව දිගේ ඉහළට තත්පරයට මීටර් V නියත ප්‍රවේගයෙන් චලනය වේ. $R = \left(\frac{H - MgV}{2V} \right) \times 10^3 \text{ N}$ බව පෙන්වන්න.

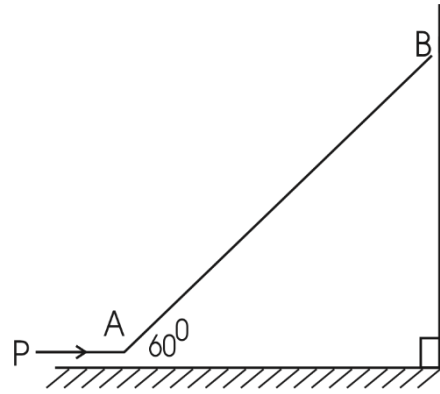
හදිසියේ මැදිරිය එන්ජිමෙන් වෙන්වූයේ නම්, එන්ජිම එම ජවයෙන්ම ක්‍රියා කරයිනම් ද එන්ජිම හදිසි ගැස්සීමකින් තොරව ගමන් කරයි නම් ද, දුම්රිය එන්ජිම ලබා ගන්නා ත්වරණය තත්පර වර්ගයට මීටර් $\frac{H}{2MV}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

[illegible]

- 06) $\underline{a} = i + 7j$ ද $\underline{b} = p i + q j$ ද වේ. $q < 0$ වේ. p හා q තාත්වික නියත වේ. $|\underline{b}| = 2$ සහ $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ එකිනෙකට ලම්භක නම් p හා q හි අගය සොයන්න. මෙහි i හා j සඳහා සුපුරුදු අර්ථ ඇත.

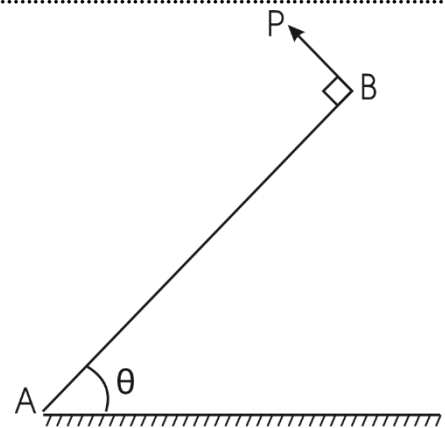
[illegible]

- 07) බර w ද, දිග $2a$ ද වූ AB ඒකාකාර ඉනිමගක් A කෙළවර සුමට තිරස් බිමක් මත ද, B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට ද එරෙහිව තිරසර්ව 60° කෝණයක් ආනතව සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ A හිදී ඉනිමග මත යෙදූ P තිරස් බලයක් මගිනි. A කෙළවරේ සිට බර w වූ ළමයෙකු ඉනිමග දිගේ නැගීමට පටන් ගනී. B කෙළවරෙහි ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලතම අගය $\frac{5w}{4\sqrt{3}}$ නම් ළමයාට ඉනිමග දිගේ යා හැකි උපරිම දුර A සිට $\frac{3a}{2}$ බව පෙන්වන්න.



- 08) A කෙළවර සිට $1:3$ අනුපාතයට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටන බර w වූ ඒකාකාර නොවූ AB දණ්ඩක A කෙළවර රළු තිරස් පොළවක් මත පවතින සේ තිරසර θ කෝණයකින් ආනතව සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, B කෙළවරින් දණ්ඩට ලම්භව යෙදූ P බලයක් මඟිනි. (යාබද රූපය බලන්න.) දණ්ඩ හා P බලය එකම සිරස් තලයක වේ. බිම හා දණ්ඩ අතර සර්භ්ෂණ සංගුණකය μ නම්,

$$\mu \geq \frac{\cos \theta \sin \theta}{4 - \cos^2 \theta} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$



09) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයේ සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු.

$P(A'/B) = \frac{3}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(B) = a$ බව දී ඇත. $P(A) = \frac{3}{4} - \frac{3}{10}a$ බව පෙන්වන්න.

$P(A \cap B') = \frac{1}{2} P(A \cap B)$ නම් $a = \frac{5}{9}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10) 2, 4, 5, p , q , 12, 13, 14 යන පූර්ණ සංඛ්‍යා අට ආරෝහණ පිළිවෙලට ලියා දක්වා ඇත. එම සංඛ්‍යාවල මධ්‍යන්‍යය q නම් p හා q වල අගය සොයා, මධ්‍යන්‍යය අපගමනය $\frac{15}{4}$ බව පෙන්වන්න.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

සංයුක්ත ගණිතය 13 - II (B කොටස)

- 11) (a) කාලතුවක්කු ක්‍රියා කරවන නිලධාරියෙක් සිය තුවක්කුවෙන් තිරසර θ කෝණයකින් ආනතව u ප්‍රවේගයෙන් ස්කන්ධය m වූ උණ්ඩයක් පිට කරනු ලබන්නේ ප්‍රක්ෂේපණ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන තිරස් තලය මත R පරාසයකින් පිහිටි ඉලක්කයක් අරමුණු කරගෙන වේ.

නමුත් ප්‍රක්ෂේප කළ ක්ෂණයකින් සිය ඉලක්කය $\frac{R}{4}$ තිරස් දුරක් මෙපිටින් විය යුතු බව හඳුනා ගනී. විය හැකි අනතුර වළක්වා ගැනීම සඳහා ඔහු උපක්‍රමයක් භාවිතා කරයි. එනම් මෙම උණ්ඩය උපරිම උසෙහි පිහිටන අවස්ථාවේදීම, ඒ හා සරලව ගැටෙන ලෙස, සමාන ස්කන්ධයක් සහිත කාන්දම් උණ්ඩයක් පළමු උණ්ඩයෙහි උපරිම උස පිහිටීමට සිරස්ව පහළින් සවිකොට ඇති කාලතුවක්කුවකින් සිරස්ව ඉහළට ප්‍රක්ෂේපණය කොට ඉහත උණ්ඩය සමඟ ඇඳීමට සලස්වා එහි තිරස් ප්‍රවේගය අඩු කිරීමෙන් මුළු උණ්ඩයේ තිරස් පරාසය අඩු කිරීම වේ.

මුල් උණ්ඩය උපරිම උසට ළඟා වීමට ගතවන කාලය T යන්න $T = \frac{u \sin \theta}{g}$ යන්නෙන් ලැබෙන බව ද,

එනමින් මුල් උණ්ඩය තනිව ගමන් කළේ නම්, තිරස් පරාසය R යන්න, $R = \frac{2u^2}{g} \sin \theta \cos \theta$ බව ද පෙන්වන්න.

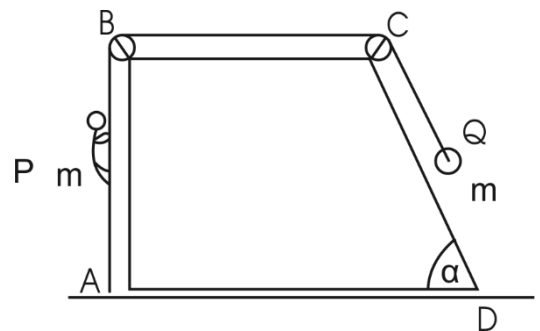
පළමු උණ්ඩය පිටකල මොහොතේදී ම දෙවන කාන්දම් උණ්ඩය පිට කිරීමට සංඥාව නිකුත් කළ හැකි වුණි නම් දෙවන උණ්ඩයේ ආරම්භක ප්‍රවේගය $u \sin \theta$ ම වන බව පෙන්වන්න. අනතුරුව පළමු උණ්ඩය සමඟ ගැටී යාවීමෙන් තැනෙන සංයුක්තයේ තිරස් ප්‍රවේගය, මුල් උණ්ඩයේ තිරස් ප්‍රවේගයෙන් හරිඅඩකට අඩුවන බවත් මුලු තිරස් පරාස $\frac{R}{4}$ කින් අඩුවන බවත් පෙන්වන්න.

මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

- (b) S නැවක් නැගෙනහිරින් උතුරට 60° ආනත දිශාවක් ඔස්සේ නියත u ප්‍රවේගයෙන් යාත්‍රා කරයි. v ($v > u$) උපරිම ප්‍රවේගයක් සහිත මුර සංචාරක බෝට්ටුවක රේඩාර් තිරයෙහි එක්තරා මොහොතක දී ඉහත නැව d දුරක් නැගෙනහිරින් දිස්වේ. බෝට්ටුවට නැව හමුවීම සඳහා $\frac{d[\sqrt{4v^2 - 3u^2} + u]}{2(v^2 - u^2)}$ ක කාලයක් නැගෙනහිරින් උතුරට, $\frac{\pi}{3} - \alpha$ කෝණයක් ආනත දිශාවක් ඔස්සේ ගමන් කල යුතු බව පෙන්වන්න.

මෙහි $\alpha = \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3}(v^2 - u^2)}{v[\sqrt{4v^2 - 3u^2} + u]} \right\}$

- 12) (a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ ස්කන්ධය M වන සුමට මුහුණත් සහිත කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස්කඩකි. මෙහි පිළිවෙලින් AB සිරස් වන අතර BC හා AD තිරස් හා CD යනු තිරසර α කෝණයක් ආනත, මුහුණත් වේ. AD සුමට තිරස් මතුපිටක් මත වලනයට නිදහස්ය. B හා C හිදී සවිකොට ඇති සුමට අවල කප්පි දෙකකි. ලුහු අවිතරා තන්තුවක එක් කෙළවරකට ස්කන්ධය m වන අංශුවක් ඇඳා එය CD මුහුණත මත පිහිටන ලෙස තබා තන්තුව C හා B හි වූ කප්පි මතින් පන්තා අනෙක් කෙළවර, A හි වන ලෙසද තන්තු කොටස සිරස්ව පහළට එල්ලෙමින් BA ට සමාන්තරව තිබෙන පරිදි පද්ධතිය රඳවා තබාගෙන ඇති අතර ස්කන්ධය m වූ වදුරෙක් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භව $\frac{g}{2}$ ඒකාකාර ත්වරණයක් සහිතව තන්තුව දිගේ ඉහළ නගින ලෙස පද්ධතිය චලිතයට නිදහස් කරයි.



P වදුරාට AB දෙසටත් Q අංශුවට DC දෙසටත් පද්ධතියට AD දෙසටත් චලිත සමීකරණ යොදමින් පොළොවට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤය $\frac{mg \cos \alpha (3 - 2 \sin \alpha)}{2[2M + 4m - m \cos^2 \alpha]}$ විශාලත්වයෙන් යුතු ත්වරණයක් සතුව AD දෙසට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

Q අංශුව, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව $\frac{(M+2m)g(3-2\sin\alpha)}{2[2M+4m-m\cos^2\alpha]}$ විශාලත්වයෙන් යුතු ත්වරණයක් සතුව තලය දිගේ DC දෙසට චලනය වන බවත් පෙන්වන්න.
මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

- (b) අරය a වන කේන්ද්‍රය O වන සුමට සිහින් වෘත්තාකාර කම්බියක් සිරස් තලයක වන ලෙස සවිකොට ඇත. ස්කන්ධය m , වන කම්බිය තුළ නිදහසේ සර්පණය විය හැකි සුමට P නම් පබළුවක් වෘත්තාකාර කම්බිය තුළින් යවා, එය කම්බියේ පහළම ලක්ෂ්‍යයේ රඳවා තබා ඒ මත තිරස් u ප්‍රවේගයක් ලබා දීමෙන් පබළුව සිරස් වෘත්තාකාර මාර්ගයක චලනය වීමට සලස්වයි. පබළුව O හරහා යන යටි අත් සිරස සමඟ θ සුළු කෝණයක් තනන විට එහි ප්‍රවේගය v යන්න $v^2 = u^2 + 2gac\cos\theta - 2ga$ මගින් ද පබළුව මත වෘත්තාකාර කම්බිය මගින් ඇති කරනු ලබන ප්‍රතික්‍රියාව, R යන්න, $R = \frac{m}{a}(u^2 + 3gac\cos\theta - 2ga)$ මගින් ද ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

වලිතයේදී පබළුවට සිය ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව වෙනස් නොකොට පූර්ණ වෘත්තයම ගෙවා යාම සඳහා $u^2 > 5ga$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

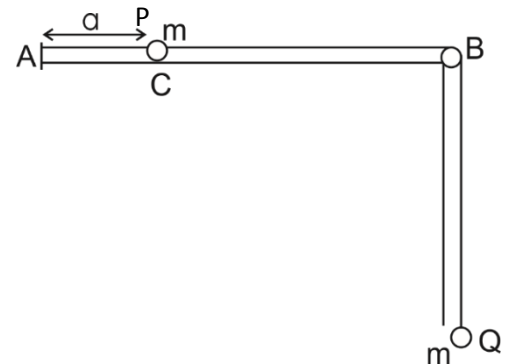
දැන් ඉහත කම්බිය තුළට තවත් සමාන Q පබළුවක් යවා එය කම්බියේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයේ ද මුල් P පබළුව පහළම ලක්ෂ්‍යයේ ද පවතින ලෙස රඳවා තබා පහළම පබළුව $\sqrt{10ag}$ තිරස් ප්‍රවේගයෙන් ද ඉහළම පබළුව සිරුවෙන්ද චලනය කරනු ලබන්නේ, P හා Q පබළු දෙකම O හරහා යන තිරස් මට්ටමේ දී එකට ගැටී එකට යාම් සංයුක්ත අංශුව කම්බිය දිගේ ඉහළට ගමන් කරන ලෙසය. P හා Q එක එකක් පබළුවල O හරහා යන තිරස් මට්ටමේදී ප්‍රවේග ද, සංයුක්තයේ ප්‍රවේගය ද සොයන්න.

සිරස් වෘත්තාකාර මාර්ගයේ චලනය වන සංයුක්ත පබළුව O හරහා යන උඩු සිරස $\cos^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ කෝණයක් තනන විට සංයුක්ත පබළුව මත ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව මාරුවන බව පෙන්වන්න.

මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

13)

රූපයේ පෙනෙන පරිදි වූ රළු තිරස් මතුපිටක් සහිත මේසයක ගැට්ටෙහි සුමට අවල B කප්පියක් සවිකොට ඇත. සැහැල්ලු අවිභ්‍යාස තන්තුවක දෙකෙළවරට ස්කන්ධය m බැගින් වූ P හා Q අංශු දෙක අමුණා තන්තුව B කප්පිය උඩින් පන්නා P අංශුව මේසය මතත් Q අංශුව නිදහසේ එල්ලෙමින් පවතින ලෙසත් අල්වා තබා P අංශුව ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය mg හා ස්වභාවික දිග a වූ ප්‍රත්‍යස්ත තන්තුවක එක් කෙළවරකට ද, අනෙක් කෙළවර මේස මත වූ අවල A ලක්ෂ්‍යයකට ද ඇදා, ආරම්භයේ දී P අංශුව A හි තබා සිරුවෙන් අත හරිනු ලබේ. P අංශුව මේස තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{6}$ නම්, තන්තුව ල



AP, PB කොටස් තිරස් ද, BQ කොටස සිරස් ද නම්, P අංශුව $\frac{5g}{12}$ නියත ත්වරණයක් සහිතව $\sqrt{5ag/6}$ ප්‍රවේගයකින් A සිට a දුරින් මේසය මත වූ C ලක්ෂ්‍යය කරා එල්ලෙමින් බව පෙන්වන්න. පසුව ඇතිවන චලිතය C ලක්ෂ්‍යයේ සිට තිරස් විස්ථාපනය x විට එය $\ddot{x} + \frac{9}{2a}\left(x - \frac{5a}{6}\right) = 0$ තෘප්ත කරන සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වා එහි කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම හා විස්ථාරය සොයා, P අංශුව මේස ගැට්ටෙන් ඉවත් නොවේ නම්, $AB > \frac{a}{6}(11 + \sqrt{85})$ බව පෙන්වන්න.

P අංශුව ඝණික නිශ්චලතාවයට පත්වීමට චලිතය ආරම්භයේ සිට $\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\sqrt{\frac{6}{5}} + \pi - \cos^{-1}\sqrt{\frac{5}{17}}\right\}$ කාලයක් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

P අංශුවේ ආපසු චලිතය C ලක්ෂ්‍යයේ සිට තිරස් විස්ථාපනය y විට එය, $\ddot{y} + \frac{9}{2a} \left(y - \frac{7a}{6} \right) = 0$ තෘප්ත කරන සරල අනුවර්තී චලිතයක් බව පෙන්වා, කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම හා විස්ථාරය සොයා, අවසානයේ දී ප්‍රත්‍යස්ථ තත්ත්ව හැකිලෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි g යනු ගුරුත්වජ ත්වරණයයි.

- 14) (a) O මූලයකට අනුබද්ධව A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ වේ. C යනු ,
 $\overrightarrow{OC} = 3\underline{a} + 2\underline{b}$ පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. D යනු $BD = \frac{3}{4} BC$ වන සේ BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

$$\overrightarrow{OD} = \frac{9\underline{a} + 7\underline{b}}{4} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

OD හා AB සරල රේඛා E හිදී හමුවේ.

$$\overrightarrow{EB} = \underline{b} - \lambda \left(\frac{9\underline{a} + 7\underline{b}}{4} \right) \text{ බව පෙන්වන්න. } \lambda \text{ යනු අදිශයකි.}$$

$\overrightarrow{EB}$ සඳහා තවත් ප්‍රකාශනයක් ලබාගෙන λ හි අගය සොයන්න.

$BE : EA$ අනුපාතය සොයන්න.

- (b) $AB = 8a$ ද $BC = 6a$ ද වන $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයක AB, BC, CD හා DA පාද වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් K, L, M හා N වේ. විශාලත්ව නිව්ටන් 11, $Q, 13, P, 15, 10$ හා 20 බල හතක් අකුරුවල පටි පාටියෙන් දැක්වෙන දිශා ඔස්සේ පිළිවෙලින් AB, BC, DC, KL, LM, MN හා KN දිගේ ක්‍රියා කරයි.

i. පද්ධතිය සමතුලිත නොවන බව පෙන්වන්න.

ii. පද්ධතිය යුග්මයකට පමණක් කුලය වේ නම් P හා Q හි අගය සොයන්න.

iii. පද්ධතිය $\overrightarrow{AD}$ දිශාවට සමාන්තර දිශාවකට ක්‍රියා කරන $12N$ ක බලයකට කුලය නම් P හා Q හි අගය සොයන්න.

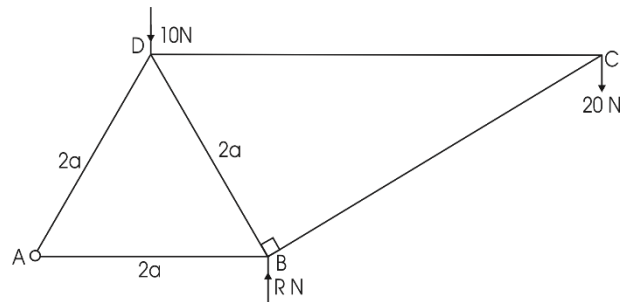
- 15) (a) බර w හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB හා BC දඬු දෙකක් B හිදී අසව් කර A හා C කෙළවර රළු තිරස් බිමක් මත තබා ඇත. දඬු දෙක සිරස් තලයක පිහිටන අතර එක් එක් දණ්ඩ තිරස් සමඟ 60° කෝණ සාදයි. BC දණ්ඩ මත B සිට $\frac{a}{2}$ දුරින් බර $2w$ වූ අංශුවක් සවිකර ඇත. පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ ඇත. දඬු හා බිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ නම්, A හා C කෙළවරවල සමතුලිතතාවය සඳහා $\mu \geq \frac{5}{7\sqrt{3}}$ හා $\mu \geq \frac{5}{9\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

- (b) යාබද රූපයෙහි පෙන්වා ඇති පරිදි රාමු සැකිල්ල AB, BC, CD, AD හා BD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත.

$$AB = AD = BD = 2a \text{ හා } \angle CBD = 90^\circ$$

බව දී ඇත. C හි නිව්ටන් 20 ක භාරයක් එල්ලා ඇති අතර B හා D හිදී පිළිවෙලින් රූපයේ දක්වා ඇති දිශාවලට නිව්ටන් R හා නිව්ටන් 10 සිරස් බල දෙකක් යොදා AB හා

DC දඬු තිරස් වන පරිදි A හිදී අවලව් අසව් කර සිරස් තලයක රාමු සැකිල්ල සමතුලිතව තබා ඇත. R හි අගය සොයන්න.



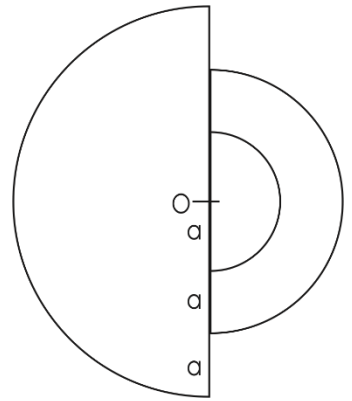
බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ ඒනයිත් දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා, මෙම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.

16)

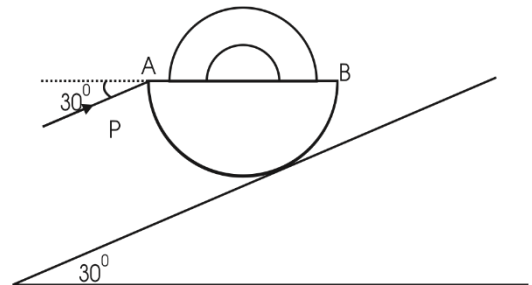
අරය a වූ ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය තල ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට එහි සමමිති අක්ෂය මත $\frac{3a}{8}$ දුරකින් බව පෙන්වන්න.

අරය $2a$ ඝනත්වය ρ වූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින් අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ.

අනතුරුව යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ඉතිරි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණත අරය $3a$ හා ඝනත්වය $k\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක වෘත්තාකාර මුහුණත සවිකරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිති අක්ෂ දෙක සමපාත වන පරිදිය. මෙලෙස සාදා ගනු ලබන R වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි සමමිති අක්ෂය මත O සිට $\left| \frac{9a(5-27K)}{8(27K+7)} \right|$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.



මෙම R වස්තුව එහි විශාල අර්ධගෝලීය කොටසේ චක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් මේසයක් මත ස්පර්ශව සමතුලිතව පවති නම් $K = \frac{5}{27}$ බව පෙන්වන්න.



අනතුරුව රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරසර 30° ආනත රළු තලයක් මත R ඝන වස්තුවේ විශාල අර්ධ ගෝලීය කොටසේ චක්‍ර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වන සේ තබා AB තිරස් වන සේ A හිදී ආනත තලයට සමාන්තරව P බලයක් යොදනු ලැබේ. වස්තුව සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී.

එම චක්‍ර පෘෂ්ඨය හා ආනත තලය අතර සර්ෂණ සංගුණකය μ නම් $\mu = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ බව පෙන්වන්න.

- 17) (a) භාජනයක සර්වසම සුදු බෝල 7 ක් ද කළු බෝල 3 ක් ද ඇත. 'විභග' සසම්භාවී ලෙස භාජනයෙන් බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ. එම බෝලය සුදු නම්, අමතර සුදු බෝල n ගණනක් හා කළු බෝල 1 ක් ද, එම ඉවතට ගත් බෝලය ද සමග ආපසු භාජනයට දමනු ලැබේ. ඉවතට ගත් බෝලය කළු නම් එම බෝලය නැවත භාජනයට දමනු නොලැබේ. අනතුරුව ඔහු සසම්භාවී ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය රහිතව අනුක්‍රමිකව තවත් බෝල 2 ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

දෙවනුව ගත් බෝලය සුදු බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{11}{15}$ නම්, n හි අගය සොයන්න.

දෙවන බෝලය සුදු බෝලයක් බව දී ඇති විට තුන්වන බෝලය කළු බෝලයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

- (b) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ යන දත්ත කුලකයක මධ්‍යන්‍යය $\bar{x}$ හා සම්මත අපගමනය σ_x අර්ථ දක්වන්න. $i = 1, 2, 3, \dots, n$ සඳහා $y_i = ax_i + b$ ලෙස x_i දත්ත y_i ලෙස පරිමාංකනය කරනු ලැබේ. එවිට එම දත්ත වල මධ්‍යන්‍ය $\bar{y}$ හා සම්මත අපගමනය σ_y ලෙස ගනිමු.

(i) $\bar{y} = a\bar{x} + b$ හා

(ii) $\sigma_y = |a|\sigma_x$ බව පෙන්වන්න.

එක්තරා පාසලක 11 ශ්‍රේණිය වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිතය විෂය සඳහා ලබා ගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 60ක් වේ. මෙම ලකුණු මධ්‍යන්‍යය 75 වන ලෙස පරිමාංකනය කළ යුතුව ඇත. පරිමාණගත ලකුණු 91 ක් වූ සිසුවෙකුගේ මුල් ලකුණ 72 ක්වේ. මෙම ලකුණු සඳහා,

(i) රේඛීය පරිමාණය සොයන්න.

(ii) මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය 12 ක් නම්, පරිමාණගත සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(iii) සිසුවෙකු ලබාගත් මුල් ලකුණ t ඉහත පරිමාණගත කිරීමෙන් 79 ට වැඩි නොවේ නම්, $t \leq 63$ බව පෙන්වන්න.

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics I - Part A - Grade 13

①

Combined Mathematics I

Grade 13

Third term test - 2019

PART A

01. When $n=1$

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \frac{1}{2} & \text{RHS} &= 1 - \frac{1}{2} \\ & & &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

$\therefore$ The result is true for $n=1$ (5)

Take any $p \in \mathbb{Z}^+$ and assume that the result is true for $n=p$

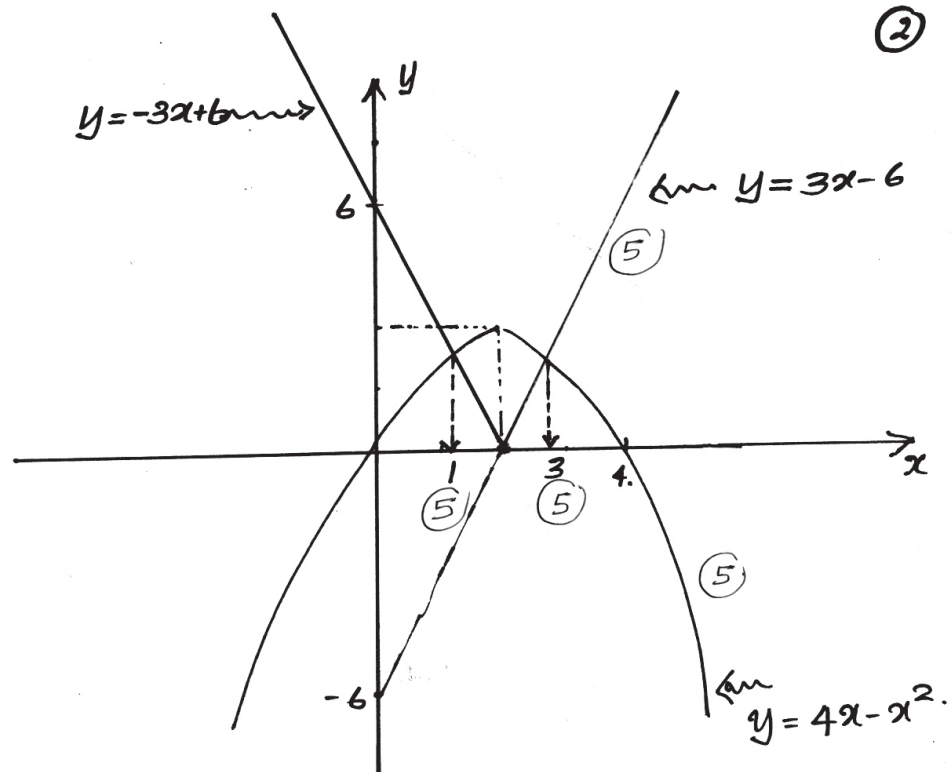
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^p} \rightsquigarrow \textcircled{1} \textcircled{5}$$

When $n=p+1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} &= 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} \\ &\textcircled{5} \\ &= 1 - \frac{1}{2^p} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{p+1}} \textcircled{5} \\ &\underline{\underline{\textcircled{5}}} \end{aligned}$$

Hence, if the result is true for $n=p$, then it is also true for $n=p+1$. therefore by the principle of mathematical induction the result is true for all $n \in \mathbb{Z}^+$.

02)



$$-3x + 6 = 4x - x^2$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x - 6)(x - 1) = 0$$

$$x = 6 \text{ or } x = 1$$

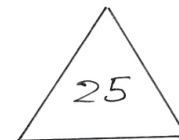
$$3x - 6 = 4x - x^2$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x = 3 \text{ or } x = -2$$

$$\underline{\underline{x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)}} \quad (5)$$



(3)

03. $x^4 - 1 = 0$

$$x^4 = 1$$

$$x^4 = (\cos 0 + i \sin 0) \quad (5)$$

$$x_1 = (\cos 0 + i \sin 0)^{1/4}$$

$$= \cos 0 + i \sin 0$$

$$x_1 = 1 \quad (5)$$

$$x_2 = (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)^{1/4}$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= i \quad (5)$$

$$x_3 = (\cos 4\pi + i \sin 4\pi)^{1/4}$$

$$= \cos \pi + i \sin \pi$$

$$= -1 \quad (5)$$

$$x_4 = (\cos 6\pi + i \sin 6\pi)^{1/4}$$

$$= \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$= -i \quad (5)$$

$\therefore$ The roots are 1, i, -1, -i



(4)

$$b4) \left(\frac{7}{6x} - \frac{6x}{7} \right)^{13}$$

$$\begin{aligned} T_{r+1} &= {}^{13}C_r \left(\frac{7}{6x} \right)^{13-r} \left(-\frac{6x}{7} \right)^r \\ &= {}^{13}C_r \left(\frac{7}{6} \right)^{13-2r} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{13-2r} (-1)^r \\ &= {}^{13}C_r \left(\frac{7}{6} \right)^{13-2r} (x)^{2r-13} (-1)^r \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i. \quad x &\leadsto 2r-13=2m ; m \in \mathbb{Z} \\ r &= m + \frac{13}{2} \quad (5) \\ &\# \end{aligned}$$

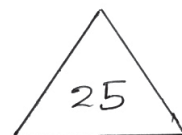
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\leadsto 13-2r=2n \quad n \in \mathbb{Z} \\ r &= \frac{13}{2} - n \quad (5) \\ &\# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad 13-2r &= 1 \\ 2r &= 6 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{Coefficient of } \frac{1}{x} = {}^{13}C_6 (-1)^6 \left(\frac{7}{6} \right)$$

$$= 1716 \times \frac{7}{6}$$

$$= \underline{\underline{2002}} \quad (5)$$



05)

$$x \xrightarrow{\lim} \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{x - \frac{\pi}{4}} \right\} \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{\lim} \frac{\pi}{4} \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x)}{x - \frac{\pi}{4}} \quad (5)$$

$$x \xrightarrow{\lim} \frac{\pi}{4} \frac{-\cos 2x}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\text{Let } x - \frac{\pi}{4} = \theta. \quad (5)$$

$$\theta \xrightarrow{\lim} 0 \cdot \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + 2\theta)}{\theta} \cdot x \xrightarrow{\lim} \frac{\pi}{4} (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\theta \xrightarrow{\lim} 0 \quad (5) \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right) \times 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 \quad (5)$$

$$1 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2$$

$$\underline{\underline{2}}$$



⑥

$$\begin{aligned}
 06) \quad A_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 -x e^{2x} dx \\
 &= \int_0^{-\frac{1}{2}} x \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) dx \\
 &= \left\{ \frac{x e^{2x}}{2} \right\}_0^{-\frac{1}{2}} - \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{2x}}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-1} \right\} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)_0^{-\frac{1}{2}} \\
 &= -\frac{1}{4} e^{-1} - \frac{1}{4} (e^{-1} - 1) \\
 &= -\frac{1}{4e} - \frac{1}{4e} + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} \\
 &= \frac{e-2}{4e} \rightarrow \textcircled{1} \quad \textcircled{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx \\
 &= \left\{ \frac{x e^{2x}}{2} \right\}_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (e^{2x})_0^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} e - \frac{1}{4} e + \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \rightarrow \textcircled{3} \quad \textcircled{10}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}/\textcircled{3} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{e-2}{4e} \times \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_1 : A_2 = (e-2) : e}} \quad \textcircled{5}$$



$$07) \quad x = (t+1)^2$$

$$y = \frac{1}{2}t^3 + 3$$

(7)

$$\frac{dx}{dt} = 2(t+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}t^2 \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

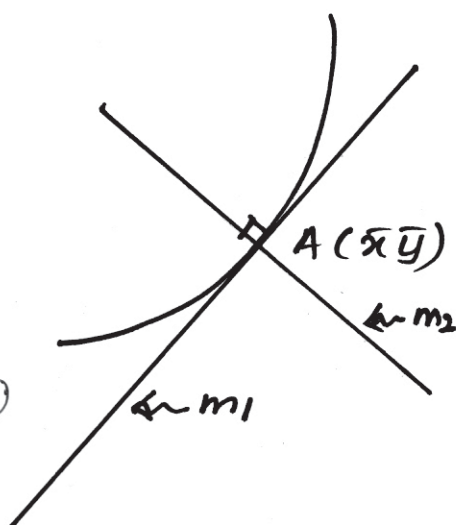
$$= \frac{3t^2}{4(t+1)} \quad (5)$$

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=2} = \frac{3 \times 4}{4 \times 3} = 1 \quad (5)$$

$$m_1 m_2 = -1$$

$$1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = -1$$



$$\begin{aligned} \bar{x} &= (2+1)^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{2} \times 8 + 3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$\therefore$ Equation of the normal

$$A \equiv (9, 7) \quad (5)$$

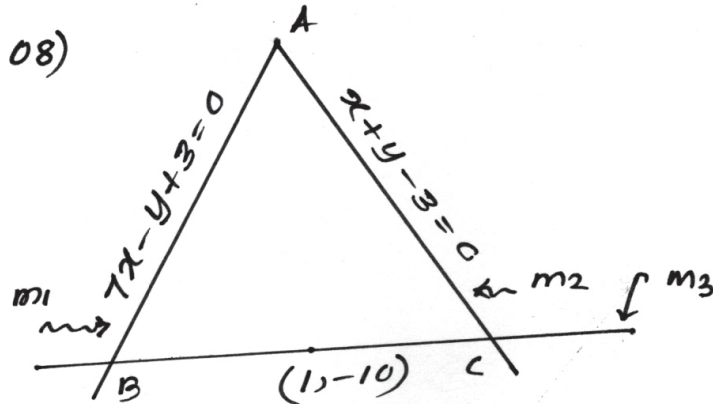
$$\frac{y-7}{x-9} = -1$$

$$y-7 = -x+9$$

$$\underline{\underline{y+x-16=0}} \quad (5)$$



(8)



$$7x - y + 3 = 0$$

$$y = 7x + 3 \rightarrow m_1 = 7$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$y = -x + 3 \rightarrow m_2 = -1$$

Since $AB = AC$, We have

$$\hat{A}BC = \hat{A}CB$$

$$\Rightarrow \left| \frac{m_3 - 7}{1 + 7m_3} \right| = \left| \frac{m_3 + 1}{1 - m_3} \right| \quad (5)$$

$$\left(\frac{m_3 - 7}{1 + 7m_3} \right) = \pm \left(\frac{m_3 + 1}{1 - m_3} \right)$$

$$\Rightarrow m_3 = \frac{1}{3} \text{ or } m_3 = -3 \quad (5)$$

$\therefore$ Equation of the line with $m = 3$ and Passing through the point $(1, -10)$ is

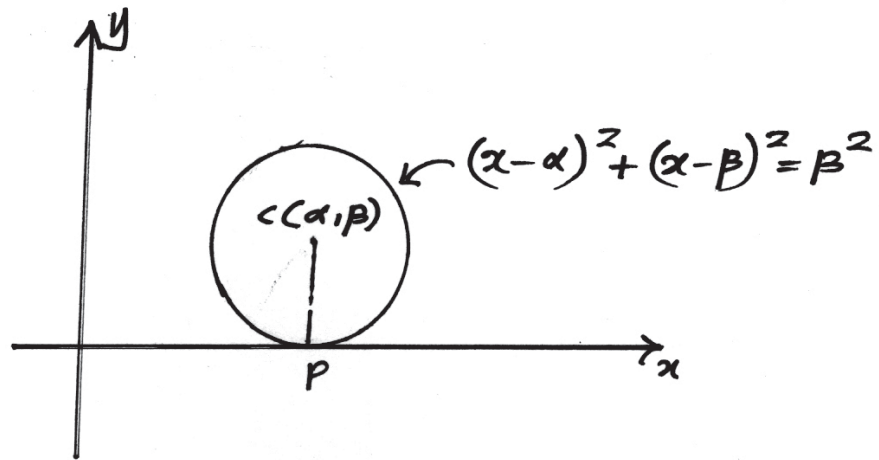
$$\frac{y + 10}{x - 1} = -3 \Rightarrow \underline{\underline{3x + y + 7 = 0}} \quad (5)$$

Equation of the line with $m = \frac{1}{3}$ and Passing through the point $(1, -10)$ is

$$\frac{y + 10}{x - 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x - 3y - 31 = 0}} \quad (5)$$



09)



Since it passes through (2, 2)

$$(2-\alpha)^2 + (2-\beta)^2 = \beta^2$$

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 8}{4} \rightarrow \textcircled{1} \textcircled{5}$$

Since it passes through (9, 9)

$$(9-\alpha)^2 + (9-\beta)^2 = \beta^2$$

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 18\alpha + 162}{18} \rightarrow \textcircled{2} \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \quad \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 8}{4} = \frac{\alpha^2 - 18\alpha + 162}{18} \textcircled{5}$$

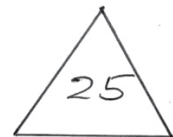
$$\alpha = \pm 6 \textcircled{5}$$

$$OP = \sqrt{(\alpha-0)^2 + (0-0)^2}$$

$$= |\alpha|$$

$$= |\pm 6|$$

$$= \underline{\underline{6}} \textcircled{5}$$



$$10) \quad \tan^2 x = \cot^2 x - 4 \cot 2x$$

$$\cot^2 x - \tan^2 x = 4 \cot 2x$$

$$\frac{1}{\tan^2 x} - \tan^2 x = \frac{4}{\tan 2x}$$

$$\frac{1}{\tan^2 x} - \tan^2 x = \frac{4(1 - \tan^2 x)}{2 \tan x}$$

$$\frac{1 - \tan^4 x}{\tan^2 x} = \frac{4(1 - \tan^2 x)}{2 \tan x}$$

$$(1 - \tan^4 x) = 2(1 - \tan^2 x) \tan x$$

$$(1 - \tan^2 x)(1 + \tan^2 x - 2 \tan x) = 0$$

$$(1 - \tan^2 x)(\tan^2 x - 2 \tan x + 1) = 0$$

$$(1 - \tan^2 x)(\tan x - 1)^2 = 0 \quad (10)$$

$$\tan^2 x = 1 \quad \text{or} \quad \tan x = 1$$

$$\tan^2 x = \tan^2 \frac{\pi}{4} \quad \text{or} \quad \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (5) \quad \text{or} \quad x = n\pi + \frac{\pi}{4} \quad (5); n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}; n \in \mathbb{Z} \quad (5)}}$$



Third Term Test - 2019

Combined Mathematics I- Part B - Grade 13

11) a. i

$$f(x) = x^2 + (k+6)x + 6k$$

$$\Delta = (k+6)^2 - 4 \times 1 \times 6k \quad (10)$$

$$= k^2 + 12k + 36 - 24k$$

$$= k^2 - 12k + 36$$

$$= \underbrace{(k-6)^2}_{\geq 0} \quad (5)$$

$$\therefore \Delta \geq 0$$



$\therefore$ The equation has real roots (5)

$$\alpha + \beta = -(k+6) \quad (5)$$

$$\alpha\beta = 6k \quad (5)$$

$$\alpha^2 + 1 + \beta^2 + 1 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2$$

$$= (k+6)^2 - 12k + 2$$

$$= k^2 + 12k + 36 + 2 - 12k$$

$$= k^2 + 38 \quad (10)$$

$$(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2 + 1$$

$$= k^2 + 38 - 1 + (6k)^2$$

$$= k^2 + 37 + 36k^2$$

$$= 37(k^2 + 1) \quad (10)$$

$\therefore$ The equation, whose roots are

$\alpha^2 + 1, \beta^2 + 1$ is

$$\underline{x^2 - (k^2 + 38)x + 37(k^2 + 1) = 0.} \quad (5)$$



$$(11) f(x) = x^2 + (k+6)x + 6k$$

$$f(x-k) = (x-k)^2 + (k+6)(x-k) + 6k$$

$$= x^2 - 2kx + k^2 + kx - k^2 + 6x - 6k + 6k$$

$$= x^2 - kx + 6x$$

$$= x^2 - (k-6)x. \quad (10)$$

$$f(x-k) - 2x = x^2 - (k-6)x - 2x$$

$$= x^2 - kx + 6x - 2x$$

$$= x^2 - kx + 4x$$

$$= x^2 + (4-k)x. \quad (5)$$

$$f(x-k) - 2x = 0$$

$$x^2 + (4-k)x = 0$$

$$\text{When } k=0$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ or } x=-4 \quad (5)$$

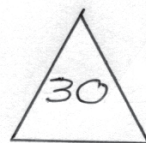
$$\therefore \underline{k=0} \quad (5)$$

$$\text{When } k=0$$

$$f(x-k) - 2x = x^2 + 4x.$$

$$= (x+2)^2 - 4 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \underline{\{f(x-k) - 2x\}_{\min} = -4} \quad (5)$$



b) Since $(2x+1)$ is a factor of $f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = (2x+1)(ax+b) \quad (10)$$

$$f(1) = -3 \quad f(-1) = 3$$

$$3(a+b) = -3 \quad -1(-a+b) = 3$$

$$a+b = -1 \rightsquigarrow (1) \quad (5) \quad -a+b = -3 \rightsquigarrow (2)$$

$$(1) + (2) \quad 2b = -4$$

$$\underline{b = -2} \quad (5)$$

Substitute $b = -2$ in (1)

$$a - 2 = -1$$

$$\underline{a = 1} \quad (5)$$

$$\therefore \underline{f(x) = (2x+1)(x-2)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x+1)(x-2)(x^2+cx+d) \\ &= (x+1)^2(2x^2+ex+f) + 39x+21 \quad (10) \end{aligned}$$

$$x^3 \rightsquigarrow 2c-3 = e+4$$

$$2c-e = 7 \rightsquigarrow (1)$$

$$x^2 \rightsquigarrow 2d-3c-2 = f+2e+2$$

$$2d-3c-f-2e = 4 \rightsquigarrow (2)$$

$$x \rightsquigarrow -3d-2c = 2f+e+39 \quad (10)$$

$$3d+2c+2f+e = -39 \rightsquigarrow (3)$$

$$\text{Constant} \rightsquigarrow -2d = f+21$$

$$f+2d = -21 \rightsquigarrow (4)$$

$$(2) - (1) \times 2 ;$$

$$2d-3c-f-2e-4c+2e = 4-14$$

$$2d-7c-f = -10 \rightsquigarrow (A)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{3} \quad 3d + 4c + 2f = -32 \rightsquigarrow \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \rightsquigarrow 2d - 7c + 2d + 21 = -10$$

$$4d - 7c = -31 \rightsquigarrow \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B} \rightsquigarrow 3d + 4c - 4d - 42 = -32$$

$$-d + 4c = 10 \rightsquigarrow \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C} + \textcircled{D} \times 4 ;$$

$$-7c + 16c = -31 + 40$$

$$9c = 9$$

$$\underline{\underline{c = 1}}$$

$$\textcircled{D} \rightsquigarrow -d + 4 = 10 \quad \textcircled{5}$$

$$\underline{\underline{d = -6}}$$

$$\therefore g(x) = (2x+1)(x-2)(x^2+x-6)$$

$$= (2x+1)(x-2)^2(x+3) \quad \textcircled{5}$$



12) a.

A(6)	B(3)	C(3)	
2	1	3	$\rightsquigarrow \textcircled{A}$
2	2	2	$\rightsquigarrow \textcircled{B}$
2	3	1	$\rightsquigarrow \textcircled{C}$
1	2	3	$\rightsquigarrow \textcircled{D}$
1	3	2	$\rightsquigarrow \textcircled{E}$

(20)

$$\textcircled{A} \Rightarrow {}^6C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_3 = 45 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{B} \Rightarrow {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 = 135 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{C} \Rightarrow {}^6C_2 \times {}^3C_3 \times {}^3C_1 = 45 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{D} \Rightarrow {}^6C_1 \times {}^3C_2 \times {}^3C_3 = 18 \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{E} \Rightarrow {}^6C_1 \times {}^3C_3 \times {}^3C_2 = 18 \quad \textcircled{5}$$

Total no.
of ways = 261 $\textcircled{5}$



$$b. (2r+1)^2 - (2r-1)^2 = 8r$$

$$\text{let } F(r) = (2r+1)^2 \text{ and } u_r = r$$

$$F(r) - F(r-1) = 8u_r$$

$$r=1 \quad F(1) - F(0) = 8u_1$$

$$r=2 \quad F(2) - F(1) = 8u_2$$

$$r=3 \quad F(3) - F(2) = 8u_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r=n-1 \quad F(n-1) - F(n-2) = 8u_{n-1}$$

$$r=n \quad F(n) - F(n-1) = 8u_n.$$

$$F(n) - F(0) = 8 \sum_{r=1}^n u_r.$$

$$8 \sum_{r=1}^n u_r = (2n+1)^2 - 1^2$$

$$= 4n^2 + 4n + 1 - 1$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = \frac{4n(n+1)}{8} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (20)$$

$$\{r(r+1)\}^2 - \{r(r-1)\}^2 = 4r^3$$

$$\text{Let } f(r) = \{r(r+1)\}^2 \text{ and } u_r = r^3$$

$$F(r) - F(r-1) = 4u_r$$

$$r=1 \quad F(1) - F(0) = 4u_1$$

$$r=2 \quad F(2) - F(1) = 4u_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r=n-1 \quad F(n-1) - F(n-2) = 4u_{n-1}$$

$$r=n \quad F(n) - F(n-1) = 4u_n.$$

$$F(n) - F(0) = 4 \sum_{r=1}^n u_r.$$

$$\{n(n+1)\}^2 - 0^2 = 4 \sum_{r=1}^n u_r$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (20)$$

$$u_r = \frac{\sum_{k=1}^r k}{\sum_{k=1}^r k^3} = \frac{k(r+1)}{2} \times \frac{4}{r^2(r+1)^2}$$

$$u_r = \frac{2}{r(r+1)} \quad (21)$$

$$u_r = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$$

$$\text{Let } f(r) = \frac{2}{r} \quad (22) \text{ then } f(r+1) = \frac{2}{r+1}$$

$$u_r = f(r) - f(r+1)$$

$$r=1 \quad u_1 = f(1) - f(2)$$

$$r=2 \quad u_2 = f(2) - f(3) \quad (5)$$

$$r=3 \quad u_3 = f(3) - f(4)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$r=n-1 \quad u_{n-1} = f(n-1) - f(n) \quad (5)$$

$$r=n \quad u_n = f(n) - f(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^n u_r = f(1) - f(n+1) \quad (5)$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1} \quad (5)$$

$$= \frac{2n+2-2}{n+1}$$

$$= \frac{2n}{n+1} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^n u_r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 - \frac{2}{n+1} \right\}$$

$$= 2 \quad (5)$$

$\therefore$ The Series is convergent // (5)

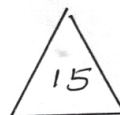
13. a.

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \textcircled{10}$$

$$A = PQ - R$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \textcircled{5}$$



$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 56 & 32 \end{pmatrix} \textcircled{10}$$

$$A^2 + \lambda I = \mu A$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 56 & 32 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \textcircled{5}$$

$$56 + \lambda(0) = 7\mu$$

$$\underline{\underline{\mu = 8}} \textcircled{5}$$

$$16 + \lambda(1) = 3\mu$$

$$3\mu = 24$$

$$\mu = 8 \cdot \textcircled{5}$$

$$A^2 + 8I = 8A$$

$$AA^{-1} + 8IA^{-1} = 8AA^{-1} \quad (5)$$

$$AI + 8A^{-1} = 8I$$

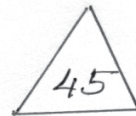
$$8A^{-1} = 8I - AI \quad (5)$$

$$8A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/8 & -1/8 \\ -7/8 & 3/8 \end{pmatrix} \quad (10)$$



$$b. \quad \frac{z_1 + 4}{z_1} = 2 - i$$

$$z_1 + 4 = 2z_1 - iz_1$$

$$4 = z_1 - iz_1$$

$$z_1 = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{2}$$

$$= 2(1+i) \quad ; \quad \underline{\lambda = 2} \quad (10)$$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

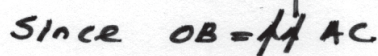
$$= \underline{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \underline{2\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$\therefore \underline{|z_1| = |z_2|} \quad (5)$$

$$|z - 2(1+i)| = |z - (-\sqrt{6} + \sqrt{2})i|$$



But $OA = OB$.

$\therefore I$ is a diagonal (oc).

$\therefore c$ lie on the Locus. (20)

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{\beta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore \arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{4} + \left(\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \div 2$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{12\pi - 2\pi - 3\pi}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{24}$$

$$= \underline{\underline{13\pi/24}} \quad (20)$$



$$14) a. f(x) = \frac{16x}{(x-2)^2(3x-2)}$$

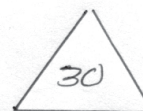
$$f'(x) = \frac{(x-2)^2(3x-2) \times 16 - 16x \{ (x-2)^2 \cdot 3 + (3x-2) \cdot 2(x-2) \}}{(x-2)^4(3x-2)^2} \quad (20)$$

$$= \frac{16(x-2) \{ (x-2)(3x-2) - x[3(x-2) + 2(3x-2)] \}}{(x-2)^4(3x-2)^2}$$

$$= \frac{16 \{ 3x^2 - 8x + 4 - 9x^2 + 10x \}}{(x-2)^3(3x-2)^2}$$

$$= \frac{16 \{ -6x^2 + 2x + 4 \}}{(x-2)^3(3x-2)^2}$$

$$= \frac{-32(x-1)(3x+2)}{(x-2)^3(3x-2)^2} \quad (10)$$



Vertical asymptotes; $x=2$ and $x=2/3$ (10)

$$f(x) = \frac{16}{x^3(1-\frac{2}{x})^2(3-\frac{2}{x})}$$

$$x \xrightarrow{\lim} -\infty \quad y \xrightarrow{\lim} 0$$

$$x \xrightarrow{\lim} \infty \quad y \xrightarrow{\lim} 0.$$

$\therefore$ Horizontal asymptote; $y=0$. (5)

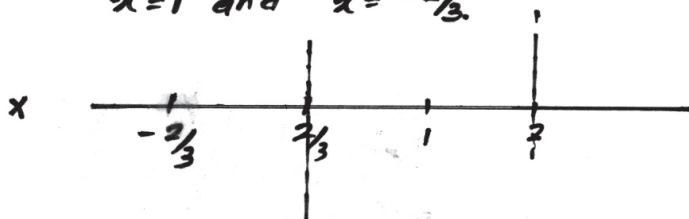
When $y=0$.

$$16x = 0$$

$$x = 0.$$

For turning points ; $\frac{dy}{dx} = 0$ (5)

$$x=1 \text{ and } x=-\frac{2}{3}$$



	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$x = -\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, 1)$	$x = 1$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	-

When $x = -\frac{2}{3}$
 $y = \frac{3}{8}$

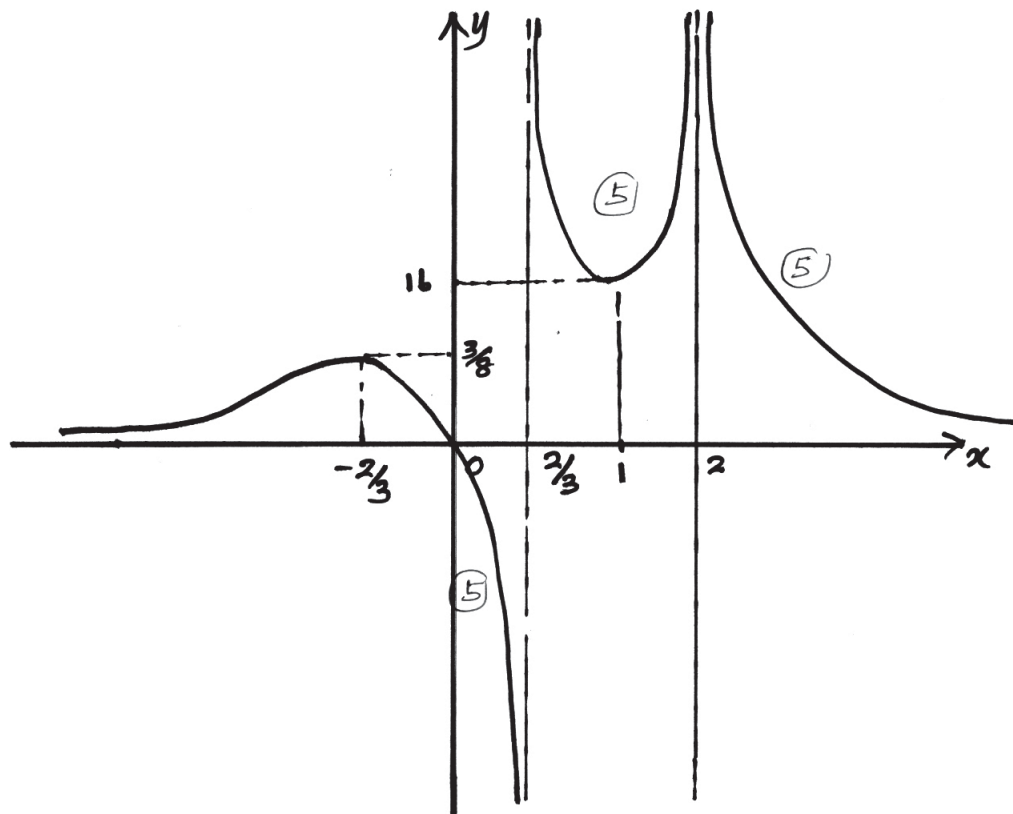
When $x = 1$
 $y = \frac{16}{1 \times 1} = 16$

$(-\frac{2}{3}, \frac{3}{8}) \leftarrow$ Local maximum point (5)

$(1, 16) \leftarrow$ Local minimum point (5)

$x \xrightarrow{\lim} -\infty$	$y \xrightarrow{\lim} 0$ (5)
$x \xrightarrow{\lim} +\infty$	$y \xrightarrow{\lim} 0$ (5)
$x \xrightarrow{\lim} \frac{2}{3}^-$	$y \xrightarrow{\lim} -\infty$ (5)
$x \xrightarrow{\lim} \frac{2}{3}^+$	$y \xrightarrow{\lim} +\infty$ (5)
$x \xrightarrow{\lim} 2^-$	$y \xrightarrow{\lim} +\infty$ (5)
$x \xrightarrow{\lim} 2^+$	$y \xrightarrow{\lim} +\infty$ (5)





b. $V(x) = (21-2x)(16-2x)x //$ (15)

$$\frac{dV}{dx} = (21-2x)(16-4x) + (16-2x)x(-2) \quad (10)$$

$$= 4 \{ (21-2x)(4-x) - (8-x)x \}$$

$$= 4 \{ 84 - 21x - 8x + 2x^2 - 8x + x^2 \}$$

$$= 4 \{ 3x^2 - 37x + 84 \}$$

$$= 4 \{ (x-3)(3x-28) \}$$

$$= 4(x-3)(3x-28) \quad (5)$$

For maximum or minimum Volume $\frac{dy}{dx} = 0$

$$(x-3)(3x-28)=0$$

$$x=3 \text{ or } x = \frac{28}{3}$$

$$= 9\frac{1}{3} \text{ (5)}$$

$$\# (\because x < 8)$$

$$\therefore \underline{\underline{x=3}}$$

	$0 < x < 3$	$x=3$	$3 < x < 8$
$\frac{dy}{dx}$	+	0	- (10)



$$\therefore \underline{\underline{x=3}}$$

$\therefore$ Side of the square = 3cm // (5)



$$15) a. \frac{x^2-2}{(x-2)^2} = A + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x^2-2 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C$$

When $x=2$

$$2 = C //$$

$$x^2 \rightarrow 1 = A //$$

$$x \rightarrow 0 = -4A + B$$

$$B = 4 //$$



$$\frac{x^2-2}{(x-2)^2} = 1 + \frac{4}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int_3^4 \frac{x^2-2}{(x-2)^2} dx = \int_3^4 1 dx + 4 \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx + 2 \int_3^4 \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$= \{x\}_3^4 + 4 \{\ln|x-2|\}_3^4 + 2 \left[\frac{(x-2)^{-1}}{-1} \right]_3^4$$

$$= (4-3) + 4 \{\ln|2| - \ln|1|\}$$

$$+ 2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \ln|2|$$

$$= 2 + 4 \ln|2|$$



$$\begin{aligned}
 b) \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \frac{d e^{x^2}}{dx} dx \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ x^2 e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x dx \right\} \quad (10) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ x^2 e^{x^2} - 2 \int x e^{x^2} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ x^2 e^{x^2} - \frac{2}{2} \int 2x e^{x^2} dx \right\} \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ x^2 e^{x^2} - e^{x^2} \right\} + C \quad (5) \\
 &= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C \quad (5)
 \end{aligned}$$



c. $t = \tan x$

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

$$= 1 + t^2 \quad (5)$$

When $x = 0$ $t = \tan 0$
 $= 0$

When $x = \pi/2$ $t = \tan \pi/2 \quad (5)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right\}_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{\infty}{\sqrt{2}} \right) - \tan^{-1}(0) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (5)
 \end{aligned}$$



$$\int_0^a f(x) dx$$

$$\text{Let } a-x=y$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$dx = -dy$$

$$\text{When } x=0 \quad y=a$$

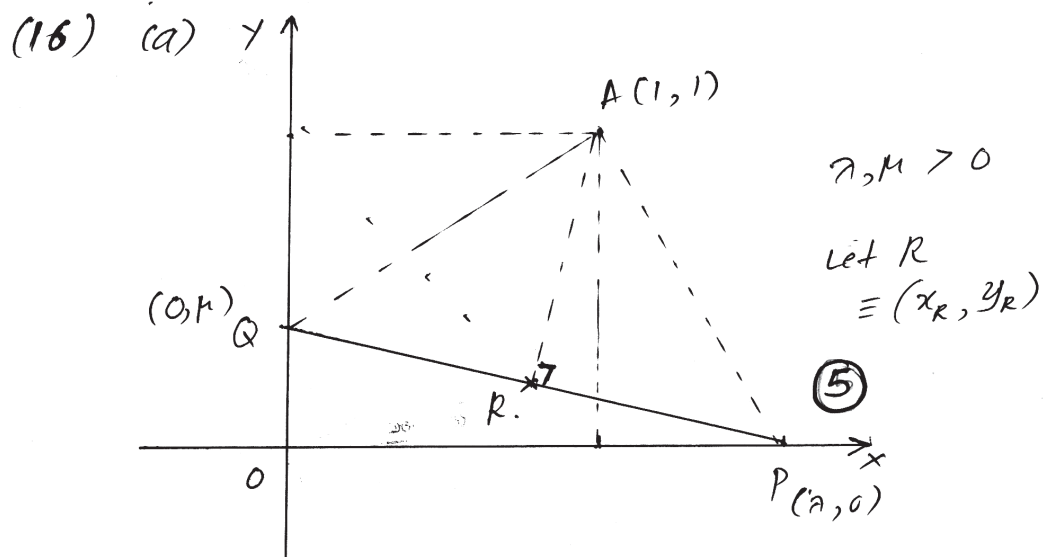
$$x=a \quad y=0$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^0 f(a-y) (-dy)$$

$$= \int_0^a f(a-x) dx$$

$$= \int_0^a f(a-x) dx \quad ; \quad y=x$$





Since $AR \perp PQ$

$$m_{AR} = \frac{-1}{m_{PQ}} \Rightarrow \frac{y_R - 1}{x_R - 1} = \frac{-1}{\frac{\mu - 0}{0 - \lambda}} = \frac{\lambda}{\mu} \quad (5)$$

$$\Rightarrow y_R = \frac{\lambda}{\mu}(x_R - 1) + 1 \quad (5) \quad \text{--- (1)}$$

Since R is on PQ ,

$$\frac{y_R - 0}{x_R - \lambda} = \frac{-\mu}{\lambda} \Rightarrow y_R = \frac{-\mu}{\lambda}(x_R - \lambda) \quad (5) \quad \text{--- (2)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu}(x_R - 1) + \frac{\mu}{\mu} = \frac{-\mu}{\lambda}(x_R - \lambda)$$

$$\lambda^2(x_R - 1) + \lambda\mu = -\mu^2(x_R - \lambda)$$

$$x_R(\lambda^2 + \mu^2) = \lambda\mu^2 + \lambda^2 - \lambda\mu \quad (5)$$

$$\therefore x_R = \frac{\lambda(\mu^2 - \mu + \lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow y_R = \frac{-\mu}{\lambda} \left(\frac{\lambda(\mu^2 - \mu + \lambda)}{\lambda^2 + \mu^2} - \lambda \right) \quad (5)$$

$$= \frac{-\mu}{\lambda} \frac{\lambda\mu^2 - \lambda\mu + \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda\mu^2}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$= \frac{-\mu}{\lambda} \times \frac{-\lambda(\mu - \lambda + \lambda^2)}{\lambda^2 + \mu^2}$$

$$y_R = \frac{\mu (\lambda^2 - \lambda + \mu)}{\lambda^2 + \mu^2} \quad (5)$$

$$\therefore R \equiv \left[\frac{\lambda (\mu^2 - \mu + \lambda)}{\lambda^2 + \mu^2}, \frac{\mu (\lambda^2 - \lambda + \mu)}{\lambda^2 + \mu^2} \right] //$$

When $\angle PAQ = 90^\circ$,

$$m_{PA} = \frac{-1}{m_{QA}} \Rightarrow \frac{1-0}{1-\lambda} = \frac{-1}{\frac{1-\mu}{1-0}} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{\mu-1}$$

$$\mu-1 = 1-\lambda$$

$$\therefore \lambda + \mu = 2 \quad \text{--- (A) (5)}$$

Let $\lambda \neq \mu$ $\mu = 2 - \lambda$

$$\begin{aligned} \text{Then } R &\equiv \left[\frac{\lambda [(2-\lambda)^2 - 2 + \lambda + \lambda]}{\lambda^2 + (2-\lambda)^2}, \frac{(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 2 - \lambda)}{\lambda^2 + (2-\lambda)^2} \right] \\ &\equiv \left[\frac{\lambda (4 - 4\lambda + \lambda^2 - 2 + 2\lambda)}{\lambda^2 + 4 - 4\lambda + \lambda^2}, \frac{(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}{2\lambda^2 - 4\lambda + 4} \right] \\ &= \left(\frac{\lambda (2 - 2\lambda + \lambda^2)}{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}, \frac{(2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

If R is on the line $x + y - 1 = 0$,
then, $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{2-\lambda}{2}\right)$ should satisfy $x + y - 1 = 0$.

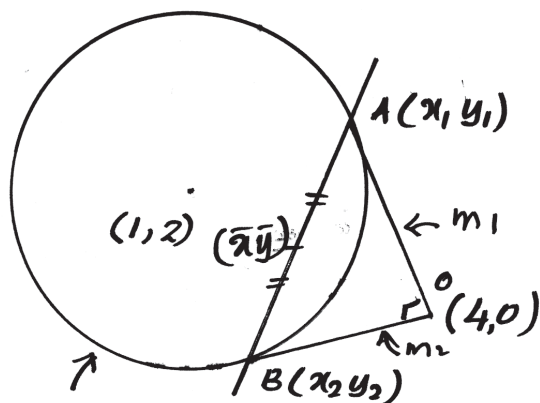
$$\begin{aligned} \therefore \text{L.H.S.} &= \frac{\lambda}{2} + \frac{2-\lambda}{2} - 1 = \frac{\lambda}{2} + 1 - \frac{\lambda}{2} - 1 \\ &= 0 \quad (5) \\ &= \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$\therefore R$ is on the straight line $x + y - 1 = 0$. (5) //



16. b

Theory



$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1 - 4} \quad m_2 = \frac{y_2}{x_2 - 4}$$

$$\text{As } \perp OB \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

$$\left(\frac{y_1}{x_1 - 4} \right) \left(\frac{y_2}{x_2 - 4} \right) = -1$$

$$y_1 y_2 + x_1 x_2 = -(-4x_1 - 4x_2 + 16)$$

$$y_1 y_2 + x_2 x_1 = 4(x_1 + x_2) - 16$$

$$= 8\bar{x} - 16 \Rightarrow (1) \quad (10)$$

Since $A(x_1, y_1)$ is on the circle.

$$x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 - 4 = 0 \Rightarrow (4) \quad (5)$$

Since $B(x_2, y_2)$ is on the circle

$$x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 - 4y_2 - 4 = 0 \rightsquigarrow (B) \quad (5)$$

$$(A) + (B)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 - 2(x_1 + x_2)$$

$$-4(y_1 + y_2) - 8 = 0$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - 2\{x_1x_2 + y_1y_2\} - 2(x_1 + x_2)$$

$$-4(y_1 + y_2) - 8 = 0 \quad (10)$$

$$(2\bar{x})^2 + (2\bar{y})^2 - 2\{8\bar{x} - 16\} - 2(2\bar{x}) - 4(2\bar{y}) - 8 = 0 \quad (10)$$

$$4\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 - 16\bar{x} + 32 - 4\bar{x} - 8\bar{y} - 8 = 0$$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 5\bar{x} - 2\bar{y} + 6 = 0$$

$$\bar{x} \equiv x \quad \bar{y} \equiv y$$

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - 5x - 2y + 6 = 0}}$$



(17) (a) To be show that

$$3 \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + 2 \cos 2x,$$

$$LHS = 3 \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x \quad (5)$$

$$= 2 \cos^2 x + \cos 2x \quad (5)$$

$$= \cos^2 x + 1 - \sin^2 x \quad (5) + \cos 2x$$

$$= 1 + \cos^2 x - \sin^2 x + \cos 2x$$

$$= 1 + \cos 2x + \cos 2x$$

$$= 1 + 2 \cos 2x //$$

$$= R.H.S.$$

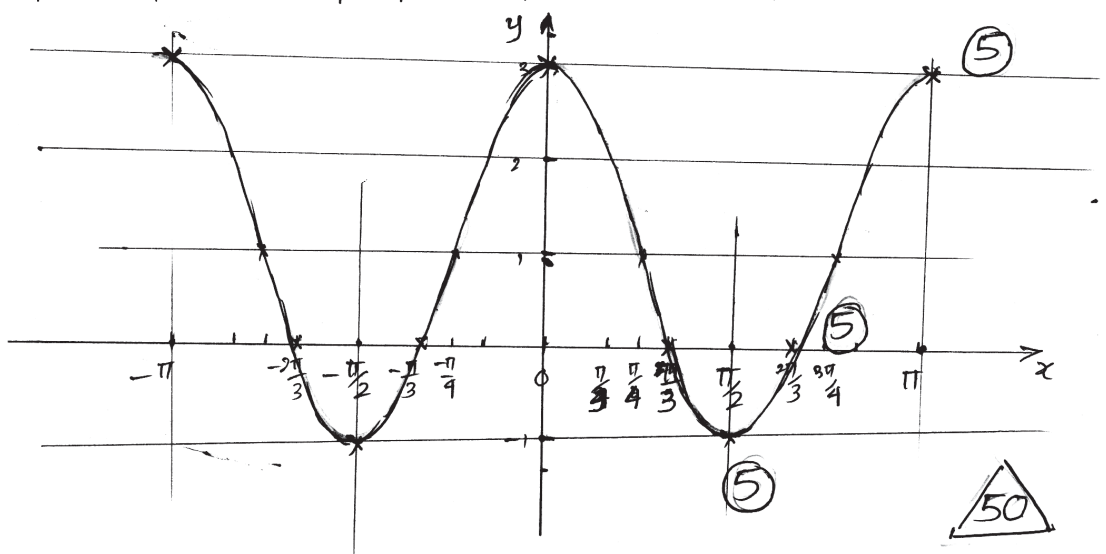
~~Q.17~~ The graph of $y = 3 \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\text{Let } y = 1 + 2 \cos 2x. \quad (5)$$

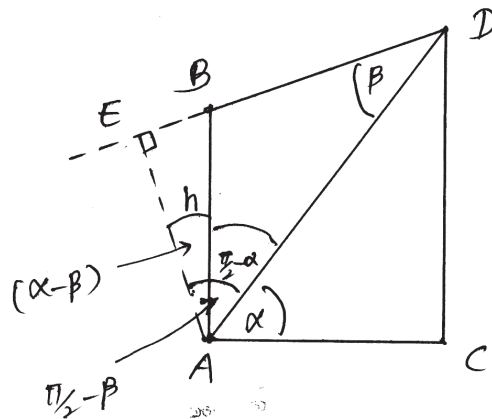
$$\text{For } -\pi \leq x \leq \pi,$$

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	1	0	-1	0	1	3	1	0	-1	0	1	3

(15)



(17) (b)



Let the base of perpendicular height to the line producing DB is E. (10)
 Then $AE = AD \sin \beta = h \cos(\alpha - \beta)$ (10)

$$\therefore AD = \frac{h \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} //$$

Since $\frac{CD}{AD} = \sin \alpha$ (5)

$$CD = \frac{\sin \alpha \cdot h \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} (5)$$

$$CD = \frac{h \sin \alpha \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} //$$

If $AB = AC$

$$h = AD \cos \alpha (10)$$

$$\therefore h = \frac{h \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \cdot \cos \alpha$$

$$\therefore \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \left(\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta} \right) \cos \alpha (10)$$

$$\tan \beta = (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \beta) \cos \alpha$$

$$\tan \beta = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha} (5)$$

55

$$(17) (c) \quad \sin^{-1} x - \cos^{-1} x = \sin^{-1}(3x-2)$$

$$\text{Let } \sin^{-1} x = \alpha \quad (5)$$

$$\cos^{-1} x = \beta \quad (5)$$

$$\sin^{-1}(3x-2) = \gamma \quad (5)$$

$$\text{Then } \alpha = \sin^{-1} x \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1-x^2} \quad (10)$$

$$x = \cos \beta \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1-x^2} \quad (5)$$

$$3x-2 = \sin \gamma$$

$$\therefore \alpha + \beta = \gamma$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \quad (5)$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin \gamma \quad (10) \quad (5)$$

$$x \cdot x - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2} = 3x-2$$

$$x^2 - (1-x^2) = 3x-2$$

$$2x^2 - 1 - 3x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (5)$$

$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{9-4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{3 \pm 1}{4} = \frac{4}{4} \text{ or } \frac{2}{4}$$

$$\therefore x = 1 \text{ or } x = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{(5) \quad (5)}}$$

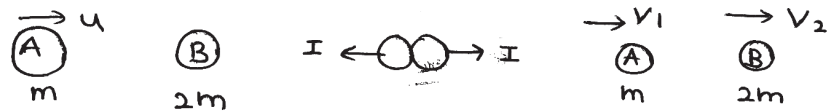


Third Term Test - 2018

Combined Mathematics II - Part A - Grade 13

Part A

01)



Principle of conservation of linear momentum

$$mu = mv_1 + 2mv_2$$

$$v_1 + 2v_2 = u \quad \text{--- (1) (5)}$$

Newton's Law of restitution

$$v_1 - v_2 = -eu \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 3v_2 = (1+e)u$$

$$v_2 = \frac{u}{3}(1+e) \quad \textcircled{5}$$

$$\text{by } \textcircled{1} \quad v_1 = u - 2v_2$$

$$= u - 2\frac{u}{3}(1+e)$$

$$= \frac{3u - 2u - 2eu}{3}$$

$$= \frac{u - 2eu}{3}$$

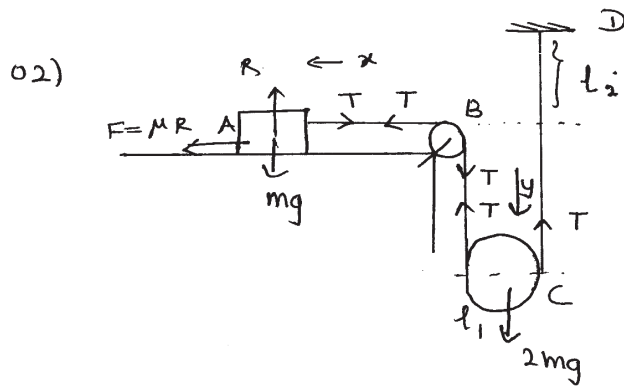
$$= \frac{u}{3}(1-2e) \quad \textcircled{5}$$

If the direction of A is reversible $v_1 < 0$

$$\frac{u}{3}(1-2e) < 0$$

$$1-2e < 0 \quad \frac{u}{3} > 0$$

$$\underline{\underline{e > \frac{1}{2}}} \quad \textcircled{5}$$



for the equilibrium of A

$$\uparrow R = mg$$

$$\leftarrow F = \mu R$$

$$F = \mu mg \quad \text{--- (1) (5)}$$

for the length of the string

$$x + y + l_1 + y + l_2 = L$$

differentiating w.r.t. -time

$$\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \quad \text{--- (2) (5)}$$

$$F = ma$$

$$\textcircled{A} \leftarrow \mu R - T = m\ddot{x}$$

$$\mu mg - T = m\ddot{x} \quad \text{--- (3) (5)}$$

$$\textcircled{C} \downarrow 2mg - 2T = 2m\ddot{y}$$

$$mg - T = m\ddot{y} \quad \text{--- (4) (5)}$$

$$\mu g - \frac{T}{m} + 2 \left(g - \frac{T}{m} \right) = 0$$

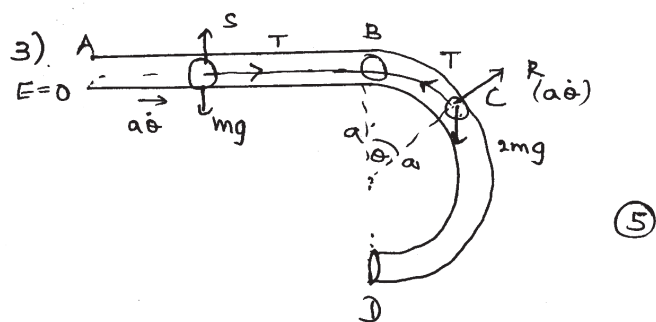
$$\mu g + 2g = \frac{3T}{m}$$

$$\frac{g}{4} + 2g = \frac{3T}{m}$$

$$\frac{9}{4}g = \frac{3T}{m}$$

$$T = \frac{3mg}{4} \quad \text{--- (5)}$$

25



Using the principle of Conservation of energy.

$$0 = 0 + \frac{1}{2} m (a\dot{\theta})^2 - 2mg(a - a \cos \theta) + \frac{1}{2} 2m (a\dot{\theta})^2 \quad (5)$$

$$0 = (a\dot{\theta})^2 - 4ga(1 - \cos \theta) + 2(a\dot{\theta})^2$$

$$3(a\dot{\theta})^2 = 4ga(1 - \cos \theta)$$

$$(a\dot{\theta})^2 = \frac{4ga}{3}(1 - \cos \theta) \quad (1) \quad (5)$$

The radial acceleration, $f_1 = a\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3}g(1 - \cos \theta)$

The tangential " $f_2 = a\ddot{\theta}$

differentiating (1) w.r.t. time

$$2a\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{4}{3}g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$f_2 = a\ddot{\theta} = \frac{2g}{3} \sin \theta \quad (5)$$

$\therefore$ The acceleration of the particle $\left\{ \right. = f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

$$= \left\{ \frac{16}{9} g^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{4}{9} g^2 \sin^2 \theta \right\}^{1/2}$$

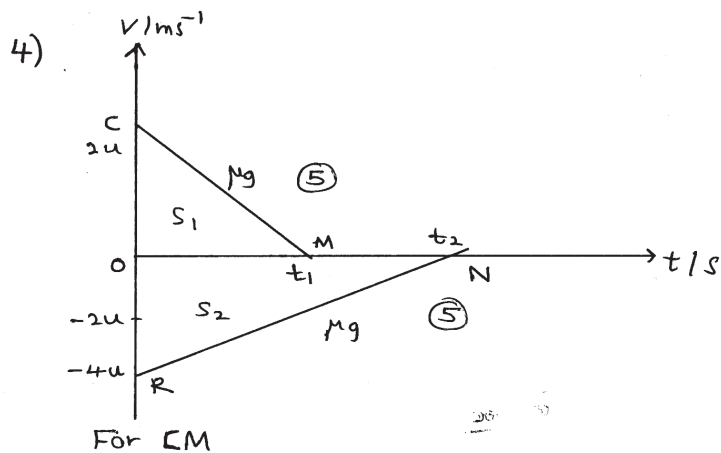
when $\theta = \pi/3$,

$$= \left\{ \frac{16}{9} g^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9} g^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \frac{16}{9} g^2 \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{4}{9} g^2 \frac{3}{4} \right\}^{1/2}$$

$$= \frac{g}{3} \sqrt{7} \quad (5)$$

25



$$\frac{2u}{t_1} = Mg \Rightarrow t_1 = \frac{2u}{Mg}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{Area of } OCM = \frac{1}{2} \times t_1 \times 2u \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2u}{Mg} \times 2u \\ &= \frac{2u^2}{Mg} \quad (5) \end{aligned}$$

For NR

$$\frac{4u}{t_2} = Mg \Rightarrow t_2 = \frac{4u}{Mg}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \text{Area of } ORN = \frac{1}{2} \times t_2 \times 4u \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4u}{Mg} \times 4u \\ &= \frac{8u^2}{Mg} \quad (5) \end{aligned}$$

But if the two particles meet each other,

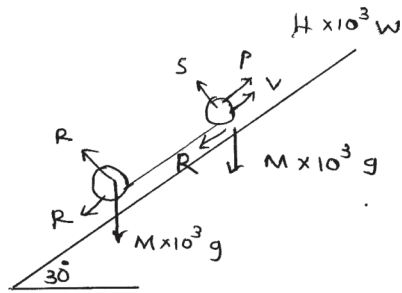
$$S_1 + S_2 = \frac{2u^2}{Mg} + \frac{8u^2}{Mg} = a$$

$$\frac{10u^2}{Mg} = a$$

$$M = \frac{10u^2}{ag} \quad (5)$$

25

5)



Using $H = PV$

$$H \times 10^3 = PV \Rightarrow P = \frac{1000 H}{V} \quad (5)$$

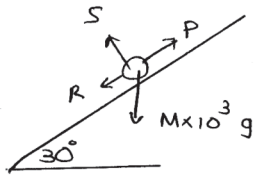
For the system $F = ma$

$$P - 2R - 2M \times 10^3 g \sin 30 = M \times 10^3 \times 0 \quad (5)$$

$$2R = P - 2M \times 10^3 g \times \frac{1}{2}$$

$$R = \left(\frac{1000 H}{V} - 1000 M g \right) \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(H - MgV)}{2V} \times 10^3 \text{ N} \quad (5)$$



$F = ma$

$$P - R - M \times 10^3 g \sin 30 = M \times 10^3 f \quad (5)$$

$$\frac{10^3 \times H}{V} - \left(\frac{H - MgV}{2V} \right) \times 10^3 - M \times 10^3 g \times \frac{1}{2} = M \times 10^3 f$$

$$\frac{H}{V} - \frac{H}{2V} + \frac{MgV}{2V} - \frac{Mg}{2} = Mf$$

$$f = \frac{H}{2VM} \quad (5)$$

25

$$6) (\underline{i} + 7\underline{j}) \cdot (P\underline{i} + Q\underline{j}) = 0 \quad (5)$$

$$P + 7Q = 0 \quad (5)$$

$$|\underline{b}| = 2$$

$$P^2 + Q^2 = 4 \quad (5)$$

$$49Q^2 + Q^2 = 4$$

$$Q = \pm \frac{\sqrt{2}}{5}$$

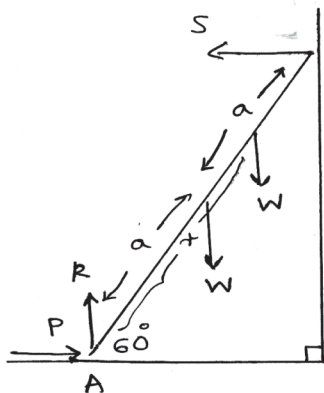
Since $Q < 0$

$$Q = -\frac{\sqrt{2}}{5} \quad (5)$$

$$\therefore P = \frac{7\sqrt{2}}{5} \quad (5)$$

25

7)



$$\uparrow R = 2W$$

$$\rightarrow P = S$$

$$S \times 2a \sin 60^\circ = W a \cos 60^\circ + W(a+x) \cos 60^\circ \quad (5)$$

$$S \times \sqrt{3} a = \frac{W}{2} (a+x) \quad (5)$$

$$S = \frac{W(a+x)}{2\sqrt{3} a} \quad (5)$$

$$\frac{W(a+x)}{2\sqrt{3} a} \leq \frac{5W}{4\sqrt{3}} \quad (5)$$

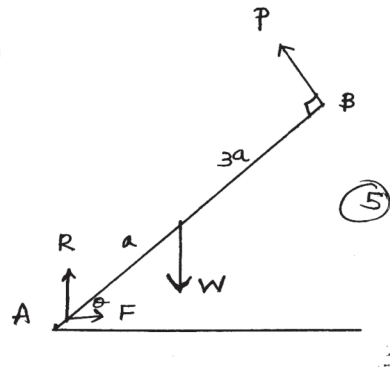
$$a+x \leq \frac{5a}{2}$$

$$x \leq \frac{3a}{2} \quad (5)$$

25

$$\therefore x_{\max} = \frac{3a}{2}$$

8)



$$\textcircled{A} \quad P \times 4a = W \times a \cos \theta$$

$$P = \frac{W}{4} \cos \theta \quad \textcircled{5}$$

$$\uparrow \quad R + P \cos \theta = W \quad \textcircled{5}$$

$$R = \frac{W}{4} (4 - \cos^2 \theta)$$

$$\rightarrow F = P \sin \theta \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{W}{4} \cos \theta \sin \theta$$

For the equilibrium

$$\mu \geq \frac{|F|}{R}$$

$$\mu \geq \frac{\frac{W}{4} \cos \theta \sin \theta}{\frac{W}{4} (4 - \cos^2 \theta)} \quad \textcircled{5}$$

25

$$\mu \geq \frac{\cos \theta \sin \theta}{4 - \cos^2 \theta}$$

$$9) \quad P(A|B) = 1 - P(A'|B)$$

$$= 1 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{7}{10}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{10} a \quad \textcircled{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{3}{4} = P(A) + a - \frac{7a}{10}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{4} - \frac{3}{10} a \quad \textcircled{5}$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{3}{10} a - P(A \cap B) \quad \textcircled{5}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{7}{10} a = \frac{3}{4} - \frac{3}{10} a$$

$$a = \frac{5}{9} \quad \textcircled{5}$$

25

$$10) \quad \frac{50 + p + q}{8} = q \quad (5)$$

$$q = \frac{50 + p}{7}$$

$$\text{When } p=5, \quad q = \frac{55}{7} \quad \left. \vphantom{\frac{55}{7}} \right\} (5)$$

$$\text{When } p=6, \quad q = \frac{56}{7} = 8$$

$$\therefore p=6, q=8 \quad (5)$$

$$M.D = \frac{\sum_{i=1}^8 |x_i - \bar{x}|}{8} \quad (5)$$

$$= \frac{|2-8| + |4-8| + |5-8| + |6-8| + |8-8| + |12-8| + |13-8| + |14-8|}{8}$$

$$= \frac{6 + 4 + 3 + 2 + 4 + 5 + 6}{8}$$

$$= \frac{30}{8}$$

$$= \frac{15}{4} \quad (5)$$

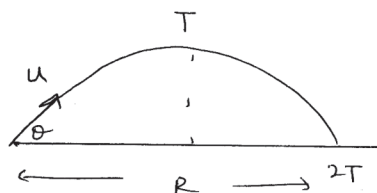
$$\boxed{25}$$

Third Term Test - 2019

Combined Mathematics II - Part B - Grade 12

Part B

11) a)



At the maximum height,

$$v = u + at$$

$$0 = u \sin \theta - gT$$

$$T = \frac{u \sin \theta}{g} \quad (5)$$

If the maximum height is h ,

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = u^2 \sin^2 \theta - 2gh \Rightarrow h = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (5)$$

The time of flight $2T = \frac{2u \sin \theta}{g} \quad (5)$

$$s = ut$$

$$R = u \cos \theta \times \frac{2u \sin \theta}{g} = \frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \quad (5)$$

20

for the second shell to come to its maximum height within the same time (5)

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = u^2 - 2g \left(\frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} \right) \quad (5)$$

$$u = u \sin \theta \quad (5)$$

15

When the shell collide each other,



Principle of Conservation of linear momentum,

$$mu \cos \theta = 2mw \Rightarrow w = \frac{u \cos \theta}{2} \quad (10)$$

$$\rightarrow \text{horizontal velocity of Combined particle } w = \frac{u \cos \theta}{2} \quad (5)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$s = h = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g} = 0 + \frac{g}{2}t^2$$

$$t = \frac{u \sin \theta}{g} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{time taken for the composite particle} \\ \text{to hit the ground} \end{array} \right\} = t = \frac{u \sin \theta}{g}$$

$$\rightarrow s = ut$$

$$S = \frac{u \cos \theta}{2} \times \frac{u \sin \theta}{g} = \frac{u^2 \sin \theta \cos \theta}{2g} \quad (5)$$

$$R = \frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

$$\frac{R}{S} = \frac{\frac{2u^2 \sin \theta \cos \theta}{g}}{\frac{u^2 \sin \theta \cos \theta}{2g}} \quad (5)$$

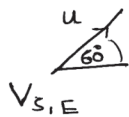
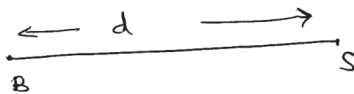
$$S = \frac{R}{4} \quad (5)$$

∴ The distance from the point of projection = $\frac{R}{2} + \frac{R}{4} = \frac{3R}{4}$

$\therefore$ The horizontal range can be decreased by $\frac{R}{4}$. (5)

40

b)

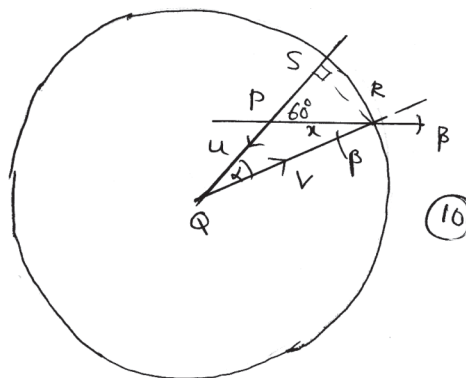


$$V_{B,E} = V$$

For the boat to meet the ship $V_{B,S}$ should be in the direction $\rightarrow$

$$\underline{V}_{B,S} = \underline{V}_{B,E} + \underline{V}_{E,S}$$

$$\underline{V}_P \rightarrow \underline{V}_R = \underline{V}_Q \rightarrow \underline{V}_R + \underline{V}_{P \rightarrow Q}$$



For the triangles PQR and SPR

$$SR = V \sin \alpha = x \sin 60^\circ$$

$$V \sin \alpha = x \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{--- (1) } \textcircled{5}$$

$$V \cos \alpha = u + x \cos 60^\circ$$

$$V \cos \alpha = u + \frac{x}{2} \quad \text{--- (2) } \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2 \quad V^2 \sin^2 \alpha + V^2 \cos^2 \alpha = \frac{3x^2}{4} + u^2 + ux + \frac{x^2}{4} \quad \textcircled{5}$$

$$V^2 = x^2 + u^2 + ux$$

$$x^2 + ux + u^2 - V^2 = 0$$

$$x = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 - 4(u^2 - V^2)}}{2} \quad \textcircled{5}$$

since $x > 0$

$$x = \frac{-u + \sqrt{u^2 - 4u^2 + 4V^2}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{4V^2 - 3u^2} - u}{2} \quad \textcircled{5}$$

45

$$\text{The time taken to meet the ship} \left. \vphantom{\begin{matrix} \text{The time taken to meet} \\ \text{the ship} \end{matrix}} \right\} = \frac{d}{PR}$$

$$= \frac{d}{x}$$

$$= \frac{d}{\frac{\sqrt{4V^2 - 3u^2} - u}{2}} \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{2d}{\sqrt{4V^2 - 3u^2} - u}$$

$$= \frac{2d(\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)}{4(V^2 - u^2)} \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{d(\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)}{2(V^2 - u^2)} \quad \textcircled{5}$$

15

$$\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} x}{V} = \frac{\sqrt{3}}{2V} (\sqrt{4V^2 - 3u^2} - u) \quad (5)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4V} \frac{(4V^2 - 3u^2 - u^2)}{(\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} (V^2 - u^2)}{V (\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3} (V^2 - u^2)}{V (\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)} \right\} \quad (5)$$

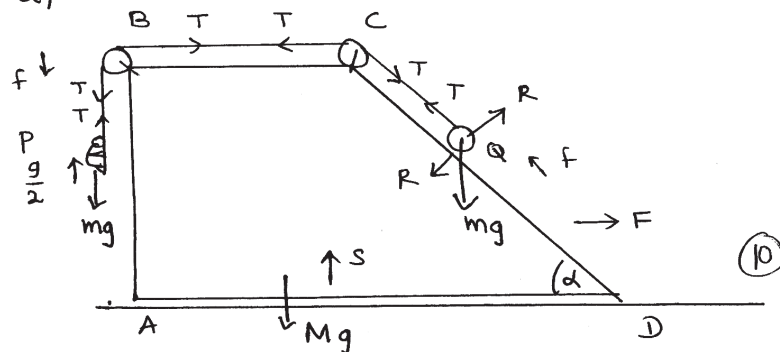
∴ The boat should travel in a direction

$$\beta = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{3} (V^2 - u^2)}{V (\sqrt{4V^2 - 3u^2} + u)} \right\} \quad (5)$$

15

towards north from east.

12) a)



$$\underline{a}_{P,E} = \uparrow \frac{g}{2} + \downarrow f$$

$$\underline{a}_{Q,E} = \nearrow f + \rightarrow F$$

$$\underline{a}_{M,E} = \rightarrow F$$

$$F = ma$$

$$\textcircled{P} \uparrow T - mg = m \left(\frac{g}{2} - f \right) \text{ --- } \textcircled{1} \quad \textcircled{18}$$

$$\textcircled{Q} \swarrow T - mg \sin \alpha = m (f - F \cos \alpha) \text{ --- } \textcircled{2} \quad \textcircled{19}$$

for the system $\rightarrow$

$$0 = MF + mF + m(F - f \cos \alpha) \quad \textcircled{10}$$

$$0 = (M + 2m)F - mf \cos \alpha \text{ --- } \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad mg \sin \alpha - mg = \frac{mg}{2} - 2mf + m \cos \alpha F$$

$$mg \sin \alpha - \frac{3mg}{2} = m \cos \alpha F - 2mf$$

$$g \sin \alpha - \frac{3g}{2} = \cos \alpha F - 2f \text{ --- } \textcircled{4} \quad \textcircled{5}$$

$$f = \frac{(M + 2m)F}{m \cos \alpha} \quad \textcircled{5}$$

$$g \sin \alpha - \frac{3g}{2} = \cos \alpha F - \frac{2(M + 2m)F}{m \cos \alpha}$$

$$g \sin \alpha - \frac{3g}{2} = \left(\frac{m \cos^2 \alpha - 2M - 4m}{m \cos \alpha} \right) F$$

$$F = \frac{m \cos \alpha \left(g \sin \alpha - \frac{3g}{2} \right)}{m \cos^2 \alpha - 2M - 4m} \quad \textcircled{5}$$

$$= \frac{m \cos \alpha (3g - 2g \sin \alpha)}{2 [2M + 4m - m \cos^2 \alpha]}$$

$$= \frac{2mg \cos \alpha \left(\frac{3}{2} - \sin \alpha \right)}{2 [2M + 3m + m(1 - \cos^2 \alpha)]}$$

$$= \frac{mg \cos \alpha \left(\frac{3}{2} - \sin \alpha \right)}{\underbrace{2M + 3m + m \sin^2 \alpha}_{+}} \quad \textcircled{5}$$

60

$$\therefore F > 0$$

$\therefore M$ moves in the direction $A \rightarrow D$.

$$f = \frac{M+2m}{m \cos \alpha} \left\{ \frac{mg \cos \alpha \left(\frac{3}{2} - \sin \alpha \right)}{2M+3m+m \sin^2 \alpha} \right\}$$

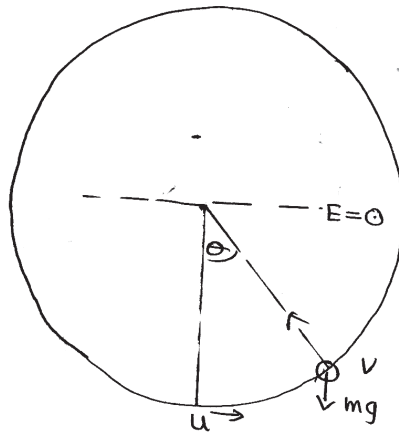
$$= \frac{(M+2m)g \left(\frac{3}{2} - \sin \alpha \right)}{2M+3m+m \sin^2 \alpha} \quad (5)$$

$$f > 0.$$

$\therefore$ The particle Q moves along the plane towards $D \rightarrow C$.

10

b)



Using the principle of conservation of energy.

$$-mga + \frac{1}{2}mu^2 = -mga \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 \quad (10)$$

$$-2ga + u^2 = -2ga \cos \theta + v^2$$

$$v^2 = u^2 - 2ga + 2ga \cos \theta \quad (5)$$

15

$$F = ma$$

$$R - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{a} \quad (10)$$

$$R$$

$$= mg \cos \theta + \frac{m}{a} (u^2 - 2ga + 2ga \cos \theta)$$

$$= \frac{m}{a} (u^2 - 2ga + 3ga \cos \theta) \quad (5) \quad 15$$

If the bead passes the above highest point it completes the circle.

When the bead at the highest point $\theta = \pi$

To pass the highest point, when $\theta = \pi$,

$R > 0$ and when $\theta = \pi$, $v > 0$.

$$\text{When } \theta = \pi, \quad R = \frac{m}{a} (u^2 - 2ga + 3ga \cos \pi) \quad (5)$$

$$= \frac{m}{a} (u^2 - 2ga - 3ga)$$

$$= \frac{m}{a} (u^2 - 5ga)$$

If $R > 0$

$$\frac{m}{a} (u^2 - 5ga) > 0$$

$$u^2 - 5ga > 0 \quad \because \frac{m}{a} > 0$$

$$u^2 > 5ga$$

$$\text{When } \theta = \pi, \quad v^2 = u^2 - 2ga + 2ga \cos \pi$$

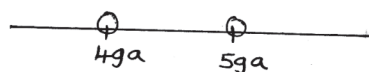
$$= u^2 - 2ga - 2ga$$

$$= u^2 - 4ga \quad (5)$$

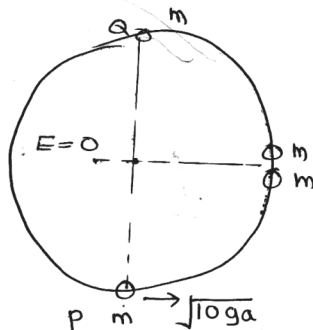
$$\text{Since } v^2 > 0, \quad u^2 - 4ga > 0$$

$$u^2 > 4ga \quad (5)$$

[20]



To satisfy both of the above needs $u^2 > 5ga$ (5)



(P), Using the principle of Conservation of energy,

$$-mga + \frac{1}{2} m (10ga) = 0 + \frac{1}{2} m W_p^2$$

$$-2ga + 10ga = W_p^2$$

$$W_p^2 = 8ga$$

$$W_p = 2\sqrt{2} ga \quad (5)$$

(Q), Using the C.O.E.

$$mga + 0 = 0 + \frac{1}{2} m W_Q^2$$

$$W_Q^2 = 2ga$$

$$W_Q = \sqrt{2ga} \quad (5)$$

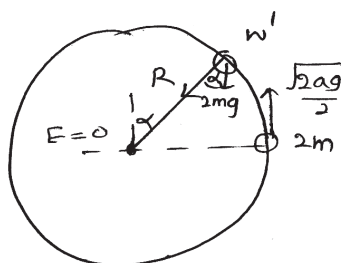
15

Using the principle of Conservation of energy

$$\uparrow m 2\sqrt{2ga} - m \sqrt{2gh} = 2mW$$

$$\sqrt{2gh} = 2W$$

$$W = \frac{\sqrt{2ga}}{2} \quad (5)$$



Using the principle of Conservation of energy,

$$0 + \frac{1}{2} (2m) \frac{2ag}{4} = 2mg a \cos \alpha + \frac{1}{2} (2m) W'^2$$

$$\frac{ag}{2} = 2ag \cos \alpha + W'^2$$

$$W'^2 = \frac{ag}{2} - 2ag \cos \alpha \quad (5)$$

$$F = ma \quad \swarrow$$

$$R + 2mg \cos \alpha = 2m \frac{v^2}{a}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{2m}{a} \left(\frac{ag}{2} - 2ag \cos \alpha \right) - 2mg \cos \alpha \\ &= \frac{2m}{a} \left(\frac{ag}{2} - 3ag \cos \alpha \right) \end{aligned}$$

$$R = 2mg \left(\frac{1}{2} - 3 \cos \alpha \right) \quad (5)$$

When the combined particle go to the highest point $\alpha = 0$

$$R (\alpha = 0) = 2mg \left(\frac{1}{2} - 3 \right) < 0$$

$\therefore$ before reaching the highest point, the reaction changes its direction.

When the direction changes, using $R = 0$,

$$2mg \left(\frac{1}{2} - 3 \cos \alpha \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} - 3 \cos \alpha = 0 \quad 2mg \neq 0$$

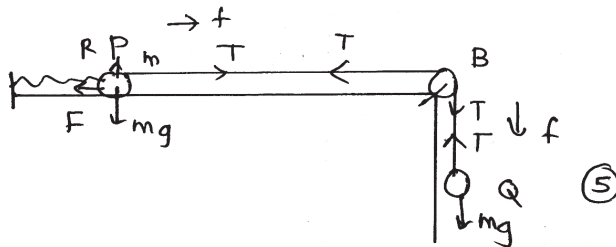
$$\cos \alpha = \frac{1}{6}$$

(5)

15

$\therefore$ When $\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{6}$ the direction of the reaction changes.

13)



for the equilibrium of P,

$$\uparrow R - mg = 0 \Rightarrow R = mg \quad (5)$$

$$F = \mu mg$$

$$F = \frac{mg}{6} \quad (\because \mu = \frac{1}{6}) \quad (5)$$

$$F = ma$$

$$(Q) \downarrow mg - T = mf \quad (1) \quad (5)$$

$$(P) \rightarrow T - \frac{mg}{6} = mf \quad (2) \quad (5)$$

$$(1) + (2) \quad mg - \frac{mg}{6} = 2mf$$

$$\frac{5mg}{6} = 2mf$$

$$f = \frac{5g}{12} \quad (5)$$

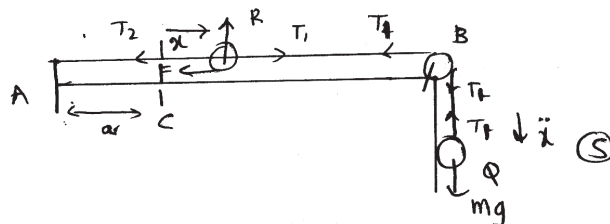
When the particle come to the point C,

$$\rightarrow v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 0 + 2 \left(\frac{5g}{12} \right) a$$

$$v = \sqrt{\frac{5ag}{6}} \quad (5)$$

35



$$\rightarrow F = ma$$

$$(P) \rightarrow T_1 - T_2 - \frac{mg}{6} = m\ddot{x} \quad (3) \quad (10)$$

$$(Q) \downarrow mg - T_1 = m\ddot{x} \quad (4) \quad (5)$$

$$(3) + (4) \quad mg - \frac{mg}{6} - T_2 = 2m\ddot{x} \quad (5)$$

$$\frac{5mg}{6} - mg \frac{x}{a} = 2m\ddot{x}$$

$$-\frac{g}{a} \left(x - \frac{5a}{6} \right) = 2\ddot{x} \quad (5)$$

$$-\frac{g}{2a} \left(x - \frac{5a}{6} \right) = \ddot{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

∴ The centre is at a distance $a + \frac{5a}{6} = \frac{11a}{6}$ from A.

$$\text{using } \dot{x}^2 = \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (5)$$

$$\frac{5ag}{6} = \frac{g}{2a} \left(A^2 - \frac{25a^2}{36} \right) \quad (5)$$

$$\frac{5a^2}{3} + \frac{25a^2}{36} = A^2$$

$$\frac{85a^2}{36} = A^2$$

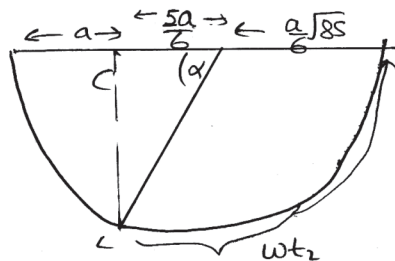
$$A = \frac{a}{6} \sqrt{85} \quad (5)$$

50

If the particle doesn't reach the edge of the table, the distance to the edge of the table from A,

$$AB > a + \frac{5a}{6} + \frac{\sqrt{85}a}{6}$$

$$AB > \frac{a}{6} (11 + \sqrt{85}) \quad (5)$$



$$\cos \alpha = \frac{\frac{5a}{6}}{\frac{a}{6} \sqrt{85}} = \sqrt{\frac{5}{17}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{17}} \quad (5)$$

$$\omega t_2 = \pi - \alpha$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \left(\pi - \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{17}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{g}} \left(\pi - \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{17}} \right)$$

5

for the motion $A \rightarrow C$

$$V = u + at$$

$$V = \sqrt{\frac{5ag}{6}} \quad u = 0, \quad a = \frac{5g}{12}, \quad t = t_1$$

$$\sqrt{\frac{5ag}{6}} = 0 + \frac{5g}{12} t_1$$

$$\sqrt{\frac{5ag}{6}} = \frac{5g}{12} t_1$$

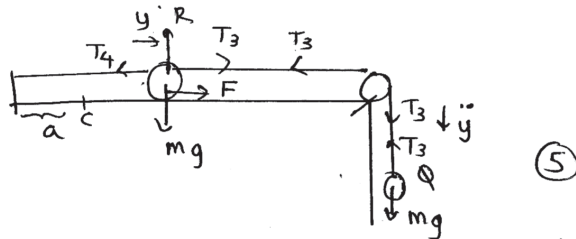
$$t_1 = \frac{12}{5g} \sqrt{\frac{5ag}{6}} = 2 \sqrt{\frac{6a}{5g}} \quad (5)$$

Time taken for the motion $A \rightarrow B = t_1 + t_2$

$$t_1 + t_2 = 2 \sqrt{\frac{6a}{5g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}} \left(\pi - \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{17}} \right)$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ \sqrt{\frac{6}{5}} + \pi - \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{17}} \right\} \quad (5)$$

20



$$F = \frac{mg}{6}$$

$$F = ma$$

$$(P) \rightarrow T_3 + \frac{mg}{6} - T_4 = m\ddot{y} \quad (3) \quad (10)$$

$$(Q) \rightarrow mg - T_3 = m\ddot{y} \quad (4) \quad (5)$$

$$(3) + (4) \quad \frac{7mg}{6} - T_4 = 2m\ddot{y}$$

$$\frac{7mg}{6} - mg \left(\frac{y}{a} \right) = 2m\ddot{y} \quad (5)$$

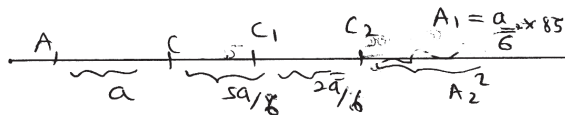
$$-\frac{g}{a} \left(y - \frac{7a}{6} \right) = 2\ddot{y} \quad (5)$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{2a} \left(y - \frac{7a}{6} \right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

The centre lies at a distance $a + \frac{7a}{6}$ from A.

Amplitude A_2



$$A_2 = \frac{9}{6} \sqrt{85} - \frac{2a}{6} \quad (5)$$

$$\text{let } \frac{7a}{6} - \left\{ \frac{a}{6} \sqrt{85} - \frac{2a}{6} \right\} = k$$

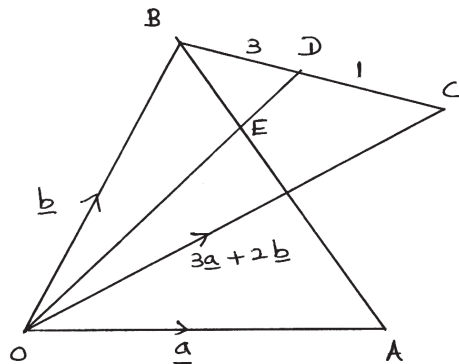
$$\frac{9a}{6} - \frac{a}{6} \sqrt{85} = k$$

$$\frac{a}{6} (9 - \sqrt{85}) = k < 0$$

$\therefore$ The string slackens in the backward motion. 45

14)

a)



$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC} \quad (5)$$

$$\vec{BC} = -\underline{b} + 3\underline{a} + 2\underline{b}$$

$$\vec{BC} = 3\underline{a} + \underline{b} \quad (5)$$

$$\vec{BD} = \frac{3}{4} \vec{BC}$$

$$\vec{BD} = \frac{3}{4} (3\underline{a} + \underline{b}) \quad (5)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD} \quad (5)$$

$$\vec{OD} = \underline{b} + \frac{3}{4} (3\underline{a} + \underline{b})$$

$$\vec{OD} = \frac{9\underline{a} + 7\underline{b}}{4} \quad (5) \quad \boxed{25}$$

$$\begin{aligned}\vec{EB} &= \vec{EO} + \vec{OB} \\ &= -\lambda \vec{OD} + \underline{b} \quad (5) \\ &= \underline{b} - \lambda \left(\frac{9\underline{a} + 7\underline{b}}{4} \right) \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{EB} &= \mu \vec{AB} \\ &= \mu (\underline{b} - \underline{a}) \quad (5)\end{aligned}$$

$$\mu (\underline{b} - \underline{a}) = \underline{b} - \lambda \left(\frac{9\underline{a} + 7\underline{b}}{4} \right) \quad (10)$$

$$\mu (\underline{b} - \underline{a}) = \left(1 - \frac{7\lambda}{4} \right) \underline{b} - \frac{9\lambda}{4} \underline{a}$$

$$\mu = 1 - \frac{7\lambda}{4} \quad (5) \quad -\mu = -\frac{9\lambda}{4} \quad (5)$$

$$1 - \frac{7\lambda}{4} = \frac{9\lambda}{4}$$

$$16\lambda = 4$$

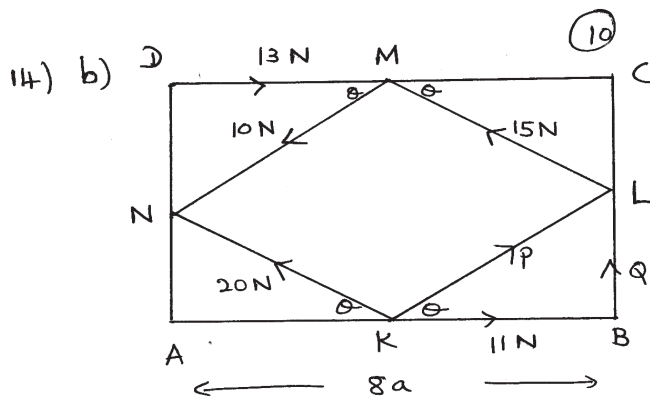
$$\lambda = \frac{1}{4} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{9}{16} \quad (5)$$

$$\therefore \vec{EB} = \frac{9}{16} \vec{AB}$$

$$BE : EA = 9 : 7 \quad (5)$$

150



$$\tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \quad (5)$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{24}{25}$$

i) for the system

$$\begin{aligned}L \curvearrowright G &= 11 \times 3a - 13 \times 3a + 10 \times 5a \sin 2\theta - \quad (10) \\ &\quad 20 \times 5a \sin 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= -6a - 10 \times 5a \times \frac{24}{25} \\
 &= -6a - 48a \\
 &= -54a \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\curvearrowleft G = 54a \neq 0$$

$\therefore$ The system is not in equilibrium. (5)

35

ii If reduces only to a couple ,

$$\rightarrow x=0 \text{ and } \uparrow y=0 \quad (5)$$

$$\rightarrow P \cos \theta + 11 + 13 - 20 \cos \theta - 15 \cos \theta - 10 \cos \theta = 0$$

$$P \cos \theta + 24 - 45 \times \frac{4}{5} = 0 \quad (10)$$

$$P \times \frac{4}{5} = 12$$

$$P = 15 \text{ N} \quad (5)$$

$$\uparrow Q + (P + 15 + 20 - 10) \sin \theta = 0 \quad (5)$$

$$Q + 40 \sin \theta = 0$$

$$Q = -40 \times \frac{3}{5}$$

$$Q = -24 \text{ N} \quad (5)$$

30

iii If parallel to the direction $\vec{AD}$

$$\rightarrow x = 0$$

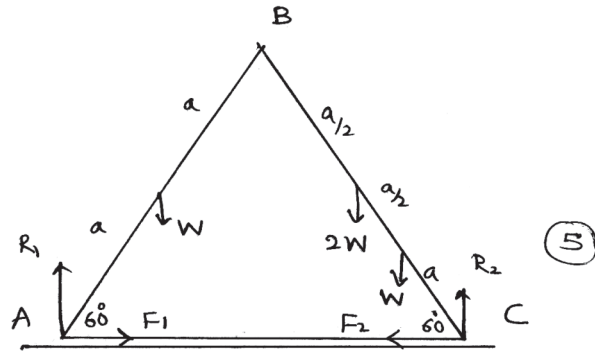
$$\text{Then } P = 15 \text{ N} \quad (5)$$

$$\uparrow Q + 24 = 12$$

$$Q = -12 \text{ N} \quad (5)$$

10

(15) a)



For the system, $\uparrow R_1 + R_2 = 4W$ — (1) (5)

$$\curvearrowleft A) R_2 \times 4a \cos 60^\circ = Wa \cos 60^\circ + W \times 3a \cos 60^\circ + 2W(2a + \frac{a}{2}) \cos 60^\circ \quad (10)$$

$$4R_2 = W + 3W + 5W$$

$$R_2 = \frac{9W}{4} \quad (5)$$

$$R_1 = 4W - \frac{9W}{4} = \frac{7W}{4} \quad (5)$$

30

for rod AB, $\sqrt{B}$

$$F_1 \times 2a \sin 60^\circ - R_1 \times 2a \cos 60^\circ + W \times a \cos 60^\circ = 0 \quad (10)$$

$$F_1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7W}{4} \times 2 \times \frac{1}{2} + W \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\sqrt{3} F_1 = \frac{7W}{4} - \frac{W}{2}$$

$$F_1 = \frac{5W}{4\sqrt{3}} \quad (5)$$

for the system $\rightarrow F_2 = F_1$

$$\therefore F_2 = \frac{5W}{4\sqrt{3}} \quad (5)$$

20

for the equilibrium of A,

$$\mu \geq \left| \frac{F_1}{R_1} \right| \quad (5)$$

$$\mu \geq \frac{5W/4\sqrt{3}}{7W/4} \quad \mu \geq \frac{5}{7\sqrt{3}} \quad (5)$$

10

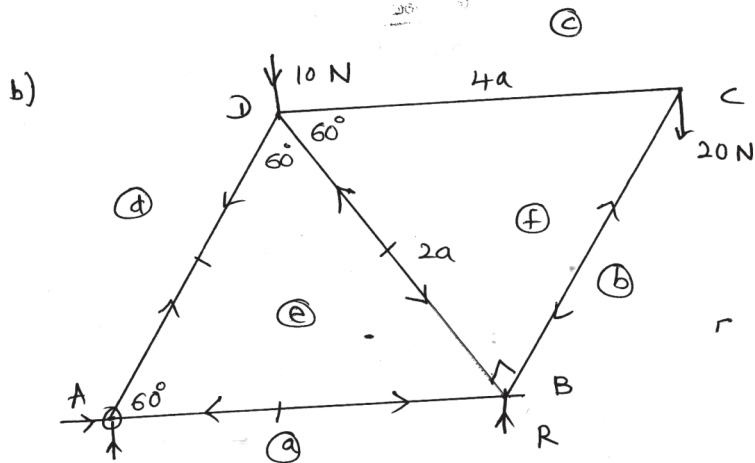
for the equilibrium of C,

$$\mu \geq \left| \frac{F_2}{R_2} \right| \quad (5)$$

$$\mu \geq \frac{\frac{5W}{4\sqrt{3}}}{9W/4}$$

$$\mu \geq \frac{5}{9\sqrt{3}} \quad (5)$$

10



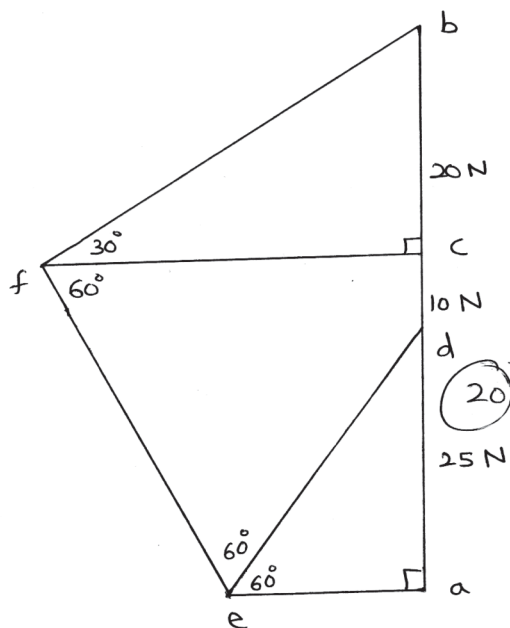
$$A) \quad 2 \times 2a - 10 \times 2a \cos 60^\circ - 20 \times 5a = 0 \quad (5)$$

$$2R = 110$$

$$R = 55 \text{ N} \quad (5)$$

10

20



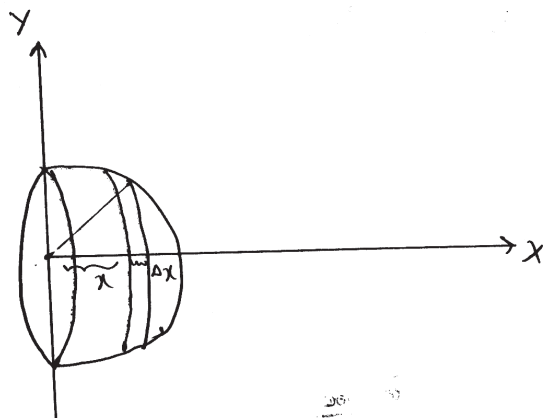
Rod	Magnitude (N)	Tension/Thrust
AB (ea)	$25/\sqrt{3}$	Thrust
AD (de)	$50/\sqrt{3}$	Tension
BD (ef)	$70/\sqrt{3}$	Thrust
BC (fb)	40	Thrust
DC (cf)	$20\sqrt{3}$	Tension

25

25

50

16)



By symmetry the
centre of mass
lies on ox axis. (5)

density = ρ

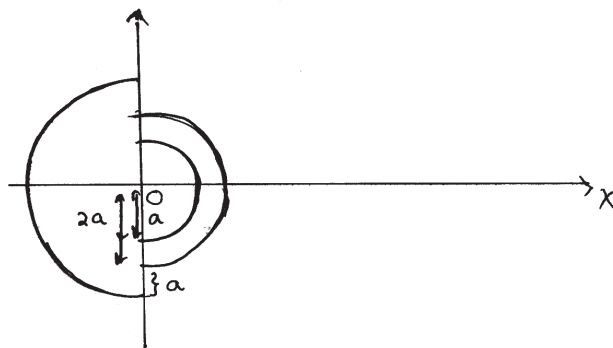
$$\Delta m = \pi (a^2 - x^2) \Delta x \rho$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) \rho x \, dx}{\int_0^a \pi (a^2 - x^2) \rho \, dx} \quad (15)$$

$$= \frac{\int_0^a (a^2 x - x^3) \, dx}{\int_0^a (a^2 - x^2) \, dx} = \frac{\left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a}{\left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}}{a^3 - \frac{a^3}{3}} = \frac{3a}{8} \quad (5)$$

40



By symmetry The centre of mass of the composite body lies on the x axis

(5)

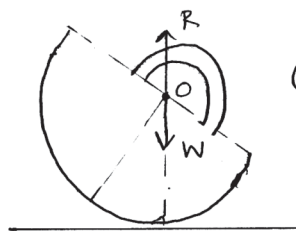
Body	mass	distance from O
	$\frac{2}{3} \pi (3a)^3 k \rho$ (5)	$-\frac{9a}{8}$ (5)
	$\frac{2}{3} \pi (2a)^3 \rho$ (5)	$\frac{6}{8} a$ (5)
	$\frac{2}{3} \pi a^3 \rho$ (5)	$\frac{3}{8} a$ (5)
Composite body	$\frac{2}{3} \pi a^3 (27k+7) \rho$ (5)	$\bar{x}$

$$\frac{2}{3} \pi a^3 (27k+7) \rho \bar{x} = \frac{2}{3} \pi \cdot 27a^3 k \rho \times \left(-\frac{9a}{8}\right) + \frac{2}{3} \pi \cdot 8a^3 \rho \times \frac{6a}{8} - \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \times \frac{3a}{8} \quad (15)$$

$$(27k+7) \bar{x} = 27k \times \left(-\frac{9a}{8}\right) + 8 \times \frac{6a}{8} - \frac{3a}{8}$$

$$= \frac{45a - 27ka \times 9}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{9a(5-27k)}{8(27k+7)} = \left| \frac{9a(5-27k)}{8(27k+7)} \right| \quad (10)$$



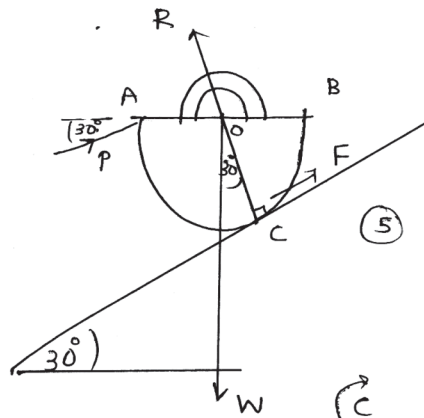
for the equilibrium, $\bar{x} = 0$. (5)

$$\left| \frac{9a(5-27k)}{8(27k+7)} \right| = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{27} \quad (5)$$

65

15



$$R = W \cos 30^\circ$$

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad (5)$$

$$P + F = W \sin 30^\circ$$

$$F = \frac{W}{2} - P \quad (5)$$

$$P \times (3a + 3a \sin 30^\circ) = W \times 3a \sin 30^\circ \quad (5)$$

$$\Rightarrow P = \frac{W}{3}$$

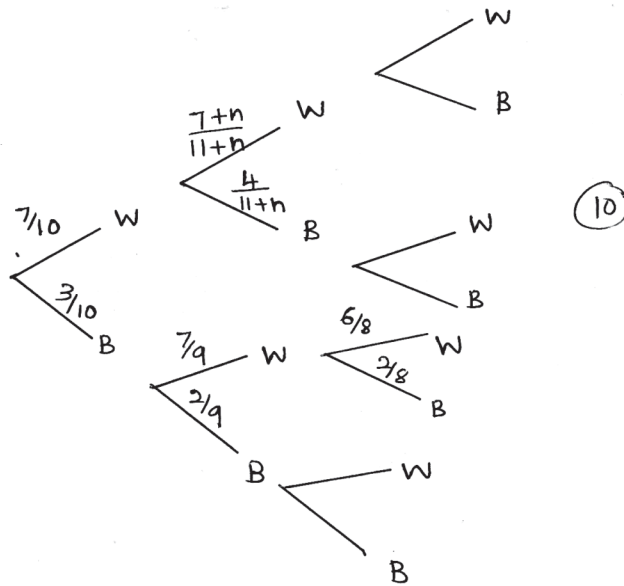
$$F = \frac{W}{2} - \frac{W}{3}$$

$$F = \frac{W}{6} \quad (5)$$

$$\mu = \frac{F}{R} = \frac{W/6}{\sqrt{3}W/2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (5)$$

30

17)



$$\frac{7}{10} \left(\frac{7+n}{11+n} \right) + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{11}{15} \quad (10)$$

$$\frac{7(7+n)}{2(11+n)} = \frac{15}{6}$$

$$\begin{aligned} 49 + 7n &= 55 + 5n \quad (5) \\ 2n &= 6 \Rightarrow n = 3 \quad (5) \end{aligned}$$

30

$$P(B_3|W_2) = \frac{P(W_2|B_3) P(B_3)}{P(W_2)} \quad (10)$$

$$= \frac{\frac{7}{10} \times \frac{10}{14} \times \frac{4}{13} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8}}{11/15} \quad (5)$$

$$= \frac{\frac{2}{13} + \frac{7}{120}}{11/15} = \frac{331}{1144} \quad (5)$$

35

$$b) \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (5)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (5)$$

10

$$i) \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n ax_i + b}{n} \quad (5)$$

$$= a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n b}{n} \quad (5)$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \quad (5)$$

15

$$ii) \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (ax_i + b - a\bar{x} - b)^2}{n} \quad (5)$$

$$= a^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (5)$$

$$\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$$

$$\sigma_y = |a| \sigma_x \quad (5)$$

15

$$y = ax + b$$

$$91 = 72a + b \quad \text{--- ①} \quad \textcircled{5}$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$75 = 60a + b \quad \text{--- ②} \quad \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 12a = 16$$

$$a = \frac{4}{3} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \text{by ①} \quad b &= 91 - 96 \\ b &= -5 \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

$$\text{i) linear transformation} \quad y = \frac{4}{3}x - 5 \quad \textcircled{5}$$

25

$$\begin{aligned} \text{ii) } \sigma_y &= |a| \sigma_x \\ &= \frac{4}{3} \times 12 \\ \sigma_y &= 16 \end{aligned} \quad \textcircled{5}$$

$$\text{iii} \quad \frac{4t}{3} - 5 \leq 79 \quad \textcircled{10}$$

$$\frac{4t}{3} \leq 84$$

$$t \leq 63 \quad \textcircled{5}$$

20