# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2015

## සංයුක්ත ගණිතය - I පත්‍රය

## පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

### A කොටස

1. $n = 1$ වන විට, ව.අ.පැ. $= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

ද.අ.පැ. $= \begin{pmatrix} 1+2\times1 & -4\times1 \\ 1 & 1-2\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ව.අ.පැ.

$\therefore n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

$n = p$ වන විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එවිට, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{p} = \begin{pmatrix} 1+2p & -4p \\ p & 1-2p \end{pmatrix}$ (5)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{p+1} = \begin{pmatrix} 1+2p & -4p \\ p & 1-2p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (5)

$$= \begin{pmatrix} 3(1+2p)-4p & -4(1+2p)+4p \\ 3p+1-2p & -4p-(1-2p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+2p & -4-4p \\ 1+p & -1-2p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2(p+1) & -4(p+1) \\ (p+1) & 1-2(p+1) \end{pmatrix}$$ (5)

$\therefore n = p+1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$\therefore$ සියලු $n$ ධන නිඛිල සඳහා ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මයෙන් ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. (5)

[25]

---

2. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4 + \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4$

$$= {}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4 + {}^4C_1\left(\sqrt{5}\right)^3.\sqrt{3} + {}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2 + {}^4C_3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^3 + {}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4 + {}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4$$ (5)

$$- {}^4C_1\left(\sqrt{5}\right)^3\left(\sqrt{3}\right) + {}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2 - {}^4C_3\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)^3 + {}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4$$

$$= 2\left[{}^4C_0\left(\sqrt{5}\right)^4 + {}^4C_2\left(\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2 + {}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^4\right]$$

$= 2[25 + 6\times15 + 9]$ (5)

$= 2\times124$

$= 248$ ——— (1)

The National e-Learning Portal for The General Education

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 5-3=2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 0<\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)<1 \quad (5) \quad \left(\because \sqrt{5}+\sqrt{3}>2\right)$$

$$\Rightarrow 0<\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^4<1$$

$\therefore$ (1) න්, $0<248-\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4<1$

$$\Rightarrow 247<\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^4<248$$

$$\Rightarrow n=247 \quad (5)$$

**25**

---

3. $(3-2i)(7-5i) = 21+10i^2-14i-15i$ (5)

$= 11-29i \quad (i^2=-1$ නිසා$)$ (5)

$\therefore 11+29i = (3+2i)(7+5i)$ (5)

$11^2+29^2 = 11^2-(29i)^2$

$= (11-29i)(11+29i)$

$= (3-2i)(7-5i)\,(3+2i)(7+5i)$

$= (9-4i^2)(49-25i^2)$ (5)

$= (9+4)(49+25)$

$= 13\times 74$ (5)

**25**

---

4. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)\cos x}{2\cos^2 x-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\sin x}$$

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

(5)

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Big/\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} \quad (5)$$

$$= \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \frac{-2\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{2\left[\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 - \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\left[\lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right] \text{ (5)}}{2\left[\lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 - \lim_{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \text{ (5)}}$$

$$= \frac{-2\times 1}{2(1)^2-1} \quad \text{(5)}$$

$$= -2$$

25

5. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) \quad \text{(5)}$$

$$= \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{(5)}$$

එවිට $$\mathrm{I} = \int\frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{(5)}$$

$$\therefore \mathrm{I} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)\right]+C$$ ; මෙහි $C$ අභිමත නියතයකි.

(5) + (5)

25



e-තක්සලාව The National e-learning Portal for The General Education

6. $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_T = \dfrac{T(2-3T)}{(1-T)(1-3T)}$

$T = \dfrac{1}{2}$ විට

$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{2}\right)} = -1$ (5)

එවිට $(x, y) = \left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$ (5)

ස්පර්ශකය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $(x, y)$ නම් ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$y - \dfrac{1}{8} = -1\left(x - \dfrac{1}{8}\right)$ (5)

$4x + 4y - 1 = 0$

ස්පර්ශකය $t = T'$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රය හා ඡේදනය වන්නේ යැයි ගනිමු.

එවිට $(x, y) = (T'(1-T')^2, T'^2(1-T'))$

$\Rightarrow \quad 4T'(1-T')^2 + 4T'^2(1-T') - 1 = 0$ (5)

$4T'^2 - 4T' + 1 = 0$

$(2T'-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \; T' = \dfrac{1}{2}$ ; මෙය දී තිබෙන ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප පරාමිතිය වේ. (5)

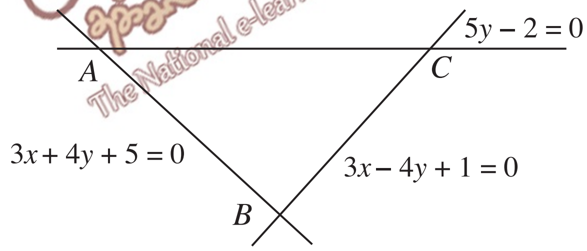
එබැවින් මෙම ස්පර්ශකය නැවත වක්‍රය හා හමු නොවේ.

එනම් වක්‍රය, $4x + 4y - 1 = 0$ ස්පර්ශකය අනුබද්ධව එකම පසක පිහිටයි.

25

---

7.




$A\hat{B}C$ යේ සමච්ඡේදක,

$\left|\dfrac{3x+4y+5}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\dfrac{3x-4y+1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\right|$ මගින් දෙනු ලැබේ. (10)

එනම්, $3x + 4y + 5 = \pm(3x - 4y + 1)$

$8y + 4 = 0$ සහ $6x + 6 = 0$

$2y + 1 = 0$ සහ $x + 1 = 0$ (5)

$2y + 1 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව $AC$ පාදයට සමාන්තර බැවින්, එය $A\hat{B}C$ යේ බාහිර සමච්ඡේදකය වේ. (5)

$x + 1 = 0$ සරල රේඛාව $AC$ පාදයට ලම්බ වේ. එය $A\hat{B}C$ යේ අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකය වේ. (5)

25

---

The National e-learning Portal for The General Education

8. $ax^2 + 2y^2 + bxy + x + 4y + 2c = 0$ මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වීම සඳහා,

$a = 2, b = 0$ සහ $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 - c > 0$ විය යුතු ය. (5)

$\therefore\ a = 2, b = 0$ සහ $c < \frac{17}{16}$. (5)

$\therefore\ c$ හි ධන නිඛිලමය අගය 1 වේ.

එවිට වෘත්තය $2x^2 + 2y^2 + x + 4y + 2 = 0$

එනම් $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + 1 = 0$

මෙහි කේන්ද්‍රය $\left(-\frac{1}{4}, -1\right)$ (5)

$(x+p)^2 + y^2 = p^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2px = 0$

වෘත්ත දෙකෙහි පොදු ජ්‍යාය : $(\frac{1}{2} - 2p)x + 2y + 1 = 0$

මුලින් දී ඇති වෘත්තයෙහි පරිධිය සමච්ඡේදනය වන නිසා, එහි කේන්ද්‍රය පොදු ජ්‍යාය මත පිහිටිය යුතු ය. (5)

$\therefore \left(\frac{1}{2} - 2p\right)\left(-\frac{1}{4}\right) + 2(-1) + 1 = 0$

$\frac{1}{2}p - \frac{1}{8} - 2 + 1 = 0$

$p = \frac{9}{4}$ (5)

**25**

---

9. $S_1 : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0 \Rightarrow C_1 \equiv (3, -4)$, $r_1 = \sqrt{9+16-9} = 4$ (5)

$S_2 : x^2 + y^2 - r^2 = 0 \Rightarrow C_2 \equiv (0, 0)$, $r_2 = r$

$S_1$ හා $S_2$ වෘත්ත දෙක ස්පර්ශවීම සඳහා $C_1C_2 = r_1 + r_2$ හෝ $C_1C_2 = |r_1 - r_2|$

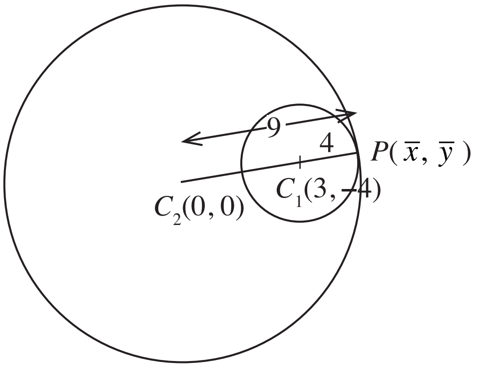
$5 = 4 + r$ හෝ $5 = |r - 4|$

$r = 1$ (5) $\quad r - 4 = \pm 5$

$r = 4 \pm 5$

$r > 0$ නිසා $r = 9$ (5)

$S_1$ හා $S_2$ වෘත්ත අභ්‍යන්තරව ස්පර්ශ වන විට,
$C_2C_1$ රේඛාව, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය වන
$P$ හිදී $C_2P : PC_1 = 9 : 4$
වන පරිදි බාහිරව බෙදේ. (5)




$\therefore P \equiv \left[\frac{9\times3 - 4\times0}{9-4}, \frac{9\times(-4) - 4\times0}{9-4}\right]$

$\equiv \left(\frac{27}{5}, -\frac{36}{5}\right)$ (5)

**25**

---

The National e-learning Portal for The General Education

[6 වන පිටුව බලන්න

10. cosine සූත්‍රයෙන්,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$16 = 25 + 36 - 60\cos C \quad (5)$$

$$\cos C = \frac{45}{60}$$

$$= \frac{3}{4}$$

sine සූත්‍රයෙන්,

$$\frac{6}{\sin B} = \frac{4}{\sin C} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{3}{2}\sin C \qquad \therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{3}{2} \text{ වේ.}$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} \times \sin C$$

$$= 2\cos C \sin C \quad (5)$$

$$= \sin 2C$$

$\therefore \hat{B} = 2\hat{C}$ හෝ $\hat{B} = \pi - 2\hat{C}$ ; $(0 < \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} < \pi$ නිසා) (5)

$\hat{A} \neq \hat{C}$ නිසා, $\hat{B} \neq \pi - 2\hat{C}$ වේ. ; $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ නිසා) (5)

$\therefore \hat{B} = 2\hat{C}$ වේ.

25

The National e-learning Portal for The General Education

## B කොටස

11. (a) $\alpha+\beta=-b,\ \ \alpha\beta=c$ ⑤

$p+q = \alpha+\beta+\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = b^2-b-2c$ ⑤

$pq = \alpha^3+\beta^3+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2$

$= -b^3+3cb+c+c^2$ ⑤

$\therefore$ මූල $p$ හා $q$ වන වර්ගජ සමීකරණය,

$$x^2-(b^2-b-2c)x-b^3+3cb+c+c^2 = 0$$ ⑤+⑤

25

මෙහි විවේචකය,

$\Delta_x = (b^2-b-2c)^2+4(b^3-3bc-c-c^2)$ ⑤

$= b^4+b^2+4c^2-2b^3+4bc-4b^2c+4b^3-12bc-4c-4c^2$

$= b^4+2b^3+b^2-4b^2c-8bc-4c$

$= b^2(b^2+2b+1)-4c(b^2+2b+1)$

$= (b+1)^2(b^2-4c)$ ⑤

$\alpha$ හා $\beta$ අතාත්ත්වික වන විට $b^2-4c<0$ වේ. ⑤

$\therefore\ \Delta_x \le 0$ වේ. ⑤

$\therefore\ b=-1$ නම් හා නම් ම පමණක් $\Delta_x=0$ වේ. ⑤

එනම් $b=-1$ නම් හා නම් ම පමණක් $p$ හා $q$ තාත්ත්වික වේ.

මෙම අවස්ථාවේ දී $\Delta_x=0$ බැවින් $p=q$ වේ. ⑤

එවිට $p+q = (-1)^2-(-1)-2c$ ⑤

$2p = 2-2c$

$p = 1-c$

$\therefore\ p = q = 1-c$

35

(b) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ලෙස ගනිමු. ⑤

$\Rightarrow\quad (y-1)x^2+(y-4)x+(y-4) = 0$ ⑤

$y=1$ විට $x=-1$ වේ. එවිට වර්ගජ සමීකරණයක් නොපවතී.

$$\Rightarrow\quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2+\frac{(y-4)}{(y-1)}-\left(\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2\right]=0 \quad (y\neq 1)$$

$$\Rightarrow\quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2+\frac{4(y-1)(y-4)-(y-4)^2}{4(y-1)^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2+\frac{(y-4)(4y-4-y+4)}{4(y-1)^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad (y-1)\left[\left(x+\frac{y-4}{2(y-1)}\right)^2+\frac{3y(y-4)}{4(y-1)^2}\right]=0$$ ⑤

[8 වන පිටුව බලන්න

The National e-learning Portal for The General Education

සියලු තාත්ත්වික $x$ සඳහා, $\dfrac{3y(y-4)}{4(y-1)^2} \leq 0$

$\Rightarrow \quad 3y(y-4) \leq 0$ , (5) $(y-1)^2 > 0$ බැවින්,

$\Rightarrow \quad 0 \leq y \leq 4$ (5)

$\Rightarrow \quad 0 \leq \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1} \leq 4$

$\Rightarrow \quad y_{අවම} = 0$ සහ $y_{උපරිම} = 4$ (5)

$x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ බැවින්, $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ හි ප්‍රස්තාරය සන්තතික වේ.

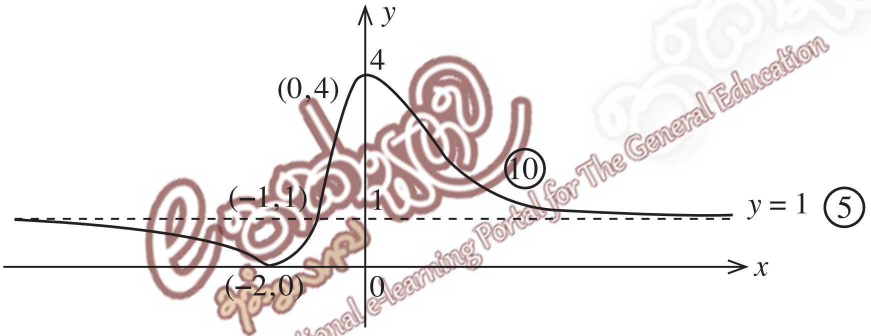
$(0, 4)$ උපරිමයකි. (5)

$(-2, 0)$ අවමයකි. (5)

$y = 1$ විට $x^2 + x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$

$y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x+1} = \dfrac{1 + 4/x + 4/x^2}{1 + 1/x + 1/x^2}$, $x \neq 0$ සඳහා

$x \to \pm\infty$ විට $y \to 1$ (5)




60

---

(c) $x^2 + kx + 1$, $x^4 - 12x^2 + 8x + 3$ හි සාධකයක් වන විට,

$x^4 - 12x^2 + 8x + 3 \equiv (x^2 + kx + 1)(x^2 + \lambda x + 3)$ වන පරිදි $\lambda \in \mathbb{Z}$ පවතී.

(5)

$\Rightarrow \quad k + \lambda = 0$ සහ $\lambda + 3k = 8$ (5)

$\Rightarrow \quad k = 4$ (5)

$\Rightarrow \quad \lambda = -4$

$x^4 - 12x^2 + 8x + 3 = 0$

$(x^2 + 4x + 1)(x^2 - 4x + 3) = 0$ (5)

$x^2 + 4x + 1 = 0$ හෝ $x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$ හෝ $(x-1)(x-3) = 0$

$= -2 \pm \sqrt{3}$ (5) හෝ $x = 1$ හෝ $x = 3$ (5)

30

---

12. (a) එක් ළමයකුට අඩුම තරමින්, රුපියල් තුනක්වත් ලැබිය යුතු බැවින් ඒ සඳහා රුපියල් 15ක් වෙන් කළ යුතු වේ. එවිට ඉතිරි රුපියල් තුන ළමයින් පස්දෙනා අතර පහත දැක්වෙන ආකාරවලට බෙදිය හැකි ය. (5)

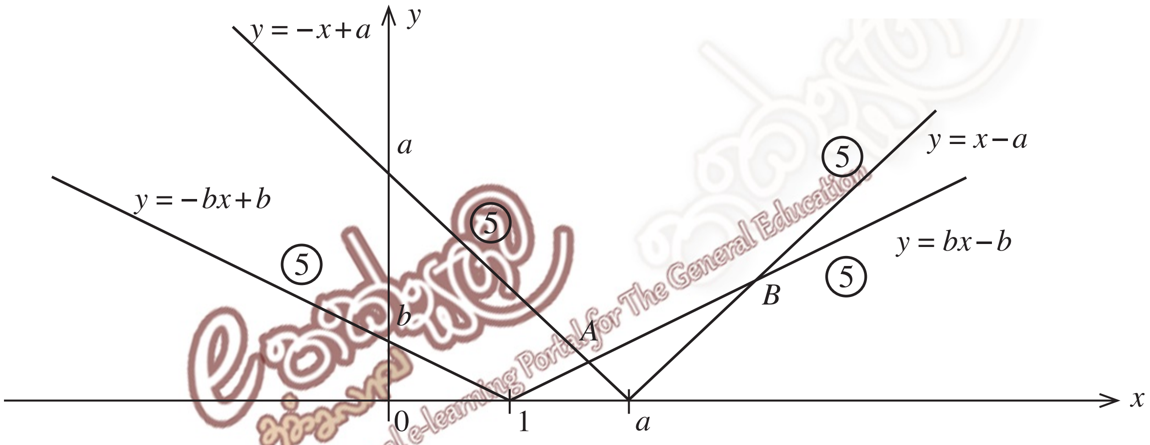
| | මුදල් බෙදීම | | | | | | ආකාර ගණන | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (i) | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | (5) | $\frac{5!}{4!} = 5$ | (5) |
| (ii) | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | (5) | $\frac{5!}{3!} = 20$ | (5) |
| (iii) | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | (5) | $\frac{5!}{3!2!} = 10$ | (5) |

$\therefore$ මුළු ආකාර ගණන $= 5 + 20 + 10$ (5)
$= 35$

40

---

(b)



The National e-learning Portal for The General Education

$a > b > 0$

$b|x-1| > |x-a|$ හි විසඳුම් කුලකය $\{x \mid 3 < x < 7\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ බැවින්,

$A \equiv (3, y_A)\ ;\ B \equiv (7, y_B)$ විය යුතුය. (5)

$y_A$ සැලකීමෙන්, $-3 + a = 3b - b \Rightarrow a - 2b = 3$ ——— (1) (5)

එලෙසම $y_B$ සැලකීමෙන්, $7 - a = 7b - b \Rightarrow a + 6b = 7$ ——— (2) (5)

(1) සහ (2) න්, $a = 4,\ b = \frac{1}{2}$ (5)

40

---

(c) $u_r \equiv \frac{A}{r+1} + \frac{B}{r+2} + \frac{C}{r+3} \equiv \frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}$ ලෙස ගනිමු. (5)

එවිට $A(r+2)(r+3) + B(r+1)(r+3) + C(r+1)(r+2) \equiv 3r+1$ වේ.

$r^2$ හි සංගුණක සැලකීමෙන්, $A + B + C = 0$
$r$ හි සංගුණක සැලකීමෙන්, $5A + 4B + 3C = 3$
නියත පද සැලකීමෙන්, $6A + 3B + 2C = 1$
(10)

ඉහත සමීකරණ විසඳීමෙන්, $A = -1, B = 5, C = -4$ (10)

$$\therefore u_r \equiv -\frac{1}{r+1} + \frac{5}{r+2} - \frac{4}{r+3}$$

[10 වන පිටුව බලන්න

$$\equiv -\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+2}\right)+4\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+3}\right)$$ (5)

මෙය $\lambda[f(r)-f(r+1)] + \mu[f(r+1)-f(r+2)]$ ආකාර වේ.

මෙහි $\lambda=-1, \mu=4$ සහ $f(r)=\left(\frac{1}{r+1}\right)$ වේ. (5)

(5)

$$u_r \equiv \lambda[f(r)-f(r+1)] + \mu[f(r+1)-f(r+2)]$$

$$\therefore u_1 = \lambda[f(1)-f(2)] + \mu[f(2)-f(3)]$$

$$u_2 = \lambda[f(2)-f(3)] + \mu[f(3)-f(4)]$$ (5)

$$\vdots$$

$$u_{n-1} = \lambda[f(n-1)-f(n)] + \mu[f(n)-f(n+1)]$$

$$u_n = \lambda[f(n)-f(n+1)] + \mu[f(n+1)-f(n+2)]$$ (5)

එකතු කිරීමෙන්,

$$\sum_{r=1}^{n} u_r = \lambda[f(1)-f(n+1)] + \mu[f(2)-f(n+2)]$$

$$= -1\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right]+4\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right]$$ (5)

$$= \frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}$$

$$= \frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}-\frac{4}{n+3}\right]$$

$$= \frac{5}{6}$$ (5)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} u_r$ පරිමිත වන බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. (5)

තවද සියලු $r \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා $u_r > 0$ වේ.

$\therefore u_1 \leq S_n < S_\infty$ (5)

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)} < \frac{5}{6}$$

70

The National e-learning Portal for The General Education

13. (a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} \quad ⑤$$

$$\det(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ⑤$$

$$\Rightarrow (5+\lambda)(2+\lambda) - 18 = 0 \quad ⑤$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+8) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1$ හෝ $\lambda = -8$ ⑤

$$\mathbf{PX} = \lambda\mathbf{X}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5x+3y \\ 6x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ වන විට, $\left.\begin{aligned} -5x + 3y &= x \\ 6x - 2y &= y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -6x + 3y &= 0 \\ 6x - 3y &= 0 \end{aligned}$ ⑤

ඉහත සමීකරණ දෙක එකිනෙකට තුල්‍ය බැවින්,
$x = t$ යැයි ගත්විට $y = 2t$ වේ. මෙහි $t$ යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි.

$$\therefore X = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ⑤$$

$\lambda = -8$ වන විට, $\left.\begin{aligned} -5x + 3y &= -8x \\ 6x - 2y &= -8y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3x + 3y &= 0 \\ 6x + 6y &= 0 \end{aligned}$ ⑤

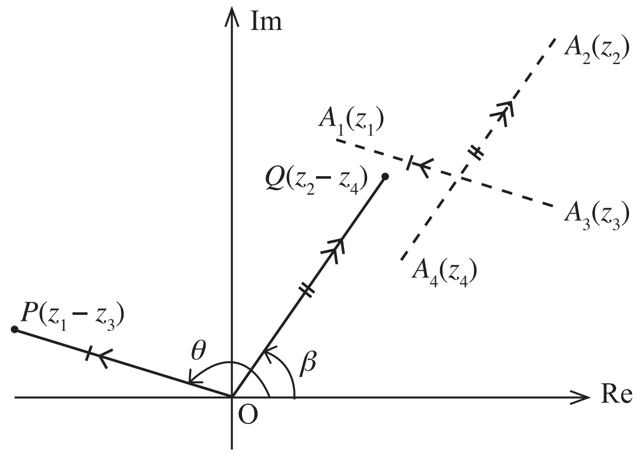
මෙම සමීකරණ දෙක ද එකිනෙකට තුල්‍ය බැවින්,
$x = T$ යැයි ගත්විට $y = -T$ වේ. මෙහි $T$ යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි.

$$\therefore X = \begin{pmatrix} T \\ -T \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ⑤$$

40

The National e-learning Portal for The General Education

(b)



$P$ සහ $Q$ යනු පිළිවෙළින් $OP // A_3A_1, OP = A_3A_1$ සහ $OQ // A_4A_2, OQ = A_4A_2$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි.

එවිට $z_P = z_1 - z_3$ සහ $z_Q = z_2 - z_4$ වේ. (10)

$$\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}\right| = \frac{|z_1 - z_3|}{|z_2 - z_4|} = \frac{OP}{OQ} = \frac{A_1A_3}{A_2A_4} \quad (10)$$

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}\right) = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_4) = \theta - \beta = P\hat{O}Q$$

$\beta > \theta$ විට $|\theta - \beta| = P\hat{O}Q$ වේ.

$P\hat{O}Q = A_1A_3$ සහ $A_2A_4$ අතර කෝණය වේ. (10)

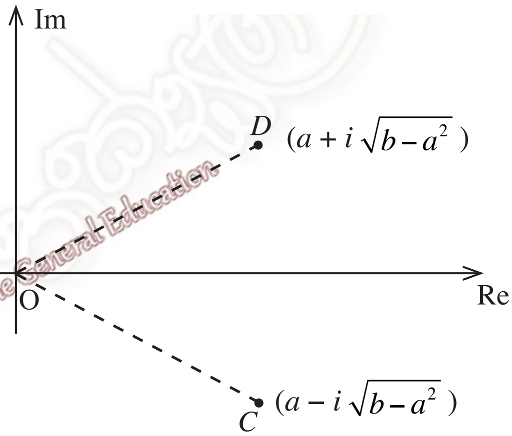
එබැවින්, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා $A_1A_3 \perp A_2A_4$ විය යුතුය. (5)

35

---

$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \pm i$

$z^2 - 2az + b = 0 \quad \Rightarrow \quad z = a \pm i\sqrt{b - a^2}$




(i) $C\hat{O}D = \dfrac{\pi}{2}$ නම්,

$\dfrac{a + i\sqrt{b-a^2}}{a - i\sqrt{b-a^2}}$ හුදෙක් අතාත්ත්වික වේ. (5)

$$\frac{a + i\sqrt{b-a^2}}{a - i\sqrt{b-a^2}} = \frac{a^2 - (b-a^2) + 2ia\sqrt{b-a^2}}{a^2 + (b-a^2)}$$

හුදෙක් අතාත්ත්වික වීම සඳහා තාත්ත්වික කොටස $= 0 \Rightarrow 2a^2 = b$ (10)

(ii) $OA = OB = OC = OD$

$\therefore\ z_A\bar{z}_A = z_D\bar{z}_D$ (5)

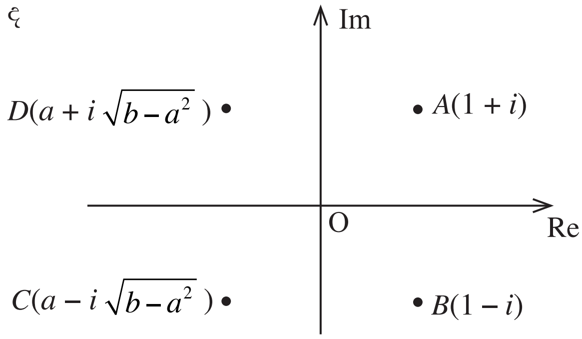
$\Rightarrow\ 2 = a^2 + b - a^2$ (10)

$\Rightarrow\ b = 2$

(iii) $ABCD$ සමචතුරස්‍රයක් ද එහි කේන්ද්‍රය $O$ ද වන විට, සමමිතිකත්වයෙන්, (5)

$a = -1$ සහ $\sqrt{b - a^2} = 1$

$\Rightarrow\ b = 2$ (10)



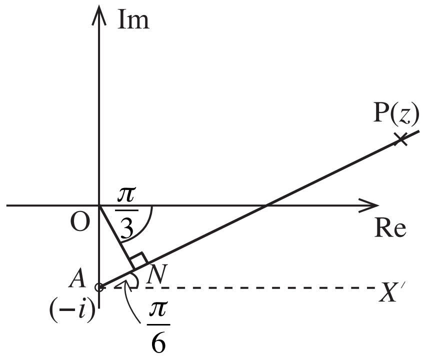

45

---

The National e-Learning Portal for The General Education

[13 වන පිටුව බලන්න

(c) $\arg[(z+i)i] = \frac{2\pi}{3}$




$\arg(z+i) + \arg i \;=\; \frac{2\pi}{3}$

$\therefore \arg(z+i) \;=\; \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ ⑤

$\Rightarrow \arg(z-(-i)) = \frac{\pi}{6}$ ⑤

$\therefore P\hat{A}X' = \frac{\pi}{6}\,;\, P \neq A$ ⑤

$P$ හි පථය රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අඩ සරල රේඛාවක් වේ.

$OP = |z|$ ⑤

$\therefore |z|_{\text{අඩුතම}} = ON = 1.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤

$z_N \;=\; \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right\}$

$\;=\; \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i$ ⑤ **30**

---

14. (a) $f(x) = \frac{3-4x}{x^2+1}\,,\; x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{(x^2+1)(-4)-(3-4x)2x}{(x^2+1)^2}$ ⑩ $= \frac{2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$

$x = -\frac{1}{2}$ සහ $x = 2$ දී $f'(x) = 0$ ⑩ බැවින් හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත.

සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $f$ ශ්‍රිතය සන්තතික වේ.

| $x$ | $-\infty < x < -\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2} < x < 2$ | $2 < x < \infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\frac{(-)(-)}{(+)} > 0$ | $\frac{(+)(-)}{(+)} < 0$ | $\frac{(+)(+)}{(+)} > 0$ |

⑩

$x = -\frac{1}{2}\,,\, y = 4$ උපරිමයකි. ⑤

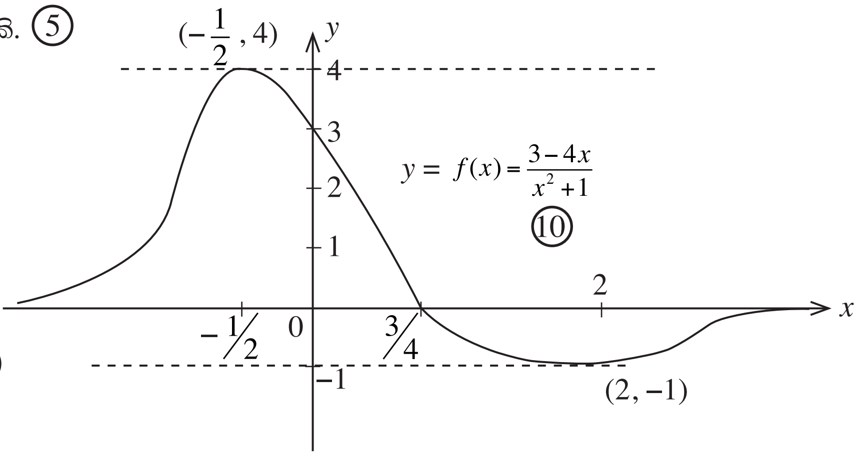
$x = 2, y = -1$ අවමයකි. ⑤

$x = 0$ විට $y = 3$

$x = \frac{3}{4}$ විට $y = 0$ ⑤

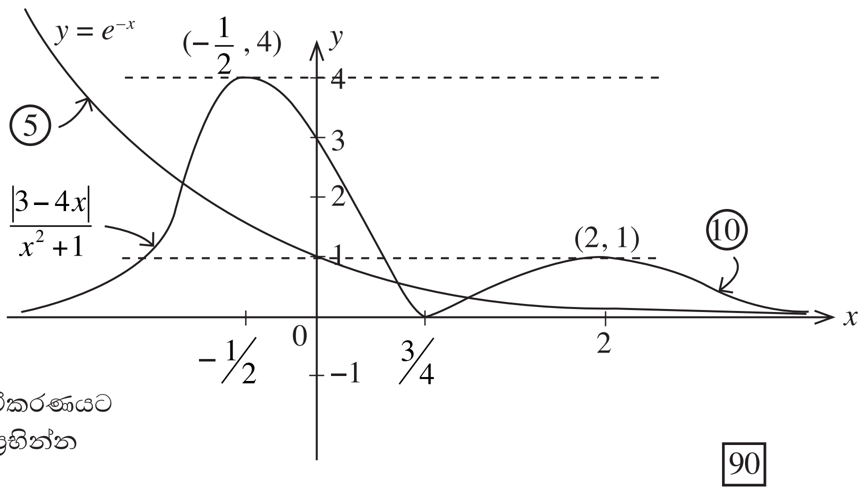
$y = \frac{3/x^2 - 4/x}{1 + 1/x^2}$

$x \to \pm\infty,\; y \to 0$ ⑤



$|3-4x|e^{x}-x^{2}-1=0$ ———— (1)

$e^{-x} = \dfrac{|3-4x|}{x^{2}+1}$ (5)



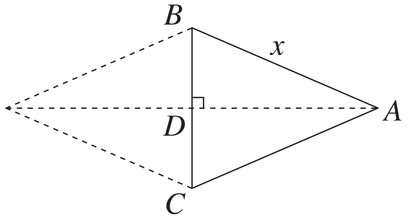

(1) සමීකරණයේ මූල වන්නේ, $y = e^{-x}$ වක්‍රය සහ $y = \dfrac{|3-4x|}{x^{2}+1}$ වක්‍රය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යවල $x$ - ඛණ්ඩාංකයි. (5)

∴ ප්‍රස්තාරයට අනුව, (1)සමීකරණයට අඩුම වශයෙන් තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල තුනක් ඇත. (5)

[90]

---

(b)




$AB = x$ වන විට, ජනිත ඝන වස්තුවේ පරිමාව $V$ යැයි ගනිමු.

එවිට $BC = 2s - 2x$,

$BD = \dfrac{2s-2x}{2} = s - x$ (5)

$AD = \sqrt{AB^{2}-BD^{2}} = \sqrt{x^{2}-(s-x)^{2}} = \sqrt{2sx-s^{2}}$

$= \sqrt{s(2x-s)}$ (5) ; $x > \dfrac{s}{2}$ (5)

The National e-learning Portal for The General Education

$V = \dfrac{1}{3}\pi AD^{2}.\,2BD$ (5)

$= \dfrac{1}{3}\pi s(2x-s).\,2(s-x)$ (5)

$= \dfrac{2\pi}{3}\, s(2x-s)(s-x)$

$\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{2}{3}\pi s[(2x-s)(-1)+(s-x)2]$ (5)

$= \dfrac{2}{3}\pi s[-2x+s+2s-2x]$

$= \dfrac{2}{3}\pi s(3s-4x)$ (5)

$x = \dfrac{3}{4}s$ විට $\dfrac{dV}{dx} = 0$ වේ. (5)

$\dfrac{s}{2} < x < \dfrac{3s}{4}$ විට $\dfrac{dV}{dx} > 0$ වේ ; $V$ වැඩිවේ.

$\dfrac{3s}{4} < x < s$ විට $\dfrac{dV}{dx} < 0$ වේ ; $V$ අඩුවේ. (10)

∴ $x = \dfrac{3}{4}s$ වන විට $V$ උපරිම වේ. (5)

∴ පරිමාව උපරිම වන පරිදි $AB$ දිග $\dfrac{3}{4}s$ වේ. (5)

[60]

---

[15 වන පිටුව බලන්න

15. (a) $\dfrac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)} \equiv A+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

$\Rightarrow x^2+3x+5 \equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)$

$x^2$ හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $A=1$ (5)

$x=1$ විට $B=3$ (5)

$x=-2$ විට $C=-1$ (5)

$\therefore \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int_0^2 dx + 3\int_0^2 \frac{1}{x-1}\,dx - \int_0^2 \frac{1}{x+2}\,dx$ (5)

$= [x]_0^2 + 3\big[\ln|x-1|\big]_0^2 - \big[\ln|x+2|\big]_0^2$ (10)

$= 2+3\,[\ln 1-\ln 1]-[\ln 4-\ln 2]$

$= 2-\ln 2$ (5)

35

---

(b) $\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \int \sin 3x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx$ (5)

$= \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \displaystyle\int \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx + C$ (10)

$= \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx\right] + C'$ (10)

$= \dfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \dfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x - \dfrac{9}{4}\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx + C'$ (5)

$\Rightarrow \dfrac{13}{4}\displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \dfrac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C'$ (10)

$\Rightarrow \displaystyle\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \dfrac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) + C$ ; මෙහි $C$ අභිමත නියතයකි. (5)

45

---

(c) $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$x = \sin\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$

$x=1$ නම්, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$x=0$ නම්, $\theta = 0$ (5)

$\therefore \mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta$ (5)

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,d\theta$ ——— (1)

$\theta = \frac{\pi}{2} - t$ නම්,

$\frac{d\theta}{dt} = -1$ ⑤

$\theta = 0$ නම්, $t = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ නම්, $t = 0$ ⑤

$$\therefore I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}(-dt)$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\, dt$$ ⑤

$t$, $\theta$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

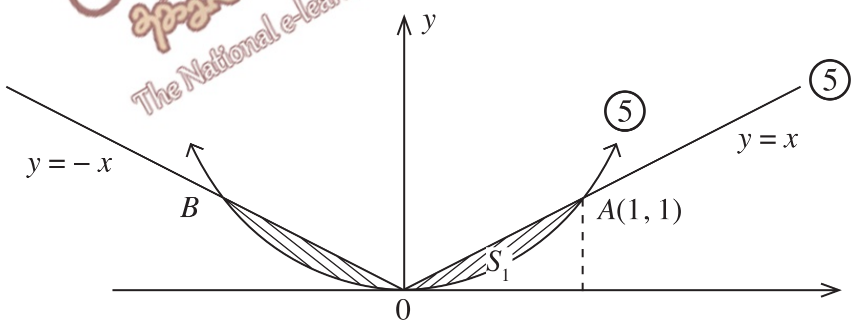
$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\, d\theta \text{ ———— } (2)$$ ⑤

$$(1) + (2)\ ; \quad 2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2}$$ ⑤ + ⑤

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

40

(d) $S = \{(x, y) : x^2 \le y \le |x|\}$ ලෙස ගනිමු.




$y = x$ සහ $y = x^2$ විසඳීමෙන්

$A \equiv (1, 1)$ ⑤

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \int_0^1 x^2\, dx$$ ⑤

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)$$ ⑤

$$= \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

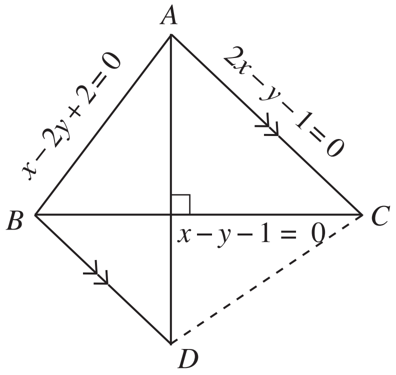
$\therefore$ ආවෘත වර්ගඵලය $2S_1 = \frac{1}{3}$ වර්ග ඒකක ⑤

30



The National e-learning Portal for The General Education

16. (a) $A \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ (5)




$B \equiv (4, 3)$ (5)

$AD$ රේඛාවේ සමීකරණය,

$y - \frac{5}{3} = -1\left(x - \frac{4}{3}\right)$ (10)

$y - \frac{5}{3} = -x + \frac{4}{3}$

$x + y - 3 = 0$ (5)

$BD \,//\, AC$ නිසා, $BD$ රේඛාවේ සමීකරණය $2x - y - k = 0$ ලෙස ගත හැකිය. මෙහි $k$ නියතයකි. (5)

එය $B$ හරහා යන නිසා, $8 - 3 - k = 0$

$\therefore\ k = 5$ (5)

$\therefore$ $BD$ රේඛාවේ සමීකරණය $2x - y - 5 = 0$ (5)

$C \equiv (0, -1)$ (5)

$D \equiv \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (5)

$\therefore$ $CD$ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{\frac{1}{3}+1}{\frac{8}{3}-0} = \frac{1}{2}$ (5)

$AB$ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{3-\frac{5}{3}}{4-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ (5)

$\therefore$ $AB \,//\, CD$ (5)

තවද $BD \,//\, AC$ ද වන බැවින්, $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයකි. (5)

එහි විකර්ණ ලම්බ වන බැවින්, $ABDC$ රොම්බසයකි. (5)

75

---

(b) $|r_1 - r_2| < C_1C_2 < r_1 + r_2$ (10)

$x^2 + y^2 + 6x + 2fy = 0$ සහ $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ නම්,

$2.3.0 + 2f(-1) = 0 + (-3)$ (10)

$\Rightarrow\ f = \frac{3}{2}$

$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2fy = 0$ සහ $S_2 \equiv x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ වෘත්ත දෙක $P_1(x_1, y_1)$ සහ $P_2(x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍ය දෙකෙහිදී ඡේදනය වන්නේ යැයි ගනිමු.

$S_1 + \lambda S_2 = 0 \Rightarrow (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f - \lambda)y - 3\lambda = 0$

$\therefore$ $\lambda$ පරාමිතියක් වන විට,

මෙම සමීකරණය මගින් වෘත්තයක් නිරූපණය වේ. (5)

$S_1 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ හරහා යන නිසා, $x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 + 2fy_1 = 0$ ——— (1)

$S_2 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ හරහා යන නිසා, $x_1^2 + y_1^2 - 2y_1 - 3 = 0$ ——— (2)

$(1) + \lambda(2)$ න්, $(1+\lambda)x_1^2 + (1+\lambda)y_1^2 + 6x_1 + 2(f - \lambda)y_1 - 3\lambda = 0$

එනම් $S_1 + \lambda S_2 = 0$ වෘත්තය $P_1(x_1, y_1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. (10)

එලෙසම, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ වෘත්තය $P_2(x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා ද යන බව පෙන්විය හැකිය. (5)

[18 වන පිටුව බලන්න

$\therefore$ $S_1 + \lambda S_2 = 0$ මගින් $S_1 = 0$ සහ $S_2 = 0$ වෘත්ත දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා යන ඕනෑම වෘත්තයක් නිරූපණය වේ. මෙහි $\lambda$ පරාමිතියකි.

(i) $S_1 + \lambda S_2 \equiv (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f-\lambda)y - 3\lambda = 0$. මෙහි $f = \frac{3}{2}$

මෙය $(-2, 2)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන විට, $(1+\lambda)4 + (1+\lambda)4 - 12 + 2(\frac{3}{2} - \lambda)(2) - 3\lambda = 0$ (10)

$\Rightarrow 8 - 12 + 6 + 8\lambda - 4\lambda - 3\lambda = 0$

$\Rightarrow 2 + \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = -2$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $-x^2 - y^2 + 6x + 7y + 6 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 7y - 6 = 0$ (5)

(ii) පොදු ජ්‍යායේ සමීකරණය, $S_1 - S_2 = 0$

$6x + (2f + 2)y + 3 = 0$

$6x + 5y + 3 = 0$ (5)

$S_1 + \lambda S_2 = (1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 + 6x + 2(f-\lambda)y - 3\lambda = 0$

කේන්ද්‍රය $\equiv \left[-\frac{3}{1+\lambda}, \frac{\lambda - f}{1+\lambda}\right]$ (5)

කුඩාම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය, පොදු ජ්‍යාය මත පිහිටන බැවින්,

$6\left(-\frac{3}{1+\lambda}\right) + 5\left(\frac{\lambda - f}{1+\lambda}\right) + 3 = 0$ මෙහි $f = \frac{3}{2}$ (5)

$-18 + 5\lambda - 5f + 3 + 3\lambda = 0$

$8\lambda = 18 - 3 + \frac{15}{2} = \frac{45}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{45}{16}$

$\therefore$ අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $\frac{61}{16}x^2 + \frac{61}{16}y^2 + 6x + 2\left(\frac{3}{2} - \frac{45}{16}\right)y - \frac{135}{16} = 0$

$61x^2 + 61y^2 + 96x - 42y - 135 = 0$ (5)

75

---

17. (a) $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2}$

$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{3}{2}$ (10)

$A + B + C = \pi$ නිසා, $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$

$2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right] = \frac{1}{2}$ (5)

$\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}}$

$\Rightarrow \cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2} + \frac{1}{4\sin\frac{A}{2}}$

The National e-learning Portal for The General Education

[19 වන පිටුව බලන්න

$$= \frac{4\sin^2\frac{A}{2}+1}{4\sin\frac{A}{2}}$$ (5)

$$= \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2+4\sin\frac{A}{2}}{4\sin\frac{A}{2}}$$ (5)

$$= \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}}+1$$

$\cos\frac{B-C}{2} \leq 1$ නිසා $\frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{4\sin\frac{A}{2}}+1 \leq 1$ (5)

$\Rightarrow \frac{\left(1-2\sin\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\frac{A}{2}} \leq 0$ (5)

$0<A<\pi$ නිසා $\sin\frac{A}{2}>0$ වේ. $\therefore\ 1-2\sin\frac{A}{2}=0$ විය යුතුය.

එවිට $\cos\frac{B-C}{2}=1$ සහ $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ (5)

$\Rightarrow B=C$ සහ $A=\frac{\pi}{3}$ ; $0<A<\pi$ නිසා, (5)

$\Rightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow ABC$ ත්‍රිකෝණය සමපාද වේ.

45

The National e-learning Portal for The General Education

---

(b) $f(\theta) \equiv 3\cos^2\theta+10\sin\theta\cos\theta+27\sin^2\theta$

$\equiv \frac{3}{2}[1+\cos2\theta]+5\sin2\theta+\frac{27}{2}[1-\cos2\theta]$ (5)

$\equiv 15-12\cos2\theta+5\sin2\theta$

$\equiv 15-13\left[\frac{12}{13}\cos2\theta-\frac{5}{13}\sin2\theta\right]$ (5)

$\equiv 15-13[\cos2\theta\cos\alpha-\sin2\theta\sin\alpha]$ (5) මෙහි $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ සහ $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ (5)

වන පරිදි $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$\equiv 15-13\cos(2\theta+\alpha)$

$\therefore f(\theta)= a+b\cos(2\theta+\alpha)$ ආකාරය වේ.

මෙහි $a=15, b=-13$ (5), $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ (5) වේ. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$f(\theta) \equiv 15-13\cos(2\theta+\alpha)$ ; මෙහි $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$

සියලු $\theta$ සඳහා $f(\theta)$ සන්තතික වේ.

$\theta = 0$ වන විට $f(0) = 15 - 13\cos\alpha = 15 - 12 = 3$

$\theta = \pi$ වන විට $f(\pi) = 15 - 13\cos(2\pi + \alpha) = 15 - 13\cos\alpha = 3$

$-1 \le \cos(2\theta + \alpha) \le 1 \Rightarrow -13 \le 13\cos(2\theta+\alpha) \le 13 \Rightarrow -13 \le -13\cos(2\theta+\alpha) \le 13$

(5) $\Rightarrow 2 \le 15 - 13\cos(2\theta + \alpha) \le 28$

$\Rightarrow 2 \le f(\theta) \le 28$ (5)

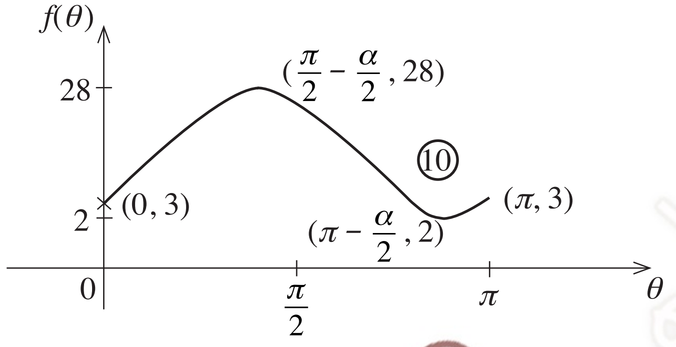
අවම ලක්ෂ්‍යයේදී $f(\theta) = 2$. එවිට $\cos(2\theta+\alpha) = 1 \Rightarrow 2\theta + \alpha = 2n\pi$; මෙහි $n \in Z$ (5)

$\theta = n\pi - \frac{\alpha}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$ නිසා (5)

උපරිම ලක්ෂ්‍යයේදී $f(\theta) = 28$. එවිට $\cos(2\theta+\alpha) = -1 \Rightarrow 2\theta + \alpha = 2n\pi \pm \pi$, $n \in Z$ (5)

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\theta \in [0, \pi]$ නිසා (5)

$f(\theta) \ne 0$ වේ.




$f(\theta) - k = 0$ සමීකරණයට

(i) එක් විසඳුමක් පමණක් ඇත්තේ, $k = 2$ වන විට හා $k = 28$ වන විට ය. (5)

(ii) විසඳුම් දෙකක් ඇත්තේ, $2 < k < 3$ වන විට හා $3 < k < 28$ වන විට ය. (5)

(iii) විසඳුම් තුනක් ඇත්තේ, $k = 3$ වන විට ය. (5)

(iv) විසඳුම් නොමැත්තේ, $k < 2$ වන විට හා $k > 28$ වන විට ය. (5)

The National e-learning Portal for The General Education

90

---

(c) $\sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (5)

$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ද $\beta = \sin^{-1}x$ ද යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$

$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)$

$= -\sin\beta$ (5)

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = -x$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (5)

$\alpha = \sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{3}}$

$= \sqrt{\frac{1}{3}}$

15

---

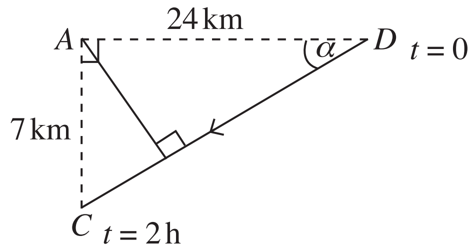
# අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2015

## සංයුක්ත ගණිතය - II පත්‍රය

## පිළිතුරු සඳහා මග පෙන්වීම

### A කොටස

1. නැවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවේ පෙත :

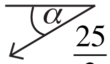



$DC = \sqrt{24^2 + 7^2}$ km $= 25$ km

$\tan\alpha = \dfrac{7}{24}$ (5)

$S$ - නැව, $B$ - බෝට්ටුව, $E$ - පොළව

(i) $V_{B,S} =$




$\dfrac{25}{2}$ km h$^{-1}$ (5)

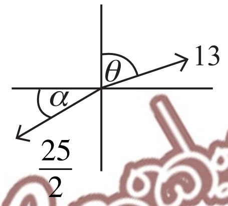
නැව හා බෝට්ටුව අතර කෙටිම දුර $= 24\sin\alpha$ km

$= 24 \cdot \dfrac{7}{25}$ km

$= \dfrac{168}{25}$ km (5)

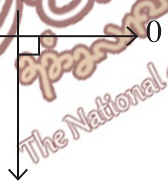
(ii) $V_{B,E} = V_{B,S} + V_{S,E}$

$=$




(5) $\tan\theta = \dfrac{12}{5}$

$=$




$13\sin\theta - \dfrac{25}{2}\cos\alpha$

$= 13 \cdot \dfrac{12}{13} - \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{24}{25}$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\dfrac{25}{2}\sin\alpha - 13\cos\theta$

$= \dfrac{25}{2} \cdot \dfrac{7}{25} - 13 \cdot \dfrac{5}{13}$

$= \dfrac{7}{2} - 5$

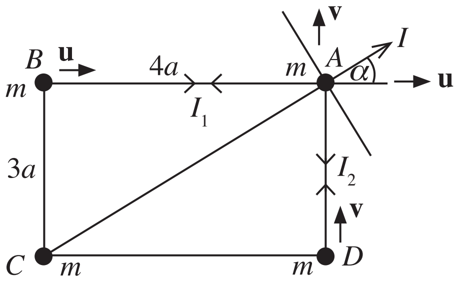
$= -\dfrac{3}{2}$

$\therefore V_{B,E} = \uparrow \dfrac{3}{2}$ km h$^{-1}$ (උතුරට) (5)

**25**

The National e-learning Portal for The General Education

2. $AB \perp BC$ සහ $AD \perp DC$ නිසා,
$A$ ට යෙදෙන ආවේගය අනුව $AB$ සහ $AD$ තන්තු දිගේ
$I_1$ හා $I_2$ ආවේග ඇති වුවත් $BC$ සහ $DC$ තන්තු දිගේ
ආවේග ඇති නොවේ. (5)
තන්තු අවිතන්‍ය බැවින්,
$BA$ දිශාවට $A$ හා $B$ හි අංශුවල ප්‍රවේග $\mathbf{u}$ ද
$DA$ දිශාවට $A$ හා $D$ හි අංශුවල ප්‍රවේග $\mathbf{v}$ ද යැයි ගනිමු. (5)



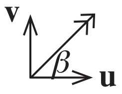

පද්ධතියටම, $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්, $I\cos\alpha = 2m\mathrm{u}$
පද්ධතියටම, $\overrightarrow{DA}$ දිශාවට $\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්, $I\sin\alpha = 2m\mathrm{v}$ (5)

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ සහ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ වේ.

$$\therefore u = \frac{4}{5}I \cdot \frac{1}{2m} = \frac{2I}{5m}$$

$$v = \frac{3}{5}I \cdot \frac{1}{2m} = \frac{3I}{10m} \quad (5)$$

$\therefore A$ හි ප්‍රවේගය $= \frac{I}{10m}\sqrt{4^2+3^2} = \frac{I}{2m}$




$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \alpha$$

$B$ හි ප්‍රවේගය $= BA$ දිශාවට $\frac{2I}{5m}$

$C$ හි ප්‍රවේගය $= 0$

$D$ හි ප්‍රවේගය $= DA$ දිශාවට $\frac{3I}{10m}$ (5)

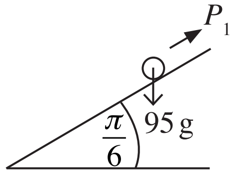
25

---

The National e-Learning Portal for The General Education

3. තිරස් චලිතය සඳහා, $Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 3P$ ——— (1)
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P - k \cdot 3^2 = 0$ ——— (2)
(5)
$\Rightarrow H = 27k$ ——— (3)

ආනත තලය දිගේ ඉහළට චලිතය සඳහා,
$Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 2P_1$ ——— (4)

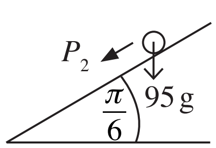



$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P_1 - 95\,\mathrm{g}\sin\frac{\pi}{6} - k \cdot 2^2 = 0$ ——— (5) (5)

$$\Rightarrow \frac{H}{2} = 475 + 4k \text{ ——— (6)}$$

(3) සහ (6) න්, $19k = 950 \Rightarrow k = 50$
$H = 1350\,\mathrm{W} = 1.35\,\mathrm{kW}$ (5)

ආනත තලය දිගේ පහළට චලිතය සඳහා,




$Pv = H$ යෙදීමෙන්, $H = 4P_2$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $P_2 + 95\,\mathrm{g}\sin\frac{\pi}{6} - 50 \cdot 4^2 = 95a$ (5)

$$\frac{1350}{4} + 475 - 800 = 95a$$

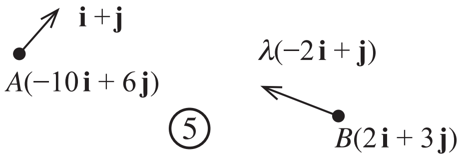
$$a = \frac{1}{2\times 95}(675 - 650)$$

$$= \frac{25}{2\times 95} = \frac{5}{38}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \quad (5)$$

25

[3 වන පිටුව බලන්න

4. $t = 0$ විට




$t = T$ වන විට අංශු දෙක ගැටේ නම්,
$P$ හි විස්ථාපනය $= (\mathbf{i}+\mathbf{j})T$
$Q$ හි විස්ථාපනය $= (-2\mathbf{i}+\mathbf{j})\lambda T$
ගැටෙන ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සැලකීමෙන්,
$-10\mathbf{i}+6\mathbf{j}+(\mathbf{i}+\mathbf{j})T \equiv 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+(-2\mathbf{i}+\mathbf{j})\lambda T$ (5) (5)

$\Rightarrow \quad (-10+T-2+2\lambda T)\mathbf{i} = (3+\lambda T-6-T)\mathbf{j}$

$\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ හා $\mathbf{i}, \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ නිසා,

$2\lambda T + T = 12$ සහ $\lambda T - T = 3$

$\Rightarrow 3T = 6$

$\Rightarrow T = 2 \qquad \therefore 2\lambda = 5$

$\lambda = \frac{5}{2}$ (5)

$\therefore \mathbf{v} = \frac{5}{2}(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}) \Rightarrow |\mathbf{v}| = \frac{5}{2}\sqrt{(-2)^2+1^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ (5)

**25**

---

5. $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB} = 3\mathbf{a}-\mathbf{b}$

$OA \perp OB \quad \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ (5)

$\Rightarrow (\mathbf{a}+2\mathbf{b}).(3\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 0$

$\Rightarrow 3|\mathbf{a}|^2 + 5\,\mathbf{a}.\mathbf{b} - 2|\mathbf{b}|^2 = 0$ , (5) $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$ නිසා,

$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{5}|\mathbf{b}|^2 - \frac{3}{5}|\mathbf{a}|^2$ (5)

$|\mathbf{a}| = 2$ සහ $|\mathbf{b}| = 1$ නම්, $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \frac{2}{5} - \frac{12}{5} = -2$

$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = -2$ (5) මෙහි $\theta$ යනු $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ අතර කෝණයයි. $0 \le \theta \le \pi$

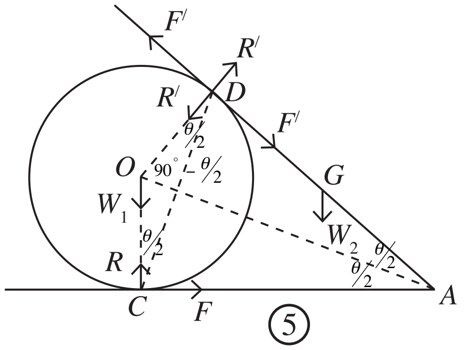
$2\cos\theta = -2$

$\cos\theta = -1$

$\theta = \pi$ (5)

**25**

6. බල තුන ඒක ලක්ෂ්‍ය වීම. (5)




සිලින්ඩරයේ බර සහ රළු තිරස් තලය මගින් සිලින්ඩරය මත යෙදෙන බලය $C$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන බැවින්, $D$ හිදී දණ්ඩ මගින් සිලින්ඩරය මත යෙදෙන බලය ද $C$ හරහා යා යුතුය. (5)

එවිට, $O\hat{C}D = O\hat{D}C = \frac{\theta}{2}$

සිලින්ඩරයේ සමතුලිතතාව සඳහා, $\left|\frac{F}{R}\right| \le \mu$ වේ. (5)

$\therefore \tan\frac{\theta}{2} \le \tan\lambda$

$\Rightarrow \lambda \ge \frac{\theta}{2}$, $(0 < \lambda,\ \theta < \frac{\pi}{2}$ බැවින්) (5)

**25**

7. $A, B, C$ ළමයින් තිදෙනා ගැටලුව නිවැරදි ව, ස්වායත්තව විසඳීමේ සිද්ධි පිළිවෙලින් $A, B, C$ යැයි ගනිමු.

එවිට $P(A) = \frac{1}{6}$ , $P(B) = \frac{1}{2}$ සහ $P(C) = \frac{1}{3}$ වේ.

$X$ : ළමයින් දෙදෙනකු පමණක් ගැටලුව නිවැරදිව ස්වායත්තව විසඳීම ලෙස ගනිමු.

එවිට, $X = (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

$P(X) = P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C)$ (ප්‍රත්‍යක්ෂය) ⑤

$= P(A)\,P(B)\,P(C') + P(A)\,P(B')\,P(C) + P(A')\,P(B)\,P(C)$ ⑤

($A, B, C$ එකිනෙකින් ස්වායත්ත බැවින්)

$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,(1 - \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}\,(1 - \frac{1}{2})\frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{6})\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ ⑩

$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$

$= \frac{8}{36}$ ⑤

$= \frac{2}{9}$

[25]

.................................................................................................................................

8. $R$ : රෝස පැහැති මල් සහිත පැළයක් ලැබීම

$P(R) = \frac{1}{6}$ සහ $P(R') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ⑤

$n$ : වැපිරිය යුතු ඇට ගණන

$X$ : යටත් පිරිසයින් රෝස පැහැති මල් සහිත එක් පැළයක් ලැබීම

$P(X) = 1 - P$(රෝස පැහැති මල් සහිත එක් පැළයක්වත් නොලැබීම)

$= 1 - P(R' \cap R' \dots \cap R')$ ⑤

$= 1 - \{P(R')\}^n > 0.98$ ⑤

$0.02 > \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$n > \frac{\ln(0.02)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 21.46$ ⑤

$\therefore n_{\text{අඩුතම}} = 22$ ⑤

[25]

The National e-learning Portal for The General Education

9.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | 4 | 1 | 3 | 1 | 1 |
| $f.x$ | $-8$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
| $f.x^2$ | 16 | 1 | 0 | 1 | 4 |

(5)

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{-6}{10} = -0.6 \quad (5)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2 = \frac{22}{10} - 0.36 = 1.84 \quad (5)$$

$$\therefore \sigma_x = \sqrt{1.84}$$

$y = 2000 - 4x$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $\bar{y} = 2000 - 4\bar{x}$

$= 2000 + 2.4$

$= 2002.4$ (5)

$\sigma_y^2 = 4^2 \cdot \sigma_x^2$

$= 16 \times 1.84$

$\therefore \sigma_y = 4\sqrt{1.84}$ (5)

25

---

10. $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{20} = 40$

∴ මුළු ලකුණුවල එකතුව $= 20 \times 40 = 800$

අඩුම ලකුණු හයෙහි එකතුව $= 6 \times 25 = 150$ (5)

වැඩිම ලකුණු හයෙහි එකතුව $= 440$

∴ ඉතිරි 8 දෙනාගේ ලකුණුවල එකතුව

$= 800 - 590 = 210$ (5)

(i) ∴ ඉතිරි 8 දෙනාගේ ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය

$= \frac{210}{8} = 26.25$ (5)

(ii) තෙවන චතුර්ථකය $= Q_3$

$\frac{3}{4}(n+1) = \frac{3}{4} \times 21 = 15\frac{3}{4}$

15 වන ලකුණ $= 70$ (5)

16 වන ලකුණ $= 71$

$\therefore Q_3 = 70 + \frac{3}{4}(71 - 70)$

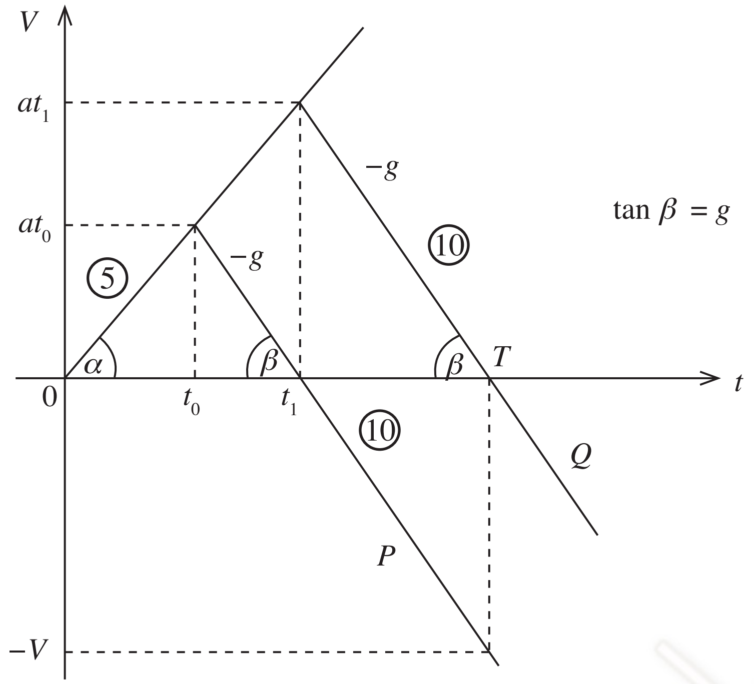
$= 70.75$ (5)

25

---

## B කොටස

11. (a)




$\tan\beta = g$

25

---

$P$ අංශුවේ චලිතයට,

$\tan\beta = \dfrac{at_0}{t_1 - t_0}$ (5) $\Rightarrow g = \dfrac{at_0}{t_1 - t_0}$ (5)

$t_1 - t_0 = \dfrac{at_0}{g}$

$t_1 = \dfrac{at_0}{g} + t_0$

$t_1 = \dfrac{t_0}{g}(a + g)$ (5)

$Q$ ක්ෂණික නිසලතාවට එළඹෙන කාලය $T$ නම්,

$\tan\beta = \dfrac{at_1}{T - t_1} \Rightarrow g = \dfrac{at_1}{T - t_1} \Rightarrow T - t_1 = \dfrac{at_1}{g}$ (5)

$\tan\beta = \dfrac{V}{T - t_1}$

$V = g(T - t_1)$

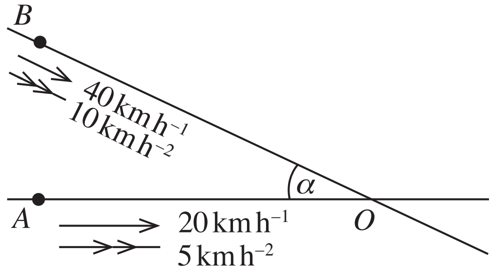
$= \not{g}\,\dfrac{at_1}{\not{g}} = at_0\left(\dfrac{a}{g} + 1\right)$ (5)

25

---

The National e-learning Portal for The General Education

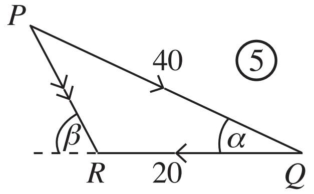
(b)




$\mathrm{V}(Y, X) \;=\; \mathrm{V}(Y, E) + \mathrm{V}(E, X)$

$= \; \underset{\alpha}{\searrow}\; 40\,\mathrm{km\,h^{-1}} + \longleftarrow 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ (5)

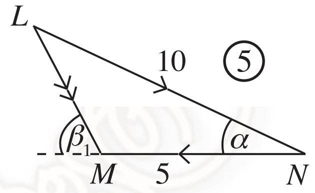
$= \; \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} \;=\; \overrightarrow{PR}$




සහ $a(Y, X) \;=\; a(Y, E) + a(E, X)$

$= \; \underset{\alpha}{\searrow}\; 10\,\mathrm{km\,h^{-2}} + \longleftarrow 5\,\mathrm{km\,h^{-2}}$ (5)

$= \; \overrightarrow{LN} + \overrightarrow{NM} \;=\; \overrightarrow{LM}$




(i) $\tan\beta \;=\; \dfrac{40\sin\alpha}{40\cos\alpha - 20}$ (5)

$= \; \dfrac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}$

(ii) $\tan\beta_1 \;=\; \dfrac{10\sin\alpha}{10\cos\alpha - 5} \;=\; \dfrac{2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1}$ (5)

(i) හා (ii) න්, $\tan\beta = \tan\beta_1$

$\beta \;=\; \beta_1 \quad (0 < \beta, \beta_1 < \pi)$ (5)

$\Rightarrow \mathrm{V}(Y, X) \mathbin{/\!\!/} a(Y, X)$ (5)

$\therefore$ $X$ ට සාපේක්ෂව $Y$ හි ගමන් පෙත සරල රේඛාවකි.

**40**

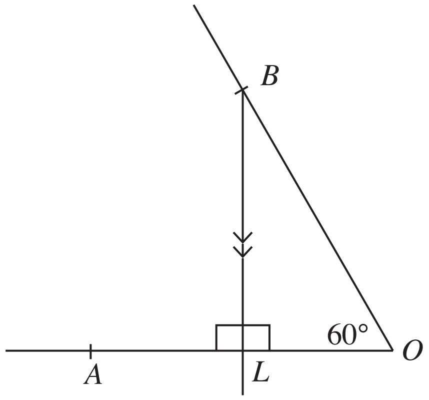
---

$\alpha = 60°$ නම්,

$\tan\beta$ , $\tan\beta_1$ අර්ථ නොදැක්වේ.

$\therefore\; \beta \;=\; \beta_1 = 90°$ වේ. (5)

$\therefore$ $X$ ට සාපේක්ෂව $Y$ හි ගමන් පෙත $AO$ ට ලම්බ වේ.




$X$ සහ $Y$ අතර කෙටිතම දුර $= AL = 10 - 10\cos 60°$

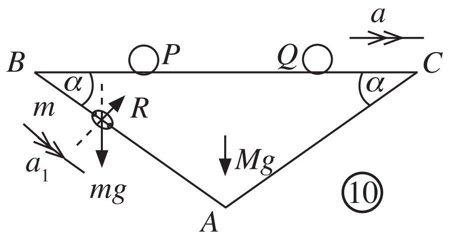
$= 5\,\mathrm{km}$ (5)

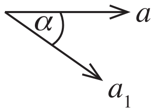
**10**

---

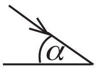
The National e-learning Portal for The General Education

(c)




$a\,(M, E) \;=\; \twoheadrightarrow a\;,\quad a\,(m, E) \;=$  (5)

**F** $=$ *m***a** යෙදීමෙන්,

$m$ :  ; $mg\sin\alpha \;=\; m\,(a_1 + a\cos\alpha)$ ——— (1) (5)

$M, m \longrightarrow$ ; $\quad 0 \;=\; Ma + m\,(a + a_1\cos\alpha)$

$$0 \;=\; (M+m)\,a + m\,a_1\cos\alpha \quad \text{——— (2)} \qquad (10)$$

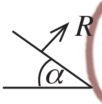
(1) හා (2) න් ;

$$0 \;=\; (M+m)\,a + m\,(g\sin\alpha - a\cos\alpha)\cos\alpha \qquad (5)$$

$$-\,mg\sin\alpha\cos\alpha \;=\; (M + m - m\cos^2\alpha)\,a$$

$$\therefore\; a \;=\; -\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha} \;=\; -\frac{mg\sin 2\alpha}{2(M + m\sin^2\alpha)}$$

(5)

$m$ :  ; $R - mg\cos\alpha \;=\; ma\sin\alpha$ (5)

$$R \;=\; mg\cos\alpha - \frac{m^2 g\sin^2\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

$$=\; \frac{mg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}\,\{M + \cancel{m\sin^2\alpha} - \cancel{m\sin^2\alpha}\} \qquad (5)$$

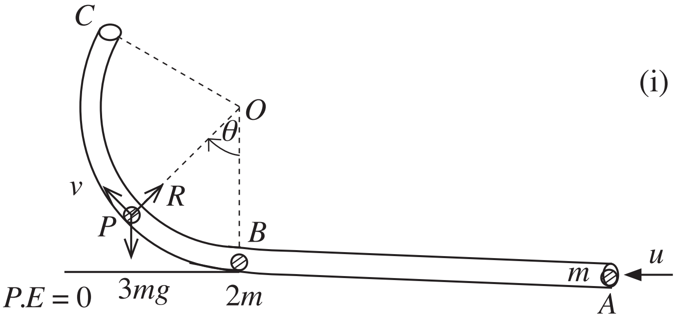
$$=\; \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

[50]

The National e-learning Portal for The General Education

---

12. (a)




(i)


රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිතිය යෙදීමෙන් ;

$$3mv_1 \;=\; mu \qquad (5)$$

$$v_1 \;=\; \frac{u}{3} \qquad (5)$$

[10]

(ii) ශක්ති සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්,

$$\frac{1}{2}(3m)v^2 + 3mg(a - a\cos\theta) = \frac{1}{2}(3m)\frac{u^2}{9} \qquad (15)$$

$$v^2 = \frac{u^2}{9} - 2ga(1 - \cos\theta) \qquad (5)$$

**F** = $m$**a** යෙදීමෙන්,

$$\overrightarrow{PO};\ R - 3mg\cos\theta = 3m\left(\frac{v^2}{a}\right) \qquad (10)$$

$$R = \frac{3m}{a}\left\{\frac{u^2}{9} - 2ga + 3ga\cos\theta\right\} \qquad (5)$$

[35]

---

(iii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ වන විට ; $v^2 = \frac{u^2}{9} - 2ga\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{u^2}{9} - 3ga$ (5)

(5) $\frac{u^2}{9} - 3ga > 0$ නම් අංශුව $C$ හිදී ඉවත් වේ. එවිට $u > 3\sqrt{3ga}$ විය යුතුය.

[10]

---

(iv) $C$ සිට $A$ දක්වා චලිතය සඳහා, $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$$\rightarrow\ \sqrt{3}\,a + \frac{\sqrt{3}a}{2} = v\left(\frac{1}{2}\right)t \quad \Rightarrow 3\sqrt{3}\,a = vt \text{ —— (1)} \qquad (5)$$

$$\uparrow -\frac{3a}{2} = v\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}gt^2 \text{ —— (2)} \qquad (5)$$

(1) සහ (2) න්,

$$-\frac{3a}{2} = v\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}a}{v} - \frac{1}{2}g\frac{27}{v^2}a^2 \qquad (5)$$

$$\frac{1}{2}ga\frac{27}{v^2} = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}$$

$$27ga = 12v^2$$

$$\frac{9}{4}ga = \frac{u^2}{9} - 3ga$$

$$\frac{u^2}{9} = \frac{9}{4}ga + 3ga \qquad (5)$$

$$\therefore\ u = \frac{3}{2}\sqrt{21ag}$$

[20]

---

(b) රේඛීය ගම්‍යතා සංස්ථිතිය යෙදීමෙන්,

$$mv_1 + Mv_2 = mu \text{ —— (i)} \qquad (10)$$

නිව්ටන්ගේ පරීක්ෂණාත්මක නියමය යෙදීමෙන්,

$$v_1 - v_2 = -eu \text{ —— (ii)} \qquad (10)$$

(i) සහ (ii) න් $\quad v_1 = \frac{u(m - eM)}{(m+M)}$ සහ $\quad v_2 = \frac{mu(1+e)}{(m+M)}$ (10)

The National e-learning Portal for The General Education

$\Delta E = \sum \frac{1}{2} I.(U+V)$ යෙදීමෙන්, (5)

$= \frac{1}{2}(I)(v_2) + \frac{1}{2}(-I)(u+v_1) = -\frac{I}{2}(u+v_1-v_2) = -\frac{I}{2}(u-eu)$ (10)

$= -\frac{I}{2}(1-e)u$ (5) ; මෙහි $I = Mv_2 = \frac{Mmu(1+e)}{(M+m)}$ (5)

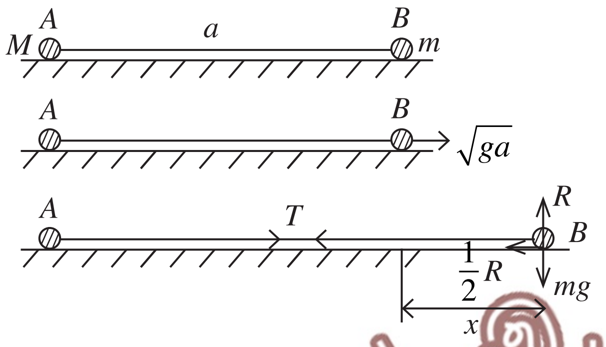
$\frac{1}{2}\frac{Mmu^2(1+e)(1-e)}{(M+m)} = \frac{1}{4}mu^2$ (10)

$M(1-2e^2) = m$ (5) $\Rightarrow 1-2e^2 > 0$ (5) $\Rightarrow e < \frac{1}{\sqrt{2}}$

**75**

---

13.




$B$ අංශුවට $\uparrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $R = mg$

$B$ අංශුවට $\longrightarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්, $-\frac{1}{2}R - T = m\ddot{x}$ (10)

තන්තුවේ ප්‍රත්‍යස්ථතා මාපාංකය $2mg$ නිසා, $T = 2mg\frac{x}{a}$ (10)

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}mg - \frac{2mgx}{a} = m\ddot{x}$ (10)

$\Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x+\frac{a}{4}\right)$ ——— (1)

$\therefore$ අංශුවේ චලිතය සරල අනුවර්තී වන අතර දෝලන කේන්ද්‍රය $x = -\frac{a}{4}$ මගින් දෙනු ලැබේ. (5)

$x + \frac{a}{4} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ——— (2) ලෙස ගත් විට,

$t = 0$ දී $x = 0$ බැවින්, $\alpha = \frac{a}{4}$ (5)

$t$ විෂයයෙන් අවකලනයෙන්, $\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ ——— (3)

$t = 0$ දී $\dot{x} = \sqrt{ga}$ බැවින්, $\sqrt{ga} = \beta\omega \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{ga}}{\omega}$ (5)

$t$ විෂයයෙන් නැවත අවකලනයෙන්, $\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$

$= -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$

$= -\omega^2(x + \frac{a}{4})$ (5)

**50**

---

The National e-learning Portal for The General Education

(1) න්, $\omega^2 = \frac{2g}{a} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ ⑤

$\therefore \alpha = \frac{a}{4}$ සහ $\beta = \sqrt{ga}\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2g}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ ⑤

10

............................................................................................................................................

උපරිම විතතියේ දී $\dot{x} = 0$ බැවින්, ⑩

(3) න්, $\alpha \sin \omega t = \beta \cos \omega t$

$$\Rightarrow \tan \omega t = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{a/\sqrt{2}}{a/4} = 2\sqrt{2}$$ ⑤

(2) න්, $x + \frac{a}{4} = \frac{a}{4}\,\frac{1}{3} + \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$= \frac{a}{12}(1+8)$$

$$= \frac{3a}{4}$$

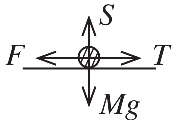
$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{2}$$ ⑤

$\therefore$ උපරිම විතතිය $\frac{a}{2}$ වේ.

20

............................................................................................................................................

උපරිම ආතතිය $= \frac{2mg}{a}\,\frac{a}{2} = mg$ ⑤




$A$ අංගුවෙහි සමතුලිතතාව සඳහා,

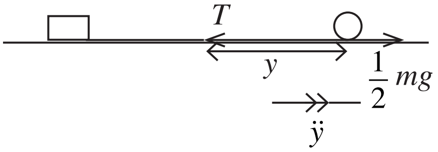
$S = Mg$ හා $T = F$

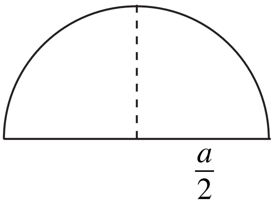
$\frac{F}{S} \le \frac{1}{2}$ බැවින්, ⑩ $\frac{mg}{Mg} \le \frac{1}{2}$ ⑤

$\therefore \; M \ge 2m$

20

............................................................................................................................................




$$-T + \frac{1}{2}mg = m\ddot{y}$$ ⑤

$$-\frac{2mg}{a}y + \frac{mg}{2} = m\ddot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}\left(y - \frac{a}{4}\right)$$ ⑤

10

............................................................................................................................................

The National e-learning Portal for The General Education

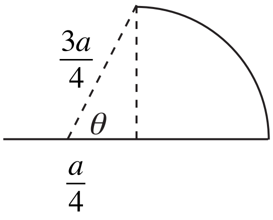
[12 වන පිටුව බලන්න

දෝලන කේන්ද්‍රය $= \dfrac{a}{4}$ ⑤

කෝණික ප්‍රවේගය $= \sqrt{\dfrac{2g}{a}}$ ⑤

සරල අනුවර්තී චලිතයට අනුරූප වෘත්තාකාර චලිතය සැලකීමෙන්

ආපසු ඒමට ගතවන කාලය $= \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ ⑤




යාමට ගතවන කාලය

$$= \frac{\theta}{\omega} = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\frac{1}{3}$$ ⑤

$$\therefore \text{ ගතවන මුළු කාලය } = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\frac{1}{3} + \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$$

$$= \left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\sqrt{\frac{a}{2g}}$$ ⑤

ආපසු චලිතය සඳහා $\dot{y} = \dfrac{a}{4}\left(-\sqrt{\dfrac{2g}{a}}\right)\sin\sqrt{\dfrac{2g}{a}}\,t$ ⑤

$t = \pi\sqrt{\dfrac{a}{2g}}$ විට

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t = \pi$$

$$\therefore \dot{y} = 0$$ ⑤

$\therefore$ $B$ අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ නියත වශයෙන්ම නිශ්චලතාවට පත්වේ. ⑤

40

The National e-learning Portal for The General Education

---

**වෙනත් ක්‍රමයක් :**

$B$ අංශුවේ චලිතය :

$B$ අංශුව උපරිම විතතියට යාමට කාලය $t_0$ ලෙස ගනිමු.

$\tan\omega t = 2\sqrt{2}$ නම් $\cos\omega t = \dfrac{1}{3}$ වේ. ⑤

$$\therefore \cos\omega t_0 = \frac{1}{3}$$

$$\omega t_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{a}{2g}}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$ ⑤

$B$ අංශුවේ ආපසු චලිතය සඳහා

ආරම්භක ස්ථානයට ඒමට කාලය $t_1$ නම්,

එවිට $y = 0$ වේ. ⑤

$$\therefore \cos\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 = -1$$

$$\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 = \pi \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi \qquad (5)$$

$\therefore$ $B$ අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණීමට කාලය

$$= t_0 + t_1$$

$$= \sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right] \qquad (5)$$

$t_1 = \sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$ කාලයකට පසු ප්‍රවේගය $\dot{y}$ නම්,

$$\dot{y} = -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\,t_1 \qquad (5)$$

$$= -\frac{a}{4}\sqrt{\frac{2g}{a}}\sin\sqrt{\frac{2g}{a}}\sqrt{\frac{a}{2g}}\,\pi$$

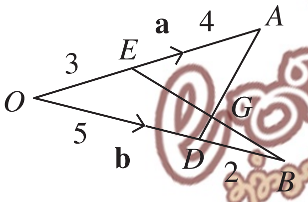
$$= 0 \qquad (5)$$

$\therefore$ $B$ අංශුව ආරම්භක ලක්ෂ්‍යයට පැමිණ නියත වශයෙන්ම නිශ්චලතාවට පත්වේ. (5)

**40**

---

14. (a)




$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda[\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE}]$$
$$= \overrightarrow{OB} + \lambda(-\overrightarrow{OB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{OA})$$
$$= \mathbf{b} + \lambda(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad \text{———— (1)} \qquad (15)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}]$$
$$= \overrightarrow{OA} + \mu(-\overrightarrow{OA} + \frac{5}{7}\overrightarrow{OB})$$
$$= \mathbf{a} + \mu(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{———— (2)} \qquad (15)$$

(1) සහ (2) න්,

$$\mathbf{b} + \lambda(\frac{3}{7}\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mu(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}) \qquad (5)$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ස්වායත්ත දෛශික නිසා,

$$\frac{3\lambda}{7} = 1 - \mu \quad \text{———— (3)} \qquad (5)$$

$$1 - \lambda = \frac{5\mu}{7} \quad \text{———— (4)} \qquad (5)$$

$(3) + \frac{3}{7}\times(4)$

$$\frac{3}{7} = 1 - \mu + \frac{15}{49}\mu$$

$$\frac{\cancel{4}\,^{2}}{\cancel{7}\,_{1}} = {}^{17}_{\;7}\frac{\cancel{34}}{\cancel{49}}\mu$$

The National e-learning Portal for The General Education

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{14}{17} \qquad (5)$$

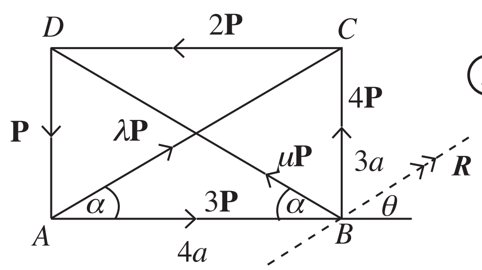
$$\overrightarrow{OG} = \mathbf{a} + \frac{14}{17}\left(\frac{5}{7}\mathbf{b} - \mathbf{a}\right) = \mathbf{a} + \frac{10}{17}\mathbf{b} - \frac{14}{17}\mathbf{a}$$

$$= \frac{3}{17}\mathbf{a} + \frac{10}{17}\mathbf{b} = \frac{1}{17}(3\mathbf{a} + 10\mathbf{b}) \qquad (10)$$

**[60]**

---

(b)




(5)

(i) බල යුග්මයකට තුල්‍ය විට $R = 0$ වේ. (5)

$\longrightarrow X = 0$, $\uparrow Y = 0$ විය යුතුයි.

$\longrightarrow X$ : $3P + \lambda P\cos\alpha - \mu P\cos\alpha - 2P = 0$ (5)

$3P + \lambda P\frac{4}{5} - \mu P\frac{4}{5} - 2P = 0$

$5P + 4\lambda P - 4\mu P = 0$

$5 = 4\mu - 4\lambda$ ——— (1) (5)

$\uparrow Y$ : $4P - P + \lambda P\sin\alpha + \mu P\sin\alpha = 3P + \lambda P\frac{3}{5} + \mu P\frac{3}{5} = 0$ (5)

$\lambda + \mu = -5$ ——— (2) (5)

$(1) + (2) \times 4$

$8\mu = -15 \Rightarrow \mu = -\frac{15}{8}$ (5)

$\lambda = -5 - \mu = -5 + \frac{15}{8} = -\frac{25}{8}$ (5)

**[40]**

---

(ii) $\curvearrowleft B = 0$ විය යුතුය. (5)

$2P \times 3a + P \times 4a - \lambda P \times 4a\sin\alpha = 0$

$6 + 4 - \lambda \times 4 \times \frac{3}{5} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{50}{12} = \frac{25}{6}$ (5)

$\longrightarrow R\cos\theta = P + (\lambda - \mu)P\cos\alpha$ ——— (1) (5)

$\uparrow R\sin\theta = 3P + (\lambda + \mu)P\sin\alpha$ ——— (2) (5)

(2)/(1) න්, $\tan\theta = \dfrac{3P + (\lambda+\mu)P \times \frac{3}{5}}{P + (\lambda-\mu)P \times \frac{4}{5}}$ (5)

$R$, $AC$ ට සමාන්තර නිසා, $\tan\theta = \tan\alpha$

$\theta = \alpha$ (5)

The National e-learning Portal for The General Education

$$\frac{3}{4} \ \textcircled{5} \quad = \quad \frac{3+\left(\frac{25}{6}+\mu\right)\times\frac{3}{5}}{1+\left(\frac{25}{6}-\mu\right)\times\frac{4}{5}} \quad = \quad \frac{3+\frac{5}{2}+\frac{3\mu}{5}}{1+\frac{5\times 2}{3}-\frac{4\mu}{5}}$$

$$13-\frac{12\mu}{5} \quad = \quad 22+\frac{12\mu}{5} \ \Rightarrow \ 9 = -\frac{24\mu}{5} \ \Rightarrow \ \mu = -\frac{45}{24} \quad \textcircled{5}$$

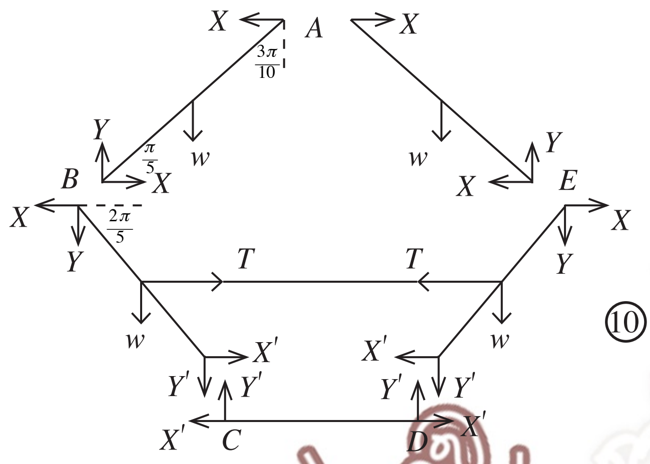
සමතුලිතතාවය සඳහා $R = 0$ සහ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඝූර්ණය ශුන්‍ය විය යුතුය. (10)

(i) සහ (ii) කොටස් අනුව එකී සමීකරණ එකවර සපුරාලන පරිදි $\lambda, \mu$ සෙවිය නොහැක.

50

---

15. (a)




(10)

දණ්ඩක දිග $2a$ යැයි ගනිමු. $A$ හරහා යන සිරස් රේඛාව වටා පද්ධතිය සමමිතික වේ.

$\therefore$ $A$ හිදී $Y = 0$ වේ. (5)

$AB$ දණ්ඩේ සමතුලිතතාවට,

$$B \circlearrowleft \quad X\times 2a\sin\frac{\pi}{5} - w\times a\cos\frac{\pi}{5} = 0 \qquad \textcircled{10}$$

$$X = \frac{w}{2}\cot\frac{\pi}{5} \qquad \textcircled{5}$$

$AB$ දණ්ඩේ සමතුලිතතාවයට $\uparrow$

$$\uparrow \quad Y = w \qquad \textcircled{5}$$

$BC$ දණ්ඩේ සමතුලිතතාවයට,

$$C \circlearrowleft \quad X\times 2a\sin\frac{2\pi}{5} + Y\times 2a\cos\frac{2\pi}{5} + w\times a\cos\frac{2\pi}{5} - T\times a\sin\frac{2\pi}{5} = 0 \qquad \textcircled{10}$$

$$T = 2X + Y\,2\cot\frac{2\pi}{5} + w\cot\frac{2\pi}{5}$$

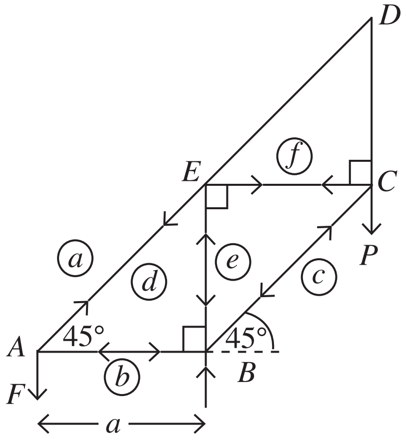
$$= \not{2}\,\frac{w}{\not{2}}\cot\frac{\pi}{5} + 2w\cot\frac{2\pi}{5} + w\cot\frac{2\pi}{5} \qquad \textcircled{5}$$

$$= w\left(\cot\frac{\pi}{5} + 3\cot\frac{2\pi}{5}\right) \qquad \textcircled{10}$$

60

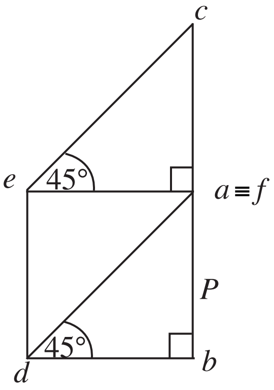
---

(b)




$\overset{\curvearrowleft}{B}$ ; $F \times a - P \times a = 0$

$F = P\,\text{N}$ (10)




(30)

$a \equiv f$

$a$ හා $f$ එකම ලක්ෂ්‍යය වේ. (5)

| දණ්ඩ | විශාලත්වය | ප්‍රත්‍යාබලය |
|---|---|---|
| AB | $P$ N | තෙරපුම |
| BC | $\sqrt{2}\,P$ N | තෙරපුම |
| CD | 0 | – |
| DE | 0 | – |
| AE | $\sqrt{2}\,P$ N | ආතතිය |
| BE | $P$ N | තෙරපුම |
| EC | $P$ N | ආතතිය |

(35)

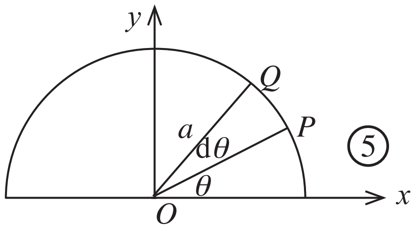
The National e-learning Portal for The General Education

ආධාරකය මත ප්‍රතික්‍රියාව $\boldsymbol{R} = 2P$ N (10)

90

---

16.




(5)

$Oy$ වටා සමමිතික නිසා ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය $Oy$ මත වේ. (5)
ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\rho$ යැයි ගනිමු. කම්බි රාමුවේ අරය $a$ වේ.

$PQ$ අංශු මාත්‍රයේ ස්කන්ධය $= \rho\, a\, d\theta$

$PQ$ අංශු මාත්‍රයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට $Ox$ සිට දුර $y = a\sin\theta$

$O$ සිට වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{y}$ නම්,

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$= \frac{\int_0^\pi \rho a \sin\theta a \, d\theta}{\int_0^\pi \rho a \, d\theta} \; (10) = \frac{a^2\rho\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}{a\rho\int_0^\pi d\theta}$$

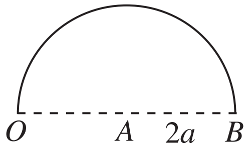
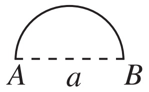
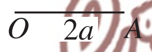
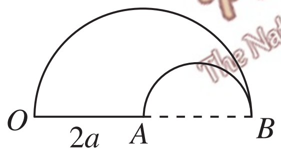
$$= \frac{a^2\rho[-\cos\theta]_0^\pi}{a\rho[\theta]_0^\pi} = \frac{a[-\cos\pi + \cos 0]}{\pi} \quad (10)$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

30

---

ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\rho$ යැයි ගනිමු.

| වස්තුව | ස්කන්ධය | $x$ අක්ෂයේ සිට දුර | $y$ අක්ෂයේ සිට දුර |
|---|---|---|---|
|   | $2\pi a\rho$ | $\frac{4a}{\pi}$ | $2a$ |
|   | $\pi a\rho$ | $\frac{2a}{\pi}$ | $3a$ |
|   | $2a\rho$ | $0$ | $a$ |
|   | $3\pi a\rho + 2a\rho$ | $\bar{y}$ | $\bar{x}$ |

(30)

The National e-learning Portal for The General Education

$$\bar{x} = \frac{2a \times 2\pi a\rho + 3a \times \pi a\rho + 2a\rho \times a}{3\pi a\rho + 2a\rho} \quad (10)$$

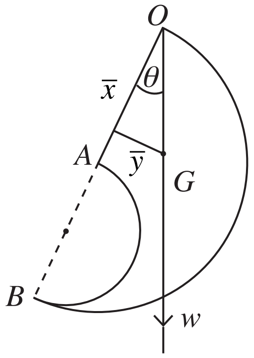
$$= \frac{4\pi a + 3\pi a + 2a}{3\pi + 2} = \frac{7\pi a + 2a}{3\pi + 2} \quad (5)$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{4a}{\pi} \times 2\pi a\rho + \frac{2a}{\pi} \times \pi a\rho}{3\pi a\rho + 2a\rho} \; (10) = \frac{10a}{3\pi + 2} \quad (5)$$

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \left[\frac{(7\pi + 2)a}{3\pi + 2}, \frac{10a}{3\pi + 2}\right]$$

60

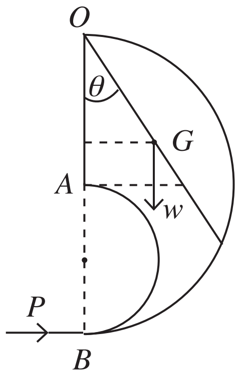
---




5

$$\tan\theta = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\frac{10a}{3\pi+2}}{\frac{(7\pi+2)a}{3\pi+2}} \;(10) = \frac{10}{7\pi+2} \;(5)$$

20




5

O වටා සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$\overset{\curvearrowleft}{O}$ ;

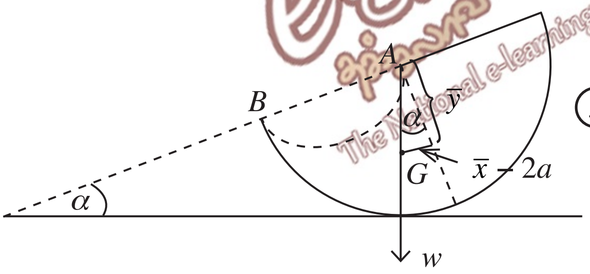
$$P \times 4a = w \times \bar{y} \quad (10)$$

$$P = \frac{w}{4a} \times \frac{10a}{3\pi+2}$$

$$= \frac{5w}{2(3\pi+2)} \quad (5) \text{ ඒකක}$$

20

The National e-learning Portal for The General Education




5

$$\tan\alpha = \frac{\bar{x}-2a}{\bar{y}}$$

$$= \frac{\frac{(7\pi+2)a}{3\pi+2} - 2a}{\frac{10a}{3\pi+2}} \quad (10)$$

$$= \frac{(7\pi+2)a - 2a(3\pi+2)}{10a}$$

$$\tan\alpha = \frac{\pi-2}{10}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\pi-2}{10}\right) \quad (5)$$

20

17. (a) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ; $P(B) > 0$ (5)

**[5]**

---

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P[(A_1 \cap A_2) \cap A_3]$

$= P(X \cap A_3)$ ; මෙහි $X = A_1 \cap A_2$ වේ.

$= P(X) . P(A_3|X)$ (5)

$P(X) = P(A_1 \cap A_2)$

$= P(A_1) . P(A_2|A_1)$ (5)

$\therefore P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) . P(A_2|A_1) . P(A_3|A_1 \cap A_2)$

**[10]**

---

$A$ : තෝරාගත් සාමාජිකයා වැඩිහිටියකු වීම

$C$ : තෝරාගත් සාමාජිකයා ළමයකු වීම

$F$ : තෝරාගත් සාමාජිකයා ගැහැනු අයකු වීම

$M$ : තෝරාගත් සාමාජිකයා පිරිමි අයකු වීම

$S$ : තෝරාගත් සාමාජිකයා පිහිනුම් තටාකය භාවිත කරන්නකු වීම

$P(A) = \frac{3}{4}$ $\qquad P(C) = \frac{1}{4}$

$P(M|A) = \frac{3}{4}$ $\qquad P(F|A) = \frac{1}{4}$

$P(M|C) = \frac{3}{5}$ $\qquad P(F|C) = \frac{2}{5}$

$P(S|A\cap M) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(S|A\cap F) = \frac{1}{3}$

$P(S|C\cap M) = \frac{4}{5}$ $\qquad P(S|C\cap F) = \frac{4}{5} \Rightarrow P(S|C) = \frac{4}{5}$ (10)

(i) $P(S) = P(A\cap M\cap S) + P(A\cap F\cap S) + P(C\cap S)$ (5)

$= P(A)\,P(M|A)\,P(S|A\cap M) + P(A)\,P(F|A)\,P(S|A\cap F) + P(C)\,P(S|C)$ (5)

$= \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\times\frac{4}{5}$ (5)

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{5} = \frac{87}{160}$ (5)

**[30]**

---

(ii) $P(M|S) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}$

$P(M\cap S) = P(A\cap M\cap S) + P(C\cap M\cap S)$ (5)

$= \frac{9}{32} + \frac{1}{4}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}$

$= \frac{321}{800}$ (5)

$\therefore P(M|S) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)} = \dfrac{\overset{107}{\cancel{321}}}{\underset{5}{\cancel{800}}} \times \dfrac{\cancel{160}}{\underset{29}{\cancel{87}}} = \dfrac{107}{145}$

**[10]**

---

The National e-learning Portal for The General Education

(iii) $P(C \cap M | S') = \dfrac{P(C \cap M \cap S')}{P(S')}$

$P(C \cap M \cap S') = P(C) \times P(M|C) \times P(S'|M \cap C)$

$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{100}$ ⑤

$\therefore$ අවශ්‍ය සම්භාවිතාව $= 1 - P(C \cap M | S')$ ⑤

$= 1 - \dfrac{\frac{3}{100}}{1 - \frac{87}{160}}$ ⑤ $= 1 - \dfrac{3 \times 16\cancel{0}}{10\cancel{0} \times 73}$

$= \dfrac{682}{730}$ ⑤

20

---

(b) $u_i = \dfrac{x_i - A}{10}$

| පන්ති ලකුණ | $f_i$ | $u_i$ | $f_i u_i$ | $f_i u_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 24.5 | 1 | −3 | −3 | 9 |
| 34.5 | 9 | −2 | −18 | 36 |
| 44.5 | 35 | −1 | −35 | 35 |
| 54.5 | 40 | 0 | 0 | 0 |
| 64.5 | 12 | 1 | 12 | 12 |
| 74.5 | 3 | 2 | 6 | 12 |
| | | | −38 | 104 |
| | | | ⑤ | ⑤ |

The National e-learning Portal for the General Education

(i) $A = 54.5$

$\bar{x} = A + C\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = 54.5 + 10\left(\dfrac{-38}{100}\right)$ ⑤

$= 54.5 - 3.8$

$= 50.7$ ⑤

මාත පන්තිය $49.5 - 59.5$

$M_0 = 49.5 + \left(\dfrac{40-35}{(40-35)+(40-12)}\right) \times 10$ ⑤

$= 49.5 + \dfrac{5}{33} \times 10$

$= 51.02$ ⑤

$\text{S.D} = \sigma = C\sqrt{\dfrac{\sum f_i u_i^2}{\sum f_i} - \left(\dfrac{f_i u_i}{\sum f_i}\right)^2} = 10\sqrt{\dfrac{104}{100} - \left(\dfrac{-38}{100}\right)^2}$ ⑤

$= 10\sqrt{(1.04 - 0.38^2)}$

$= 9.46$ ⑤

40

---

(ii) $x_i$ ලකුණට අනුරූප සත්‍ය ලකුණ $(x_i - 3)$

සත්‍ය මධ්‍යනය $= \bar{x} - 3 = 50.7 - 3.00$

$= 47.7$ (5)

සත්‍ය මාතය $M'_0 = m_0 - 3 = 48.02$

විචලතාව වෙනස් නොවන බැවින්,

සම්මත අපගමනය වෙනස් නොවේ. (5)

සම්මත අපගමනය $= 9.46$ (5)

[15]

---

(iii) $\bar{x} = \dfrac{100 \times 47.7 \times 50 \times 55}{150} = 50.13$ (5)

$\sigma^2 = \dfrac{1}{n_1 + n_2}\{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2 + \dfrac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2\}$ (5)

$= \dfrac{1}{150}\{100 \times 9.46^2 + 50 \times 2.5^2 + \dfrac{50 \times 100}{150}(7.3)^2\}$ (5)

$= 73.59$

$\sigma = \sqrt{73.59} = 8.58$ (5)

[20]

---

The National e-learning Portal for The General Education