සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන, විද්‍යා සහ තාක්ෂණ අමාත්‍යාංශය
கல்வி, விஞ்ஞான மற்றும் தொழில்நுட்ப அமைச்சு
Ministry of Education,Science and Technology

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2024

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න]

A කොටස

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ හා $\alpha \neq 0$ යැයි ගනිමු. $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා අනුක්‍රමයක $n+1$ වන පදය $T_{n+1} = \alpha + \alpha(T_n - \alpha)$ සහ $T_1 = \beta$ ලෙස දී ඇත. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා, $T_n = \alpha - (\alpha - \beta)\,\alpha^{(n-1)}$ බව සාධනය කරන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $y = |2 - |x-3||$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහන අඳින්න. එනයින්, $1 - \left|2 - |x-3|\right| > 0$ වන $x \in \mathbb{R}$ අගය කුලකය ලියා දක්වන්න.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

[තුන්වැනි පිටුව බලන්න]

3. $\left|Z - i\sqrt{2}\right| \leq 1$ අසමානතාව සපුරාලන Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කෙරෙන R පෙදෙස ආගන්ඩ් තලයක අඳුරුකර දක්වන්න. එම R පෙදෙස තුළ පවතින සහ $Re(z)$ උපරිම වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව, $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් දක්වන්න.

4. $a \in \mathbb{R}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ වූ $\left(\frac{ax}{\sqrt{2}} - 2x^{-\frac{1}{3}}\right)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x කෙරෙන් ස්වායත්ත පදයක් පවතින පරිදි n ට ලද හැකි අවම අගය සොයන්න. එම n අගයට අදාළව x කෙරෙන් ස්වායත්ත පදය -32 නම්, $a = \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

5. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{x(\sqrt[3]{1+4x} - (3x-1)^4)}{1 - \cos 2\pi x} \right] = \frac{20}{3\pi^2}$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ විට $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න. $f(x) = \frac{2x}{x^4+1}$ වක්‍රය, $x = 1, x = 3$ හා Ox අක්ෂයෙන් වට වූ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$ බව පෙන්වන්න.

7. k යනු නිශ්ශුන්‍ය තාත්ත්වික නියතයක් විට, C වක්‍රයක් පරාමිතිකව $x = k\cos 2\theta$ සහ $y = 2\theta - \sin 2\theta$ ලෙස දී ඇත. මෙහි θයනු $0 < \theta < \pi$ වන පරිදි වූ තාත්ත්වික පරාමිතියකි. පරාමිතිය θ වන ලක්ෂ්‍යයේදී C හි අනුක්‍රමණය $-\frac{\tan\theta}{k}$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

$\theta = \frac{\pi}{3}$ හා $\theta = \frac{2\pi}{3}$ වන ලක්ෂ්‍යවල දී C ට ඇඳි ස්පර්ශක එකිනෙක ලම්බ වේ. $k^2 = 3$ බව පෙන්වන්න.

8. $l_0 \equiv y - 3x - 4 = 0$ යැයි ගනිමු. l_0 ට සමාන්තරව $(\alpha, 0)$, $(\alpha \neq 0)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 රේඛාව හා l_0 ට ලම්බව O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_2 රේඛාව P හි දී ඡේදනය වේ. $|OP| = 1$ නම් α හි අගයයන් සොයා l_1 ට තිබිය හැකි පිහිටීම් දෙකට අනුරූප සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

9. $S \equiv (x-3)^2 + (y+4)^2 - 25 = 0$ සහ $l \equiv y - mx - 1 = 0$ යැයි ගනිමු. S වෘත්තය හා l රේඛාව එකිනෙක ස්පර්ශ වේ. m සඳහා තිබිය හැකි අගය දෙක සොයා එම අගයනට අනුරූපව l හි පිහිටීම් දෙක සහ S වෘත්තය, ඛණ්ඩාංක තලයක දළ ලෙස සටහන් කරන්න. එම ස්පර්ශක රේඛා දෙක අතර කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{15}{8}\right)$ බව පෙන්වන්න.

10. $a, b \in \mathbb{R}$ හා $ab < 0$ වේ. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ යැයි ගනිමු. $\cos\theta = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වා එම $\cos\theta$ අගයනට අනුරූපව $\sin\theta$ සඳහා ප්‍රකාශන 2 ක් a හා b ඇසුරෙන් ලබාගන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved

අධ්‍යාපන, විද්‍යා සහ තාක්ෂණ අමාත්‍යාංශය
கல்வி, விஞ்ஞான மற்றும் தொழில்நுட்ப அமைச்சு
Ministry of Education, Science and Technology

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2024

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

✱ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $p \in \mathbb{Z}^+$ වූ $f(x) \equiv p^{\frac{3}{2}} x^2 - 8x + 4\sqrt{p}$ යැයි ගනිමු. $f(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන x හි වර්ගජ සමීකරණයේ x සඳහා තාත්ත්වික-ප්‍රභින්න මූල පවතින අයුරින් p ට ලද හැකි අගය කුමක් ද?

p එම අගය ගන්නා විට $q(x) \equiv (1+p)x^2 + (3+p)x + p(3-p)$ වූ $q(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන වර්ගජ සමීකරණයේ මූලයන් $-p$ ට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් $\lambda \in \mathbb{Z}$ විට ඉහත p අගයම සඳහා $\lambda q(x) - 2f(x) = 0$ මගින් දෙනු ලබන වර්ගජ සමීකරණයට, $f(x) = 0$ හි මූලවලින් වෙනස් වූ තාත්ත්වික-ප්‍රභින්න මූල පවතින පරිදි λ හි අවම අගය සොයන්න.

(b) $a \in \mathbb{R}$ සඳහා $p(x) \equiv x^4 - ax^3 - 4x + 4a + 4$ මගින් දෙනු ලබන $p(x)$ බහු පදය $x^2 + a$ මගින් බෙදූ විට, x කෙරෙන් ස්වායත්ත ශේෂයක් ලැබෙයි නම් $|a| = 2$ බව පෙන්වන්න.

තව දුරටත් $x^2 + a$ යන්න $p(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් එවිට $a = -2$ විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

$x^2 + a$ යන්න $p(x)$ හි සාධකයක් විට $\frac{p(x)+4x^2+8x+8}{x^2+2} = x^2 + 2x + 2$ බව පෙන්වන්න.

ඉහතින් ලද අනෙක් a අගය සඳහා $p(x) - 16 = 0$ හි සියලු තාත්වික සහ අතාත්වික මූල ලියා දක්වන්න.

12. (a) සර්වසම බෑග් 4 ක්, සර්වසම ගණක යන්ත්‍ර 6 ක් හා සර්වසම පොත් 10 ක් සිසුන් දස දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත. සෑම සිසුවෙකුට ම කුමන හෝ වෙනස් වර්ග 2 ක අයිතම දෙකක් පමණක් ලැබෙන පරිදි මෙම බෙදා දීම සිදු කළ යුතුයි.

(i) වෙනත් කිසිදු විශේෂත්වයක් නොමැති විට,

(ii) එක්තරා සිසුවෙකු බෑගයක් ඉල්ලා සිටී නම් එවිට,

(iii) එක්තරා සිසුවෙකු බෑගයක් ලබාගැනීම ප්‍රතික්ෂේප කරයි නම් එවිට,

මෙම බෙදා දීම සිදු කළ හැකි වෙනස් කරන ආකාර ගණන කොපමණ ද?

(iv) දැන් මෙහි අඩංගු බෑග් 4 පමණක් වෙනස් වර්ණ 4 කින් යුක්ත වෙයි නම්, එවිට මෙම බෙදා දීම සඳහා කොපමණ වෙනස් ආකාර ගණනක් පවතී ද?

(b) පළමු පදය 3 සහ පොදු අන්තරය 2 වූ සමාන්තර ශ්‍රේණියක n $(n \in \mathbb{Z}^+)$ වන පදය වන T_n, n ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\frac{3}{1^2.2^2} + \frac{5}{2^2.3^2} + \frac{7}{3^2.4^2} + \cdots$ අපරිමිත ශ්‍රේණියේ r වන පදය, U_r ලියන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \frac{Ar+B}{(r+1)^2}$ ලෙස ගනිමින් $f(r) - f(r-1) = U_r$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයයන් සොයන්න.

එනයින් $\sum_{r=1}^{n} U_r = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව සාධනය කර, පද අනන්තයට එහි ඓක්‍යය ලබාගන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{2r+1} + U_{2r+2}$ විට $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \frac{1}{9}$ බව සාධනය කරන්න.

13. (a) $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. P^2 සොයන්න.

එනයින් P න්‍යාසයේ ප්‍රතිලෝමය පවතින බව සනාථ කරන්න.

$P^{-1} = P$ බව පෙන්වන්න.

සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $P^{2n+1} = P$ බව අපෝහනය කරන්න.

දැන් P^T ලියා දක්වා PP^T යනු P^TP න්‍යාසයේ ප්‍රතිලෝමය බව පෙන්වන්න.

(b) $x, y \in \mathbb{R}$ විට $z = x + iy$ සහ $w = \bar{z} + iz$ යැයි ගනිමු.

$a + ib$ ආකාරයෙන් w ලියා දක්වා $|w| = \sqrt{2}\,|Re(z) - Im(z)|$ බව පෙන්වන්න.

ආගන්ඩ් තලය මත Z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව විචලනය වනුයේ $|z + i\bar{z}| = \sqrt{2}$ වන අයුරින් නම්

එවිට z හි පථය $y = -x - 1$ හෝ $y = -x + 1$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. z මෙම රේඛාවක් මත විචලනය වන විට ඒවායින් $|z|$ අවම වන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙක, මාපාංක විස්ථාර ආකාරයෙන් ලියන්න.

මෙම සංකීර්ණ සංඛ්‍යා දෙකෙන් ඕනෑම එකක් z_0 විට ${z_0}^8 = \frac{1}{16}$ බව ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් සාධනය කරන්න.

14. (a) $x \neq -2$ සඳහා $f(x) = \frac{x^2+x}{(x+2)^2}$ යයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න, $x \neq -2$ සඳහා $f'(x) = \frac{3x+2}{(x+2)^3}$ බව පෙන්වන්න. එනයින්, $f(x)$ හි වැඩිවන ප්‍රාන්තරය සහ $f(x)$ හි අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

දැන්, $f''(x) = \frac{-6x}{(x+2)^4}$ යන්න භාවිතයෙන් $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

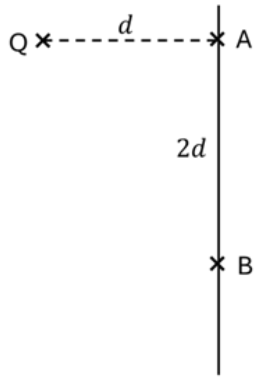
ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය, නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය x හා y අක්ෂ මත අන්තඃඛණ්ඩ පැහැදිලිව දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ඉහත අඳින ලද ප්‍රස්තාරය ඍණ නොවීම සඳහා y හි ධන දිශාව ඔස්සේ පමණක් සිදු කළ යුතු විස්ථාපනය කුමක් ද? එවිට ලැබෙන ප්‍රස්තාරයට අනුරූප ශ්‍රිතය $y = g(x)$ නම්,

$g(x) = \frac{9x^2+12x+14}{8(x+2)^2}$; $x \neq -2$ බව පෙන්වන්න.

$y = g(x)$ සඳහා අවම ලක්ෂ්‍යය සහ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය ලියා දක්වන්න.

(b) සෘජු රේඛීය මුහුදු වෙරළක A නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට ආසන්නතම d km දුරකින් මුහුදේ Q නම් ලක්ෂ්‍යයක මිනිසෙකු සිටී. A ලක්ෂ්‍යයේ සිට $2d$ km දුරකින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ ඔහුගේ නිවස පිහිටා ඇත. (රූපය බලන්න.)



මිනිසාට u kmh^{-1} නියත වේගයකින් පිහිනිය හැකි අතර $\sqrt{5}\,u$ kmh^{-1} නියත වේගයකින් ඇවිද යා හැකිය. ඔහුගේ නිවසට හැකිතාක් ඉක්මනින්ම ලඟාවීමට නම් ඔහු මුහුදු වෙරළේ A හා B අතර, B සිට $\frac{3d}{2}$ km දුරකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට පිහිනා යා යුතු බව පෙන්වන්න. නිවසට යාමට ගතවන අවම කාලය ද සොයන්න.

15. (a) $x \neq \frac{1}{3}$ සඳහා, $f(x) \equiv \frac{-9x^2+9x-1}{(3x-1)^2(9x^2-6x+2)}$ යයි ගනිමු.

දැන් සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා,
$-9x^2+9x-1 \equiv Ax(9x^2-6x+2)-(Ax+B)(3x-1)^2$
වන පරිදි A හා B නිඛිල සොයන්න.

එනයින්, $f(x)$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා, $\int F(x)\,dx$ සොයන්න.

(b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ විට $y = \frac{1}{\cos x - \sin x}$ සඳහා $\frac{dy}{dx}$ සොයන්න.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\right)^2 dx = 2 - \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ බව සාධනය කරන්න.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\tan x}{\tan x + \cot x}\,dx$ නිශ්චිත අනුකලය සඳහා ඉහත ප්‍රතිඵලය යොදා ගනිමින් $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cot x + \tan x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ බව පෙන්වන්න.

16. $\lambda \in \mathbb{R}$ වූ $l_0 \equiv 4x+7y+\lambda=0$ යැයි ගනිමු. l_0 රේඛාව $P(5,-3)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. λ හි අගය සොයන්න.
එම λ අගය සහිතව l_0 රේඛාව සම `ග $\frac{\pi}{4}$ ක කෝණයක් ආනතව P හරහා යන සරල රේඛා දෙකෙහි අනුක්‍රමණ සොයන්න.
ඒවායින් අනුක්‍රමණය ධන වූ රේඛාව l_1 ලෙසත්, අනුක්‍රමණය සෘණ වූ රේඛාව l_2 ලෙසත් ගනිමු. l_1 රේඛාව මත ඕනෑම Q ලක්ෂ්‍යයක් $Q \equiv (11t+5, 3t-3)$ ලෙස දැක්විය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු $t \in \mathbb{R}$ වූ පරාමිතියකි.

l_1 රේඛාව මත පිහිටි එහෙත් ඛණ්ඩාංක අක්ෂයක් මත නොපිහිටි Q_0 ලක්ෂ්‍යයේ සිට l_0 රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\sqrt{65}$ කි. Q_0 හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

Q_0 කේන්ද්‍රය වූ සහ අරය r ($r \in \mathbb{R}^+$) වූ ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය r ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

මෙම වෘත්තවලින් S_0 වෘත්තයෙහි l_0 රේඛාවෙන් ඒකක 8ක් දිග ජ්‍යායක් ආපතිත වේ.

$S_0 \equiv x^2+y^2+12(x+y)-9^2=0$ බව පෙන්වන්න.

P කේන්ද්‍රය වූ වෙනත් S වෘත්තයක් S_0 වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරයි.

$S \equiv (x-5)^2+(y+3)^2-139=0$ බව සාධනය කරන්න.

S_0 හා S වෘත්තවල පොදු ජ්‍යායේ සමීකරණය කුමක් ද?

17. (a) $k \in \mathbb{R}$ හා $x \in \mathbb{R} - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ වන පරිදි වූ $k\cos x + \cot x + 1 = cosecx$ සමීකරණය සලකමු.
$k^2 \sin^2 x \cos^2 x - 2(k+1)\sin x \cos x = 0$ බව පෙන්වා x හි විසඳුම් ලබා ගන්න.
එනයින්, $x \neq (2n-1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා,
$k.\cos x + \cot x + 1 = cosec\ x$ සමීකරණයට තාත්ත්වික විසඳුම් **නොපවතින** පරිදි K හි නිඛිලමය අගය කුලකය අපෝහනය කරන්න.

(b) (i) $x \in [-1, 1]$ සඳහා, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) තව දුරටත්, $m \in \mathbb{R}$ වන පරිදි,

$(\sin^{-1} x)^3 + (\cos^{-1} x)^3 = m\pi^3$ බව දී ඇත්නම්, ඉහත (i) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන්,

$\left(\sin^{-1} x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{48}(32m - 1)$ බව පෙන්වන්න.

තව ද, $y = \sin^{-1} x$ ශ්‍රිතයෙහි පරාසය සලකමින්, $\frac{1}{32} \leq m \leq \frac{7}{8}$ බව අපෝහනය කරන්න.

***