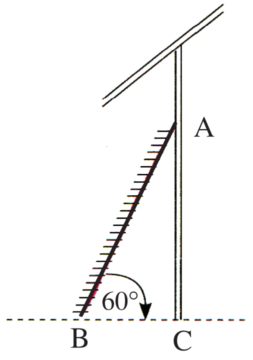
28 ත්‍රිකෝණමිතිය

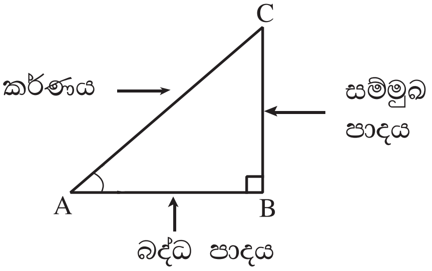
28.1 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත



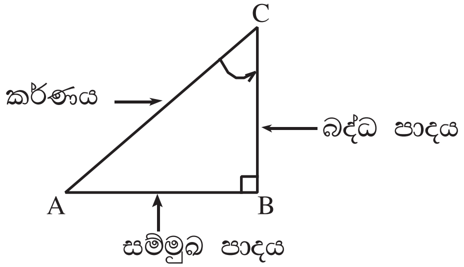
ගොඩනැගිල්ලක බිත්තියට හේත්තු කර ඇති, AB ඉණිමගක් රූප සටහනේ දැක්වේ. එය පොළව සමග 60° ක ආනතියක් පවතී නම් පරිමාණ රූපයක් ඇසුරින් ඉණිමගේ දිග ලබාගත හැකි නමුත් එය පහසුවෙන් ගණනය කිරීමට ABC සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකක් අතර අනුපාත භාවිත කළ හැකිය.

ත්‍රිකෝණමිතියේ දී සලකා බලනු ලබන සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ සලකා බලනු ලබන එක් එක් සුළු කෝණයක් ඇසුරින් එහි පාද හඳුන්වනු ලැබේ.

$\hat{A}$ අනුබද්ධයෙන්



$\hat{C}$ අනුබද්ධයෙන්

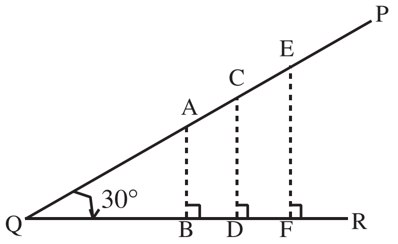


ක්‍රියාකාරකම (1)

(i) කඩදාසියක 30° ක කෝණයක් ඇඳ එය $P\hat{Q}R$ ලෙස නම් කරන්න.

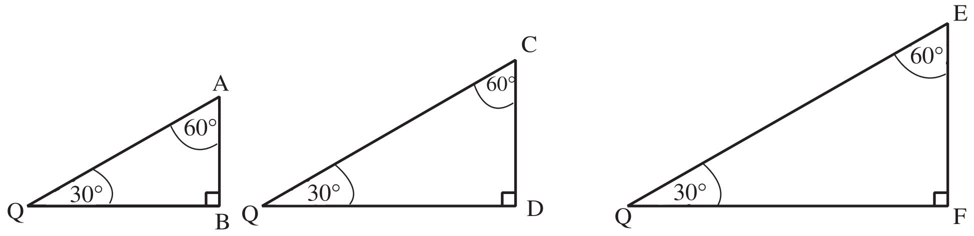
(ii) එහි PQ බාහුව මත A, C, E ලෙස අභිමත ලක්ෂ්‍ය තුනක් ලකුණු කරන්න.

(iii) A, C, E ලක්ෂ්‍යවල සිට QR පාදයට පිළිවෙළින් AB, CD, EF ලම්බරේඛා අඳින්න.



(iv) රූපයේ දැක්වෙන සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණවල පාදවල දිග ප්‍රමාණ මැන පහත වගුව පුරවන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.



සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණය	30° කෝණයට අදාළ සම්මුඛ පාදයේ දිග	30° කෝණයට අදාළ බද්ධ පාදයේ දිග	කර්ණයේ දිග
1. AQB Δ	....	....	....
2. CQD Δ	....	....	....
3. EQF Δ	....	....	....

ඉහත එක් එක් අවස්ථාවේ, පාදවල මිනුම් භාවිතකර පහත අනුපාතවල අගයන් දළ වශයෙන් ලබාගන්න.

(1) AQB සෘජුකෝණී Δ යේ 30° කෝණයට අදාළ ව } → $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{AB}{AQ} = \frac{\text{.............}}{\text{.............}} = $ ....

(2) CQD සෘජුකෝණී Δ යේ 30° කෝණයට අදාළ ව } → $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{CD}{CQ} = \frac{\text{.............}}{\text{.............}} = $ ....

(3) EQF සෘජුකෝණී Δ යේ 30° කෝණයට අදාළ ව } → $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{EF}{EQ} = \frac{\text{.............}}{\text{.............}} = $ ....

ඔබට සහ ඔබේ මිතුරන්ට ඉහත අනුපාත සඳහා 0.5ට ආසන්න අගයක් ලැබී ඇත්දැ යි බලන්න.

ක්‍රියාකාරකම (2)

ඉහත ක්‍රියාකාරකම 1 රූප සටහනේ එක් එක් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ 60° කෝණයට අදාළ $\frac{\textbf{සම්මුඛ පාදය}}{\textbf{කර්ණය}}$ යන අනුපාතයට ලැබෙන අගය ගණනය කරන්න.

▲ සෑම අවස්ථාවකම එය ආසන්න දෙවැනි දශමස්ථානයට 0·86ට ආසන්න අගයක් ලැබෙන බව පෙනේ.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

සයින් අනුපාතය

▲ මේ අනුව ඕනම සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක තෝරාගත් සුළුකොණයට අදාළව $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ යන අනුපාතය නියතයක් බව පෙනේ.

▲ මෙම නියතය, අදාළ සුළු කෝණයේ **සයිනය** ලෙස හැඳින්වෙයි.

▲ ඉහත ක්‍රියාකාරකම (1) දී ලැබුණු අගයයන් අනුව

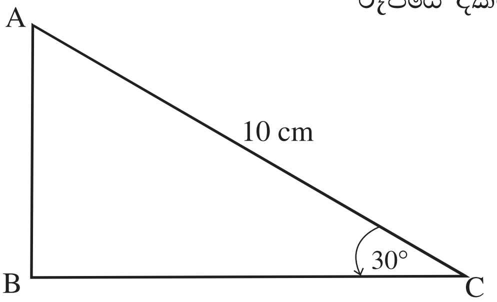
30° කෝණයේ සයිනය = 0·5

එය කෙටියෙන් sin 30° = 0·5 ලෙස ලියා දැක්විය හැකි ය.

✻ එසේම 60° කෝණයේ සයිනය = 0·86

sin 60° = 0·86

නිදසුන (1)



රූපයේ දක්වා ඇති දත්ත අනුව AB දිග ගණනය කරන්න.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$$

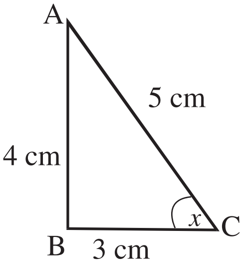
$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0{\cdot}5 = \frac{AB}{10} \quad (\sin 30^\circ = 0{\cdot}5 \text{ නිසා})$$

$$\therefore AB = 0{\cdot}5 \times 10$$

$$= \underline{\underline{5\text{cm}}}$$

නිදසුන (2)



රූපයේ දත්ත අනුව sin x අගය සොයන්න.

$$\sin x = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{4}{5}$$

$$\sin x = \underline{\underline{0{\cdot}8}}$$

ටැංජන අනුපාතය -

ක්‍රියාකාරකම (3)

ඉහත ක්‍රියාකාරකම 1 හි ලැබුණු වගුව අනුව එම සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණවල 30° කෝණයට අදාළ $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$ අනුපාතය සඳහා ලැබිය හැකි අගයයන් කීපයක් ගණනය කර බලන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

ඔබට ලැබුණු අගය 0·58 ට ආසන්න විය යුතු ය. එසේම 60° කෝණයට අදාළ ව ද

$\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$ අනුපාතය සඳහා ලැබිය හැකි අගයයන් කීපයක් ගණනය කරන්න.

ඔබට ලැබුණු අගය 1·7 ට ආසන්න අගයක් විය යුතු ය.

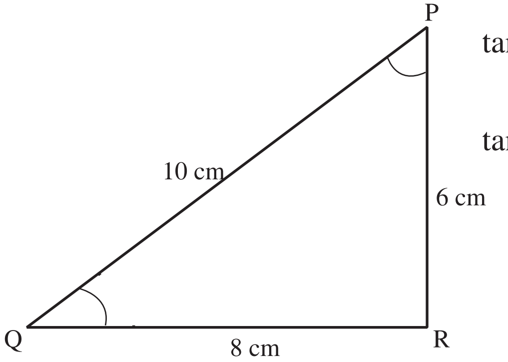
❈ මේ අනුව ඕනෑම සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක, තෝරාගත් සුළු කෝණයට අදාළ $\dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$ යන අනුපාතය නියතයක් වේ.

❈ මේ නියතය අදාළ සුළු කෝණයේ "ටැංජනය" ලෙස හැඳින් වේ.

❈ ඒ අනුව 30° කෝණයේ ටැංජනය = 0·58 නම්
එය කෙටියෙන් $\tan 30^\circ = 0{\cdot}58$ ලෙස දැක්වේ.

නිදසුන (3)

රූපයේ දත්ත අනුව $\tan \hat{Q}$, $\tan \hat{P}$ අගයන් සොයන්න.



$$\tan \hat{Q} = \frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}} = \frac{PR}{QR} = \frac{6}{8}$$

$$\tan \hat{P} = \frac{QR}{PR} = \frac{8}{6}$$

කෝසයින අනුපාතය

ක්‍රියාකාරකම (4)

ඉහත ක්‍රියාකාරකම 1 හිදී ලද වගුව අනුව එක් එක් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ 30° හා 60° කෝණවලට අදාළ $\dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ යන අනුපාතයට ලැබෙන අගයයන් ගණනය කරන්න.

30° සඳහා එම අනුපාතය 0·86 ට ආසන්න අගයක් බවත් 60° සඳහා එම අනුපාතය 0·5ට ආසන්න අගයක් බවත්, ඔබේ ගණනය කිරීම්වලින් තහවුරු කරගන්න.

මේ අනුව සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක තෝරාගත් සුළු කෝණයකට අදාළ

$\dfrac{\textbf{බද්ධ පාදය}}{\textbf{කර්ණය}}$ යන අනුපාතය ද නියත අගයක් ගනී. මෙම නියතය එම සුළු කෝණයේ කෝසයිනය ලෙස හැඳින්වේ.

❊ ඉහත ලැබුණු අගයයන් අනුව 30° **කෝසයිනය** හෙවත් cos 30° = 0·86 සහ 30° හි කෝසයිනය එනම් cos 60° = 0·5 කි.

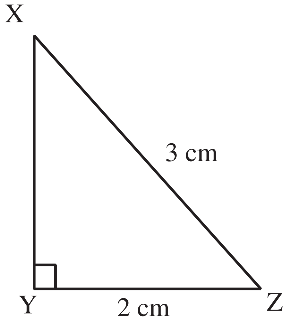
නිදසුන (4)

XYZ සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $\hat{Y} = 90°$, $\sin \hat{X} = \frac{2}{3}$ නම්

(i) XY දිග ගණනය කරන්න.

(ii) cos $\hat{X}$ අගය ගණනය කරන්න.

(iii) cos $\hat{Z}$ අගය ගණනය කරන්න.



(i) පයිතගරස් සම්බන්ධ අනුව

$XY^2 = 3^2 - 2^2$

$XY^2 = 9 - 4$

$XY^2 = 5$

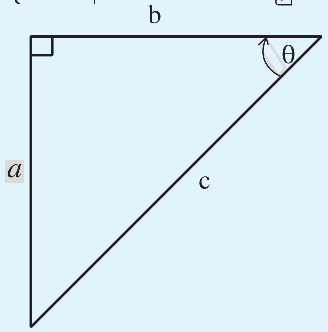
$XY = \sqrt{5}$

(මූල ස්වරූපයෙන් දැක්වීම ප්‍රමාණවත් වේ)

(ii) $\cos \hat{X} = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos \hat{Z} = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{2}{3}$

මෙතෙක් ඉගෙනගත් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු පහත සඳහන් ආකාරයට ගොනු කර ගනිමු.



$\sin \theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{a}{c}$

$\cos \theta = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{b}{c}$

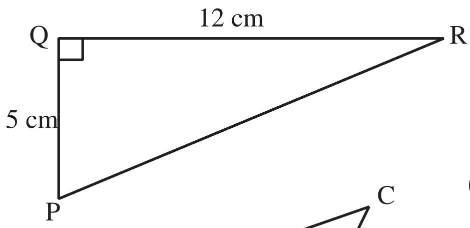
$\tan \theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}} = \dfrac{a}{b}$

මෙම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිත කරන අවස්ථා සලකා බලමු.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

28.1 අභ්‍යාසය

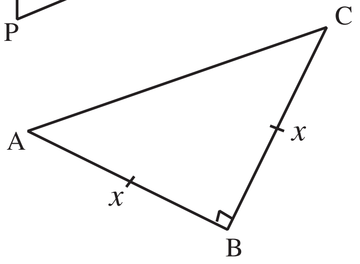
(1) රූපයේ දක්වා ඇති තොරතුරු අනුව



(i) PR දිග ගණනය කරන්න.

(ii) $\hat{P}$ සඳහා සයින අනුපාතයත්, කෝසයින අනුපාතයක්, ටැංජන අනුපාතයත් ලියන්න.

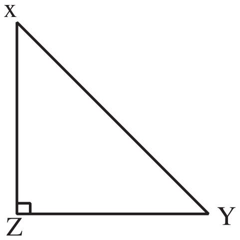
(iii) $\hat{R}$ සලකා ද එම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන සඳහා අගයන් ලබාගන්න.



රූපයේ (i) $AB = x$, $BC = x$ වූ විට AC දිග x ඇසුරින් ලබාගන්න. ඒ ඇසුරින් sin $\hat{A}$, cos $\hat{A}$, tan $\hat{A}$, සඳහා අගයයන් ලබාගන්න.
(පිළිතුරු මූල ස්වරූපයෙන් දෙන්න.)

(ii) AB = 21cm, BC = 20cm වූ විට AC = 29cm වූ විට $\hat{A}$ සඳහාත්, $\hat{C}$ සඳහාත් sin, cos, tan අනුපාත ලියන්න.

(3)



රූපයේ tan $\hat{Y} = 1/2$ නම් sin $\hat{Y}$ හා cos $\hat{Y}$ සඳහා අගයන් සොයන්න.

(පිළිතුරු මූල ස්වරූපයෙන් දෙන්න.)

(4) පහත සඳහන් තොරතුරු දළ රූපසටහන්වල දක්වා පිළිතුරු ලබාගන්න.

(i) cos $\hat{A} = \frac{3}{4}$ නම් sin $\hat{A}$ හා tan $\hat{A}$ සඳහා අගය සොයන්න.

(ii) sin $\hat{P} = \frac{5}{7}$ නම් cos $\hat{P}$ හා tan $\hat{P}$ සඳහා අගය සොයන්න.

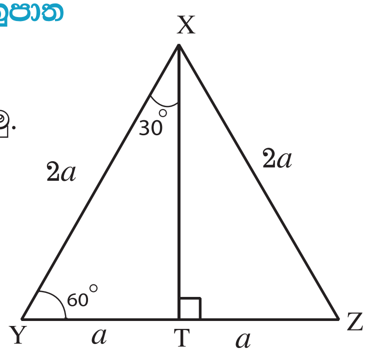
(iii) tan $\hat{B} = \frac{3}{2}$ නම් sin $\hat{B}$ හා cos $\hat{B}$ සඳහා අගය සොයන්න.

(iv) tan $\hat{x} = 7$ නම් cos $\hat{x}$ හා sin $\hat{x}$ සඳහා අගය සොයන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

28.2 30°, 60° හා 45° කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

ක්‍රියාකාරකම (5)



පාදයක දිග $2a$ බැගින් වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සලකමු.

XYZ ත්‍රිකෝණයේ X සිට YZ පාදයට XT ලම්බකය ඇඳ ඇත. එවිට $YT = TZ = a$ වේ. හිස්තැන් පුරවන්න.

XYT සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් සම්බන්ධය යෙදූ විට,

$XY^2 = YT^2 + XT^2$

$(2a)^2 = \text{........} + XT^2$

$4a^2 = \text{........} + XT^2$

$\text{..............} = XT^2$

$\sqrt{3}a = XT$

$\sin 60° = \dfrac{XT}{\text{........}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \dfrac{YT}{\text{........}} = \dfrac{a}{\text{......}} = \dfrac{\text{.......}}{\text{.......}}$

$\tan 60° = \dfrac{XT}{\text{........}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{\text{.......}} = \dfrac{\text{.......}}{\text{.......}}$

XYT සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ මිනුම් අනුව

$\sin 30° = \dfrac{\text{.......}}{XY} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{XT}{\text{........}} = \dfrac{\sqrt{3}a}{\text{.......}} = \dfrac{\text{.......}}{\text{.......}}$

$\tan 30° = \dfrac{YT}{\text{........}} = \dfrac{a}{\text{......}} = \dfrac{\text{.......}}{\text{.......}}$

ක්‍රියාකාරකම (6)

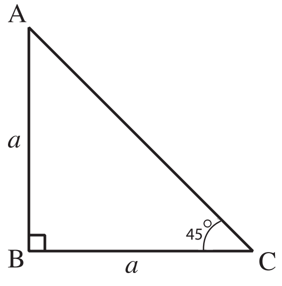
ABC සමද්විපාද සෘජුකෝණී Δ යේ $\hat{B} = 90°$, $AB = BC = a$ නම් හිස්තැන් පුරවන්න.

පයිතගරස් ප්‍රමේය අනුව

$AC^2 = a^2 + a^2$

$= 2a^2$

$AC = \sqrt{2}\,a$



නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

$\sin 45^\circ = \frac{AB}{.......} = \frac{a}{.......} = ...$

$\cos 45^\circ = \frac{BC}{........} = \frac{a}{.......} = ...$

$\tan 45^\circ = \frac{AB}{.......} = \frac{a}{.......} = 1$

▲ ඉහත ක්‍රියාකාරකම් 5 හා 6න් ලැබුණු ප්‍රතිඵල පහත වගුවේ දක්වා ඇත.

කෝණය / අනුපාතය	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

මෙම වගුවේ ඇතුළත් තොරතුරු පහත සඳහන් ආකාරවලට ගණනය කිරීම් සඳහා යොදාගත හැකි ය.

නිදසුන (5)

(i) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ$
(ii) $2\cos 30^\circ \sin 60^\circ$
අගය සොයන්න.

(i)
$\sin 30^\circ . \cos 60^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

(ii)
$2\cos 30^\circ \sin 60^\circ$

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{4}_2}$

$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

සටහන $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$ බැවින්
$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ ලෙස ද
$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ලෙස ද දැක්විය හැකි ය.
එසේ ම $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$ වේ.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

නිදසුන (6)

sin 30° cos 60° + cos 30° sin 60° = 1 බව පෙන්වන්න.

වම් පැත්ත $\sin 30^\circ \,.\, \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \,.\, \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

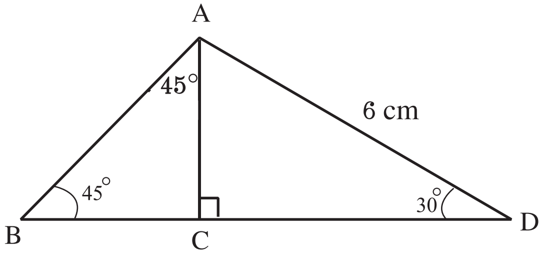
$= 1$

දකුණු පැත්ත $= 1$

$\therefore$ **sin 30° cos 60° + cos 30° sin 60° = 1**

නිදසුන (7)

රූපයේ දත්ත අනුව AC, BC, CD දිග ගණනය කරන්න.



ACD සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ

$\sin 30^\circ = \frac{AC}{AD}$

$\frac{1}{2} = \frac{AC}{6}$

$AC = \frac{6}{2} = 3\text{cm}$

$C\hat{B}A = 45^\circ$ හා $C\hat{A}B = 45^\circ$

$\therefore CA = CB = 3 \text{ cm}$

ACD සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ

$\cos 30^\circ = \frac{CD}{AD}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CD}{6}$

$CD = \frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$

28.2 අභ්‍යාසය

(1) අගය සොයන්න. (පිළිතුර සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.)

i. $\sin 30°. \cos 30°$

ii. $\cos 45°. \sin 60°$

iii. $\tan 30°. \cos 60°$

iv. $\sin 45°. \cos 45° + \sin 30°$

v. $\tan 30°. \tan 60°. \cos 60°$

vi. $\sin 30°. \cos 60° + \sin 60°. \cos 30°$

(2) $2\cos. \ 30°. \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(3) $1 + \sin 30° + \cos 60° = 2$ බව පෙන්වන්න.

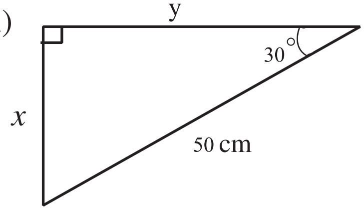
(4) $\cos 45°. \cos 60° - \sin 45°. \sin 60° = \frac{(1 - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}$ බව සාධනය කරන්න.

(5) $\frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \tan 30°$ බව සාධනය කරන්න.

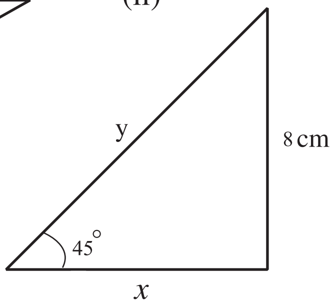
(6) $2 \sin 30°. \cos 60° = \sin 45°.\cos 45°. \tan 45°$ බව සාධනය කරන්න.

(7) පහත සඳහන් එක් එක් රූපයේ දී ඇති දත්ත සඳහා සුදුසු ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන් x හා y අගයන් සොයන්න. (අවසන් පිළිතුර සුළු කිරීමට අවශ්‍ය නැත.)

(i)

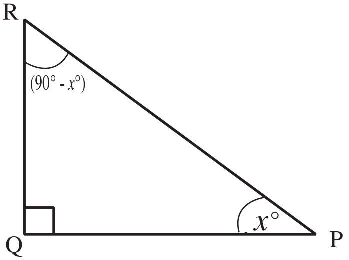


(ii)



(8) කුලුනක පාමුල සිට 30m ක් ඈතින් සමතලා පොළවේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කුලුන මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 30° බව පෙනුණි. නිරීක්ෂකයාගේ උස නො සලකා කුලුනේ උස සොයන්න. (අවසන් පිළිතුර සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.)

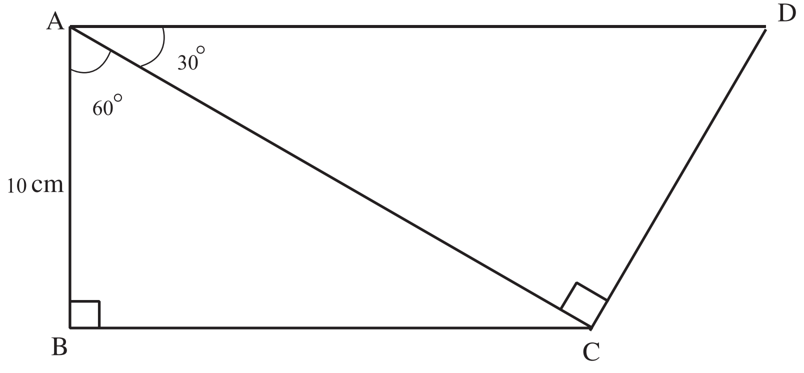
(9)



රූපයේ ලකුණු කර ඇති දත්තවලට අනුව $\sin x = \cos(90° - x)$ බව සාධනය කරන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

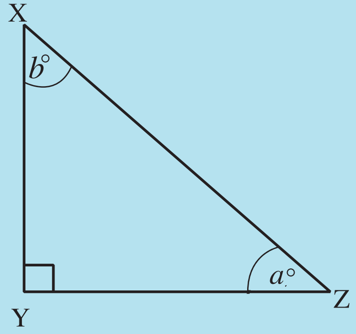
(10) රූපයේ දී ඇති දත්ත අනුව CD දිග ගණනය කරන්න.



(11) 30° හි ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන් $\frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \tan 30°$ බව පෙන්වන්න.

සාරාංශය

☛ XYZ සෘජුකෝණී Δ යේ



$\sin a° = \frac{XY}{XZ}$

$\cos a° = \frac{YZ}{XZ}$

$\tan a° = \frac{XY}{YZ}$

$\sin b° = \frac{YZ}{XZ}$

$\cos b° = \frac{XY}{XZ}$

$\tan b° = \frac{YZ}{XY}$

☛ **ඕනෑම සුළුකෝණයක sin, cos, tan යන ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවලින් එකක අගය දන්නේ නම් ඉතිරි අනුපාතවල අගය ලබාගත හැකි ය.**

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

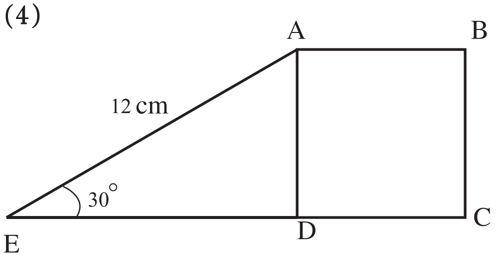
(1) $5 - 2\cos 30° \tan 30°$ අගය සොයන්න.

(2) $2\tan 30° = \frac{1}{\sin 60°}$ බව සාධනය කරන්න.

(3) $\sin x = \frac{2}{5}$ නම් $\cos x$ හා $\tan x$ අගය සොයන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

(4)



ABCD සමචතුරස්‍රාකාර කොටසකින් හා ADE සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයෙන් සමන්විත සංයුක්ත තල රූපයක් රූපසටහනේ දැක්වේ.

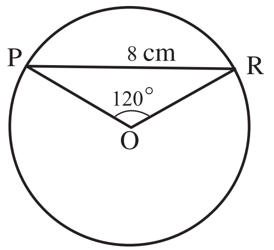
ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන්

(i) AD, ED දිග ගණනය කරන්න.

(ii) සංයුක්ත රූපයේ පරිමිතිය සොයන්න.

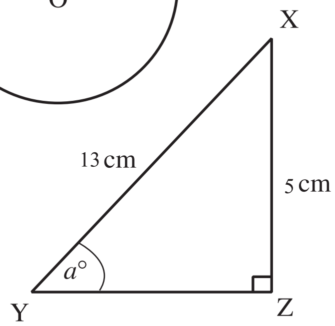
(අවසන් පිළිතුර සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.)

(5)



O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ PR ජ්‍යායයේ දිග 8cm වේ. $P\hat{O}R = 120°$ කි. වෘත්තයේ අරය ගණනය කරන්න. (පිළිතුර සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත.)

(6)

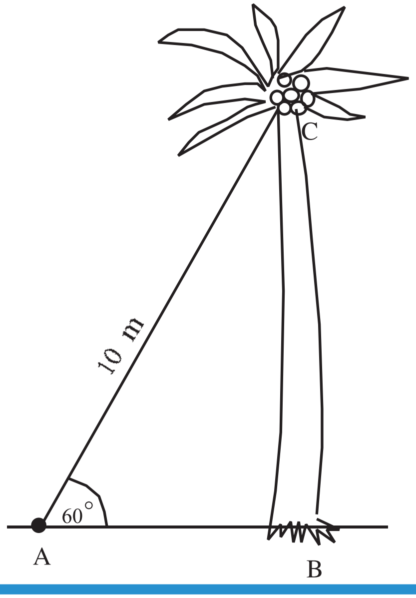


රූපයේ ලකුණු කර ඇති දත්ත අනුව

(i) YZ දිග ගණනය කරන්න.

(ii) sin a , cos a සහ tan a සඳහා අගයයන් ආසන්න දශමස්ථාන 4කට ගණනය කරන්න.

(7) නිවසකට බර වී ඇති පොල්ගසක් සිරස් වන සේ කම්බියකින් ඇද පොළවේ A නම් ලක්ෂ්‍යයේ සවි කර ඇති ආකාරය රූපයේ දැක්වේ. කම්බිය පොළව සමග 60° ආනතියක් දක්වන්නේ නම්,

(i) A සිට ගස පාමුලට (AB) ඇති දුර සොයන්න.

(ii) පොල් ගසේ උස (BC) සොයන්න.