17 සමාන්තරාස්‍ර - II

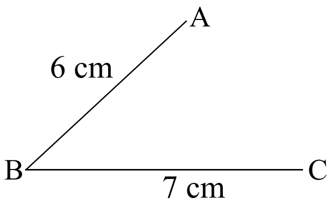
17-1 සමාන්තරාස්‍රය

සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තරවූ චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් බව මින් පෙර උගත්තෙමු. චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තර බව ලබා ගැනීමට චතුරස්‍රයේ වෙනත් ලක්ෂණ උපයෝගී කරගත හැකි ආකාරය සලකා බලමු.

ක්‍රියාකාරකම (1)

- කවකටුව හා සරල දාරය භාවිතයෙන් පහත සඳහන් ලක්ෂණ ඇතුළත් චතුරස්‍රයක් නිර්මාණය කරමු.

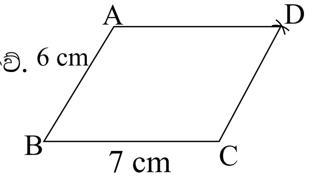
(i) බාහුවල දිග 7 cm හා 6 cm වූ රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයේ $A\hat{B}C$ නිර්මාණය කරන්න.



(ii) C සිට 6 cm ක් දුරින් A පිහිටි පැත්තේ පිහිටන පරිදිත් A සිට 7 cm ක් දුරින් C පිහිටි පැත්තේ පිහිටන පරිදිත් D ලක්ෂ්‍යය ලබා ගන්න.

(iii) ABCD චතුරස්‍රය සම්පූර්ණ කරන්න. එවිට AD = BC
AB = DC වේ.

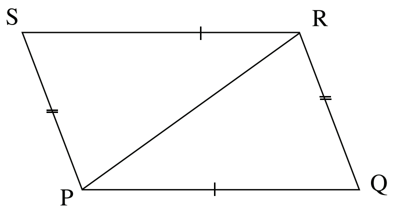
(iv) සරල දාරය සහ විහිත චතුරස්‍රය ආධාරයෙන් AB හා CD ත් BC හා AD සමාන්තර වන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.



මේ අනුව

සම්මුඛ පාද යුගල සමාන වූ චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තර ද වේ.

- ඉහත ප්‍රතිඵලය විධිමත් සාධනයකින් ද ලබාගත හැකි බව පහත හිස්තැන් සම්පූර්ණ කිරීමෙන් ලැබෙන ප්‍රතිඵලය අනුව පෙනේ.



මෙම චතුරස්‍රයේ ලකුණු කර ඇති දත්ත අනුව පහත හිස්තැන් පුරවන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

PSR Δ හා PQR Δ වල

PS	=	....	(දත්තය)
SR	=	....	(දත්තය)
....	=	....	(පොදු පාදය)
$\therefore$ PSR Δ	$\equiv$	PQR Δ	(...................)
$P\hat{R}S$	=	$R\hat{P}Q$	(අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

නමුත් මෙම කෝණ යුගලය ඒකාන්තර කෝණ වේ.
$\therefore$ SR // ....

මෙලෙස $S\hat{P}R$ = ...(අංග සම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

එහෙත් මෙම කෝණ යුගලය ඒකාන්තර කෝණ වේ.
$\therefore$ SP // QR වේ.

මේ අනුව PQRS චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තර ද වේ.

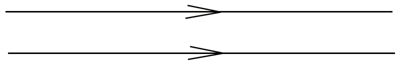
PQRS සමාන්තරාස්‍රයකි.

මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස දැක්විය හැකි ය.

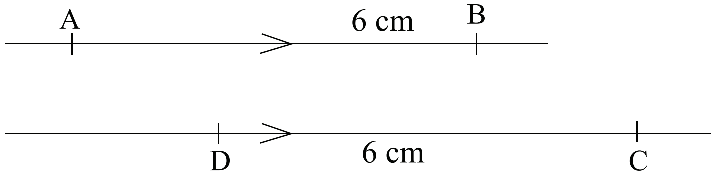
ප්‍රමේය :- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද යුගල සමාන නම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි.

ක්‍රියාකාරකම් (2)

(i) කෝදුවේ දාර දෙක භාවිතයෙන් පහත සඳහන් ආකාරයේ සමාන්තර රේඛා යුගලයක් අඳින්න.



(ii) එම සමාන්තර රේඛා යුගලයෙන් එකක් මත AB = 6 cm වන ලෙස ද අනෙක් සමාන්තර රේඛාව මත CD = 6 cm වන ලෙස ද රේඛා ඛණ්ඩ දෙකක් ලකුණු කරන්න.



(iii) දැන් ABCD චතුරස්‍රය සම්පූර්ණ කර එහි AD හා BC සරල රේඛා සමාන්තර වේ දැයි කෝදුව හා විහිත චතුරස්‍රය ආධාරයෙන් බලන්න.

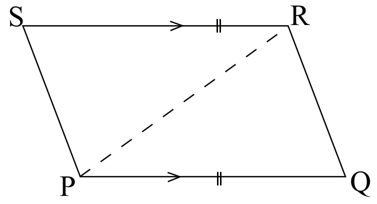
(iv) ඔබට ලැබුණු චතුරස්‍රයට සමාන්තරාස්‍රයක් යැයි කිව හැකි ද?

මේ අනුව එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන හා සමාන්තර වන චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වන බව පෙනේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය සාධනයක් ඇසුරින් ලබා ගනිමු. ඒ සඳහා පහත රූප සටහනට අනුව අදාළ හිස්තැන් පුරවන්න.

❄❄ දී ඇති රූපයේ PQ // RS හා PQ = RS වේ.

පහත හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.



PQR Δ හා PSR Δ වල

PQ = SR (............)

$Q\hat{P}R$ = ... (ඒකාන්තර කෝණ)

PR = ... (පොදු පාදය)

∴ PQR Δ ≡ PSR Δ (...................)

∴ $Q\hat{R}P$ = ... (අංගසම Δ වල අනුරූප අංග)

එහෙත් ඒවා ඒකාන්තර ∢ වේ.

∴ QR // .... වේ

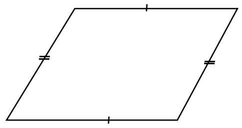
මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය :- චතුරස්‍රයක එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන හා සමාන්තර වේ නම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි.

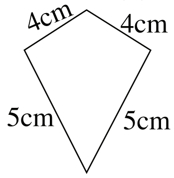
17-1 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් රූපවල ලකුණුකර ඇති දත්ත අනුව ඒවා සමාන්තරාස්‍ර වේ දැයි සොයා එම නිගමනයට හේතුව ද ලියන්න.

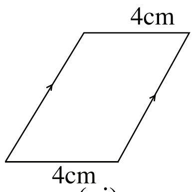
(i)



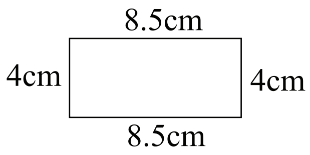
(ii)



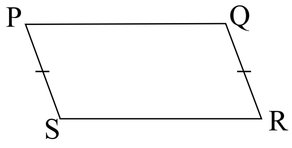
(iii)



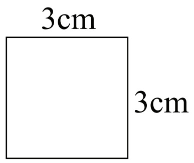
(iv)



(v)

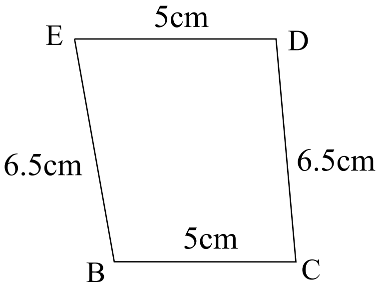


(vi)



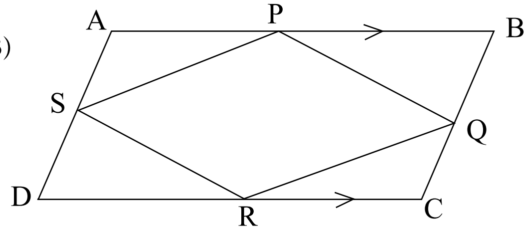
නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

(2)



BCDE චතුරස්‍රයේ දී ඇති දත්ත අනුව BC // ED වන එහෙත් BE // CD නොවන බව මලින්ද ප්‍රකාශ කරයි. මෙම ප්‍රකාශයේ සත්‍ය අසත්‍යතාව හේතු දක්වමින් පහදන්න.

(3)

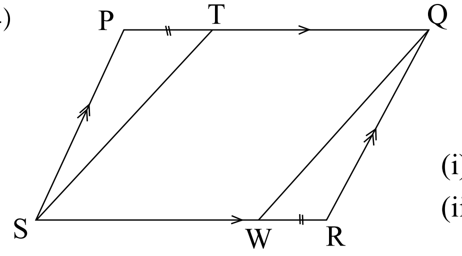


ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ AB, BC, CD, DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q, R, S වේ.

(i) ASP Δ ≡ QCR Δ බව (ii) SDR Δ ≡ PBQ Δ බව

(iii) PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(4)

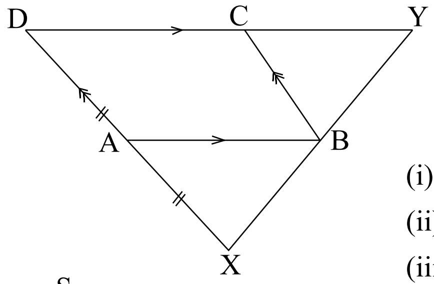


රූපයේ දැක්වෙන PQRS සමාන්තරාස්‍රයේ PT = WR වන පරිදි PQ මත T ලක්ෂ්‍යයත් SR මත W ලක්ෂ්‍යයත් පිහිටා ඇත.

(i) TQ = SW බව

(ii) TQWS සමාන්තරාස්‍රයක් බව හේතු සහිතව සාධනය කරන්න.

(5)



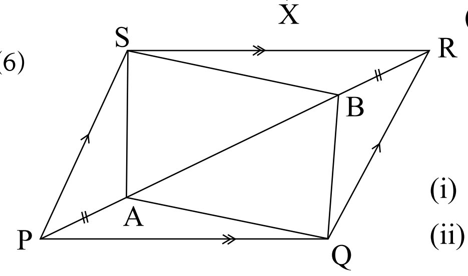
රූපයේ දැක්වෙන ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ DA = AX වන පරිදි DA රේඛාව X දක්වා දික්කර ඇත. දික් කළ DC හා XB රේඛා Y හි දී හමු වේ.

(i) AXBC සමාන්තරාස්‍රයක් බවත්

(ii) ABYC සමාන්තරාස්‍රයක් බවත්

(iii) DC = CY බවත් සාධනය කරන්න.

(6)



PQRS සමාන්තරාස්‍රයකි. PA = RB වන පරිදි A හා B ලක්ෂ්‍යය, PR විකර්ණය මත පිහිටා ඇත.

(i) PAS Δ ≡ QBR Δ බව සාධනය කරන්න.

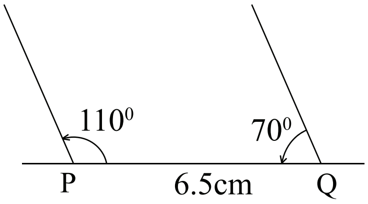
(ii) AQBS සමාන්තරාස්‍රයක් වන්නේ ඇයිදැයි හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වීමට තිබිය යුතු තවත් අවශ්‍යතා කීපයක් සලකා බලමු.

ක්‍රියාකාරකම් (3)

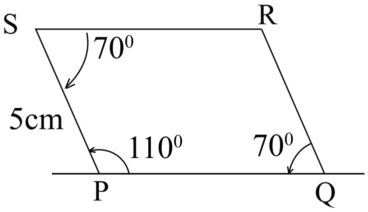
- කෝදුව හා කෝණමානය භාවිතකර පහත දැක්වෙන නිර්මාණය කරමු.

(i)



6.5cm දිග PQ සරල රේඛාවක් නිර්මාණය කර එහි P හා Q අන්ත දෙකෙහි පිළිවෙළින් 110^0 හා 70^0 කෝණ යුගලයක් අඳින්න. (මේ සඳහා කෝණමානය යොදා ගන්න.)

(ii)



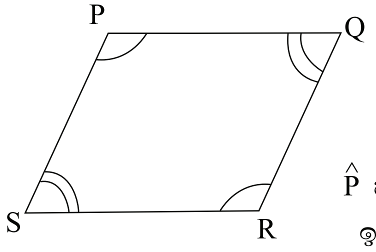
P හරහා ඇඳි රේඛාව මත PS = 5cm වන පරිදි S ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කර කෝණමානය භාවිතයෙන් $P\hat{S}R = 70^0$ වන පරිදි Q හරහා ඇඳි රේඛාව මත R ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න.

(iii) $\hat{R}$ අගය මැන බලන්න.

දැන් ඔබට ලැබී ඇත්තේ සම්මුඛ කෝණ යුගල සමාන චතුරස්‍රයකි.

- චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තර වන බව විහිත චතුරස්‍රය හා කෝදුව ආධාරයෙන් නිරීක්ෂණය කරන්න.
- මේ අනුව සම්මුඛ කෝණ යුගල සමාන වූ චතුරස්‍රයක, සම්මුඛ පාද යුගල ද සමාන්තර වන බව පෙනේ.
- මෙම ප්‍රතිඵලය සාධනයක් ඇසුරින් ද ලබාගත හැකි ය. ඒ සඳහා පහත රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ප්‍රයෝජනයට ගනිමින් හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

රූපයේ දැක්වෙන PQRS චතුරස්‍රයේ $\hat{P} = \hat{R}$ හා $\hat{Q} = \hat{S}$ වේ.



$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{S} + \hat{R} = 360^0$ (.........)

$\hat{P} = \hat{R}$ හා $\hat{Q} = \hat{S}$ නිසා

$2\hat{P} + 2\hat{Q}$ = ...

$\hat{P} + \hat{Q}$ = ...

$\hat{P}$ හා $\hat{Q}$ මිත්‍රකෝණ වන බැවින් PS // ....

ඉහත ආකාරයට ම $2\hat{P} + 2\hat{S} = 360^0$

$\hat{P} + \hat{S} = 180^0$

$\hat{P}$ හා $\hat{S}$ .... කෝණ බැවින්

PQ .... SR වේ.

◎ මෙම ප්‍රතිඵලය අනුව චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නම් එහි සම්මුඛ පාද යුගල ද සමාන්තර වේ.

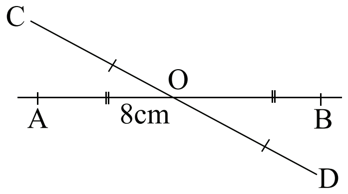
මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැක.

ප්‍රමේයය :- චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ සමාන නම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි.

ක්‍රියාකාරකම් (4)

(i) 8cm දිග AB සරල රේඛා ඛණ්ඩයක් අඳින්න. එහි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O ලෙස ලකුණු කරන්න.

(ii) O හරහා ගමන් කරන 6cm දිග වූ ද O මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වූද CD නම් තවත් රේඛාවක් එය මත ම අඳින්න.



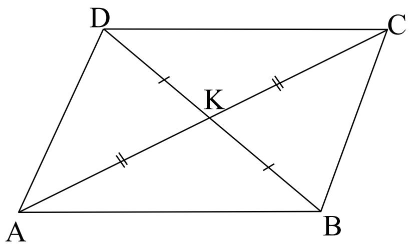
(iii) ACBD ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ පාද සමාන්තර බව ඔබ කලින් විමසූ ක්‍රමයට ම ලබා ගන්න.

මේ අනුව විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වන චතුරස්‍රයක සම්මුඛ පාද සමාන්තර වන බව පෙනේ.

මෙම ප්‍රතිඵලය ද සාධනයක් ඇසුරින් ලබා ගත හැකි ය.

ක්‍රියාකාරකම් (5)

✳ රූපයේ දැක්වෙන චතුරස්‍රයේ විකර්ණ K හි දී එකිනෙක ඡේදනය වී ඇත. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව පහත හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.



AKB Δ හා DKC Δ වල

AK	=	....	(දත්තය)
BK	=	....	(දත්තය)
$A\hat{K}B$	=	....	(ප්‍රතිමුඛ කෝණ)
$\therefore$ AKB Δ	$\equiv$	DKC Δ	(...................)
$\therefore$ $A\hat{B}K$	=	$K\hat{D}C$	

නමුත් ඒවා ඒකාන්තර ∢ වේ.

$\therefore$ AB // DC .... වේ.

AKD Δ හා BKC Δ වල

AK	=	....	(දත්තය)
DK	=	....	(දත්තය)
$\hat{AKD}$	=	....	(ප්‍රතිමුඛ කෝණ)
∴ AKD Δ	≡	BKC Δ	(...................)
∴ $\hat{ADK}$	=	$\hat{KBC}$	

නමුත් මේවා .... වේ.

∴ AD // BC

මෙම ප්‍රතිඵලය අනුව ඕනෑම චතුරස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ නම් එහි සම්මුඛ පාද යුගල සමාන්තර වේ.

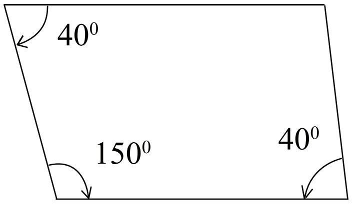
මෙම ප්‍රතිඵලය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය - චතුරස්‍රයක විකර්ණ එකිනෙක සමච්ඡේදනය වේ නම් එය සමාන්තරාස්‍රයකි.

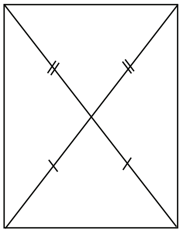
17-2 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් චතුරස්‍රවල ලකුණු කර ඇති දත්ත අනුව ඒවායින් කවරක් සමාන්තරාස්‍ර දැයි තෝරන්න. ඔබේ තේරීමට හේතු දක්වන්න.

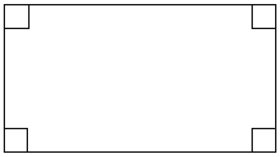
(i)



(ii)

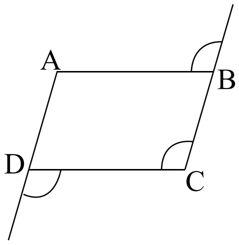


(iii)

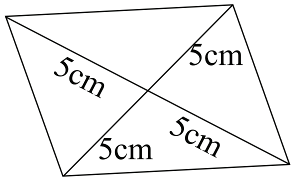


නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

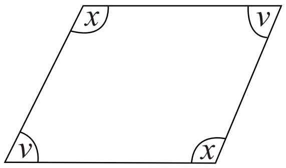
(iv)



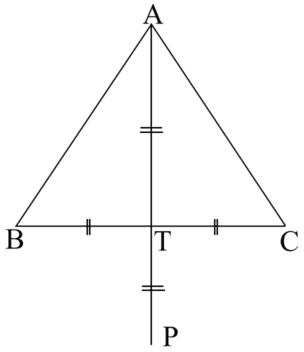
(v)



(vi)

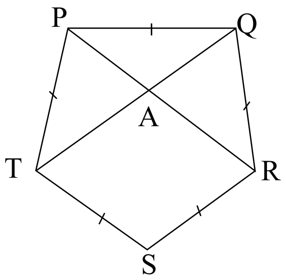


(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. AT = TP වන පරිදි AT රේඛාව P තෙක් දික් කර ඇත. ACPB සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



(3) PQR ත්‍රිකෝණයේ PR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. QP ට සමාන්තර ව R හරහා ඇඳි රේඛාවට දික් කළ QT රේඛාව S හි දී හමු වේ. PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(4)



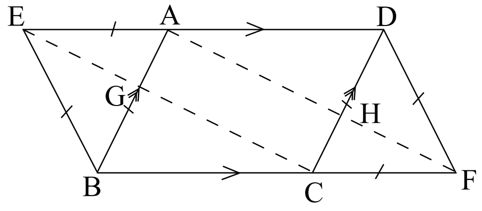
PQRST සවිධි පංචාස්‍රයකි. එහි PR සහ TQ රේඛා A හි දී ඡේදනය වේ.

(i) $S\hat{T}A$, $T\hat{A}R$ කෝණවල අගයන් සොයන්න.

(ii) ATSR සමාන්තරාස්‍රයක් වන්නේ ඇයි?

(iii) ATSR සමාන්තරාස්‍රය හැඳින්විය හැකි විශේෂ නාමය කුමක් ද?

(5)



රූපයේ ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. ABE සහ DCF යනු සමාන්තරාස්‍රයට පිටතින් පිහිටි සමපාද ත්‍රිකෝණ දෙකකි. AHF සහ CGE සරල රේඛා වේ.

(i) $A\hat{D}F = E\hat{B}C$ බව

(ii) AF = CE බව

(iii) AHCG සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

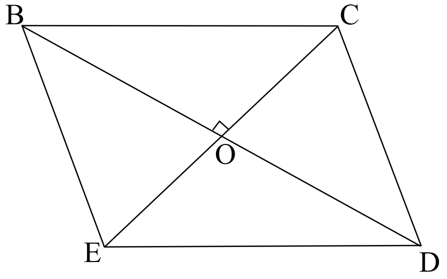
සාරාංශය

චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වන අවස්ථා

- ☛ එහි එක් සම්මුඛ පාද යුගලයක් සමාන ද සමාන්තර ද වන විට
- ☛ එහි සම්මුඛ පාද යුගල සමාන වන විට
- ☛ එහි සම්මුඛ කෝණ යුගල සමාන විට
- ☛ එහි විකර්ණ එකක් අනෙකෙන් සමච්ඡේදනය වන විට යන අවස්ථාවල දී චතුරස්‍රයක් සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

(1) O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා CD විෂ්කම්භ දෙකකි. ACBD සමාන්තරාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



(2) රූපයේ BCDE චතුරස්‍රයේ විකර්ණ O හිදී ඡේදනය වේ. $B\hat{O}C = 90^0$ නම් BCDE රොම්බසයක් වීමට තිබිය යුතු අවශ්‍යතා සියල්ල ම ලියන්න.

(3) PQRS සමාන්තරාස්‍රයකි. $PX \perp SR$ සහ $RY \perp PQ$ ද වේ. $SX = QY$ බව සාධනය කරන්න.

(4) LMNOPQ සවිධි ෂඩාස්‍රයකි.

(i) $LP = MO$ බව

(ii) LMOP සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(5) PQRS රොම්බසයකි. $S\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකයට SR පාදය T හි දී හමු වේ.

$3S\hat{P}T = P\hat{T}S$ බව පෙන්වන්න.