09 ත්‍රිකෝණ

9-1 සමද්විපාද ත්‍රිකෝණ

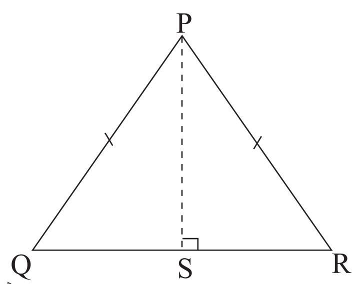
සටහන

සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක

- ආධාරක පාදය ලෙස සමාන පාද දෙක හැර ඉතරි පාදය ගත් විට
- ආධාරකයට සම්මුඛ ශීර්ෂයේ සිට ආධාරකයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට අඳිනු ලබන රේඛාව එනම් මධ්‍යස්ථයත්
- ශීර්ෂ කෝණයේ සමච්ඡේදකයත්
- ශීර්ෂයේ සිට ආධාරකයට අඳිනු ලබන ලම්බයත්
- ආධාරකයේ ලම්බසමච්ඡේදකයත් එකිනෙක සමපාත වේ.

මෙම ගුණ සාධනය කර පෙන්විය හැකි පහත ක්‍රියාකාරකම කරන්න.

ක්‍රියාකාරකම(1)



දත්තය - PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ = PR

සාධනය කළ යුත්ත -
* P ශීර්ෂයේ සිට QR ට අඳිනු ලබන මධ්‍යස්ථයත්
* P ශිර්ෂයේ සිට QR ට අඳින ලම්බයත්
* $Q\hat{P}R$ හි කෝණ සමච්ඡේදකයත්
* QR හි ලම්බ සමච්ඡේදකයත් සමපාත වන බව

නිර්මාණය - QR හි මධ්‍යලක්ෂ්‍යය වන S ලකුණු කර PS යා කරන්න.

සාධනය - (හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න)

PQS හා PSR Δ වල

PQ = ... (..................................)

PS = ... (..................................)

...... = SR (..................................)

PQS Δ ≡ .... (..................... අවස්ථාව)

$Q\hat{P}S$ =.................. (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

ඒ අනුව PS වලින් $Q\hat{P}R$ සමච්ඡේදනය වී ඇත.

$P\hat{S}Q$ = ...

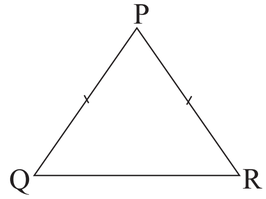
$P\hat{S}Q + P\hat{S}R$ = ... (..................................)

$P\hat{S}Q$ = ... = 90^0

PS $\perp$ QR

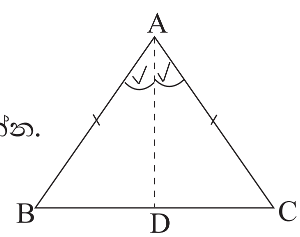
S ලක්ෂ්‍යය QR හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බැවින්
PS, QR හි ලම්බ සමච්ඡේදකයයි. එසේ ම PS, QR ට ඇඳි මධ්‍යස්ථයකි.

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමාන නම් එය සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් ලෙස හඳුන්වයි.



PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ = PR වන නිසා PQR සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් වේ.
මෙහි QR පාදය ආධාරකය යනුවෙන් ද $P\hat{Q}R$ හා $P\hat{R}Q$ ආධාරක කෝණ ලෙස ද හඳුන්වයි. ආධාරකයට සම්මුඛ කෝණය එනම් $Q\hat{P}R$ ශීර්ෂ කෝණය ලෙස හඳුන්වයි.

ප්‍රමේයයː- ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමාන නම් සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.



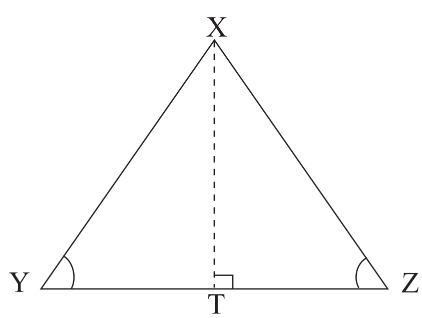
දත්තය - ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ.
සාධනය කළ යුත්ත - $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ බව
නිර්මාණය - $B\hat{A}C$ සමච්ඡේදකය, BC පාදය D හිදී හමු වන පරිදි අඳින්න.
සාධනය - ABD හා ACD Δ වල

AB	= AC	(දත්තය)
$B\hat{A}D$	= $C\hat{A}D$	(නිර්මාණය)
AD	= AD	(පොදු පාදය)
ABD Δ	≡ ACD Δ	(පාːකෝːපාː අවස්ථාව)
$A\hat{B}D$	= $A\hat{C}D$	(අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)
එනම් $A\hat{B}C$	= $A\hat{C}B$	වේ.

සටහන

ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් සමාන වූ විට සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද අතර සම්බන්ධතාවක් තිබේ දැයි පහත ක්‍රියාකාරකම ඇසුරින් සොයා බලමු.

ක්‍රියාකාරකම(2)



නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

දත්තය - XYZ ත්‍රිකෝණයේ $X\hat{Y}Z = X\hat{Z}Y$ වේ.

සාධනය කළ යුත්ත- $XY = XZ$ බව

නිර්මාණය - $Y\hat{X}Z$ සමච්ඡේදකය YZ පාදය T හි දී හමු වන සේ අඳින්න.

සාධනය - XYT හා XZT ත්‍රිකෝණවල

$X\hat{Y}T$ = ... (....................)

$Y\hat{X}T$ = ... (....................)

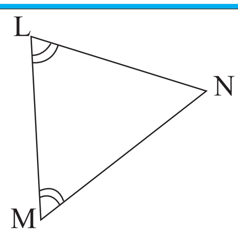
XT = ... (පොදු පාදය)

XYT Δ $\equiv$ .... Δ (.....................)

XY = ... (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

ප්‍රමේයය:- ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් සමාන නම් සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන වේ.

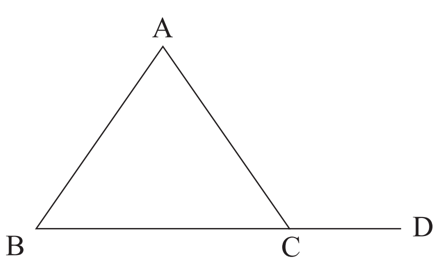


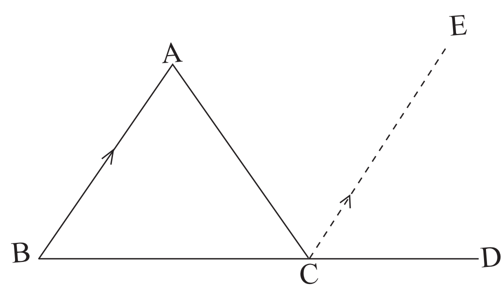
රූපයේ $N\hat{L}M = N\hat{M}L$ නම්
ඉහත ප්‍රමේයට අනුව LN = MN වේ.

ක්‍රියාකාරකම (3)

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය D තෙක් දික් කර ඇත.

මෙහි $B\hat{A}C$ හා $A\hat{B}C$ කෝණ දෙක $A\hat{C}D$ බාහිර කෝණය අනුබද්ධයෙන් අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණ දෙක ලෙස හැඳින්වේ.





දත්තය - ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය D තෙක් දික් කර ඇත.

සාධනය කළ යුත්ත - $A\hat{C}D = B\hat{A}C + A\hat{B}C$ බව

නිර්මාණය - C හරහා AB ට සමාන්තර ව CE අඳින්න.

සාධනය - හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

$A\hat{B}C$ = ... (අනුරූප ∢) - (1)

$B\hat{A}C = A\hat{C}E$ (................................) - (2)

(1)+(2) $A\hat{B}C + B\hat{A}C$ = ... + ...

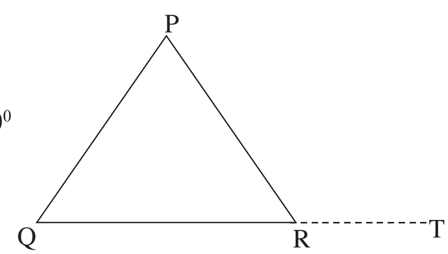
$A\hat{B}C + B\hat{A}C = A\hat{C}D$

මෙම ක්‍රියාකාරකමෙන් ලැබුණු ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය:- ත්‍රිකෝණයක පාදයක් දික්කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණවල ඓක්‍යයට සමාන වේ.

ක්‍රියාකාරකම (4)

රූපසටහන සැලකිල්ලට ගෙන හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.



දත්තය - PQR ත්‍රිකෝණකි.

සාධනය කළ යුත්ත - $P\hat{Q}R + P\hat{R}Q + Q\hat{P}R = 180^0$ (සෘජු ∢ 2) බව

නිර්මාණය - QR පාදය T තෙක් දික් කර ඇත.

හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

සාධනය - $P\hat{Q}R + Q\hat{P}R = P\hat{R}T$ (......................)

දෙපසට ම $P\hat{R}Q$ එකතු කළ විට

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = P\hat{R}T +$ ....

නමුත් $P\hat{R}T +$ .... $= 180^0$ (......................)

$P\hat{Q}R + Q\hat{P}R + P\hat{R}Q = 180^0$

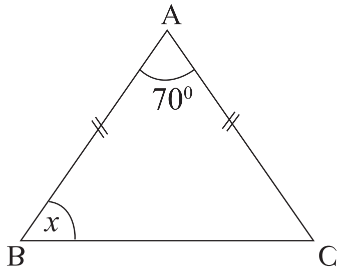
මෙම ක්‍රියාකාරකමෙන් ලැබුණු ප්‍රතිඵලය, ප්‍රමේයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය:- ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව180^0කි. (සෘජුකෝණ 2කි.)

ඉහත ප්‍රමේයයන් භාවිත කරන ගණනය කිරීම් හා සාධන කීපයක් සලකා බලමු.

නිදසුන (1)

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. x අගය සොයන්න.



$A\hat{B}C = A\hat{C}B = x$ (AB = AC නිසා)

$x + x + 70^0 = 180^0$ ($\triangle$ අභ්‍යන්තර කෝණ ඓක්‍යය)

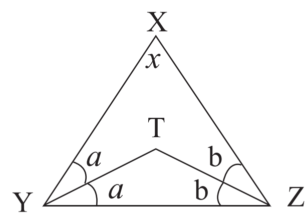
$2x = 180^0 - 70^0$

$2x = 110^0$

$\underline{\underline{x = 55^0}}$

නිදසුන (2)

XYZ ත්‍රිකෝණයේ $\hat{Y}$ හා $\hat{Z}$ සමච්ඡේදක T හිදී හමු වේ. $x = 50^0$ නම් $Y\hat{T}Z$ අගය සොයන්න.



$\hat{Y}$, TY මගින් සමච්ඡේදනය වී ඇති නිසා

$X\hat{Y}T = Z\hat{Y}T = a$ සහ එලෙස ම

$X\hat{Z}T = Y\hat{Z}T = b$ ද නම්

XYZ ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල ඓක්‍යය 180^0 නිසා

$2a + 2b + 50^0 = 180^0$

$2a + 2b = 180^0 - 50^0$

$2(a + b) = 130^0$

$a + b = 65^0$

TYZ ත්‍රිකෝණයේ $a + b + Y\hat{T}Z = 180^0$

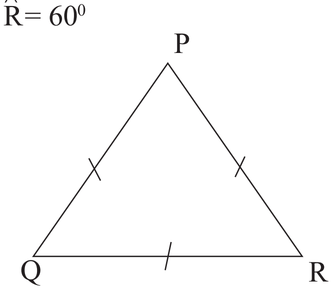
$65^0 + Y\hat{T}Z = 180^0$

$Y\hat{T}Z = 180^0 - 65^0$

$= \underline{\underline{115^0}}$

නිදසුන (3)

PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ = QR = PR වේ. $\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = 60^0$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය - PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ = QR = PR වේ.

සාධනය කළ යුත්ත - $\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = 60^0$ බව

සාධනය - $PQ = PR$ (දත්තය)

$\therefore P\hat{Q}R = P\hat{R}Q$ (ත්‍රිකෝණයක පාද 2ක් සමාන වේ. ඒවාට සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.)

මෙලෙස ම $PR = QR$ නිසා

$P\hat{Q}R = Q\hat{P}R$

ප්‍රත්‍යක්ෂ අනුව $P\hat{Q}R = P\hat{R}Q = Q\hat{P}R$

නමුත් $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180^0$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ ඓක්‍යය)

$\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R}$ නිසා

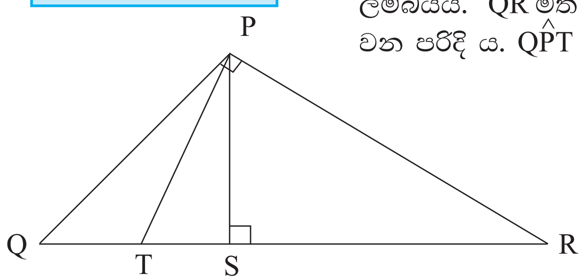
$3\hat{P} = 180^0$

$\hat{P} = 60^0$

මෙලෙස ම $\hat{Q} = 60^0$ හා $\hat{R} = 60^0$ වේ.

නිදසුන (4)

PQR ත්‍රිකෝණයේ $\hat{P} = 90^0$ වේ. PS යනු P සිට QR ඇඳි ලම්බයයි. QR මත T ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ PR = TR වන පරිදි ය. $Q\hat{P}T = T\hat{P}S$ බව සාධනය කරන්න.



දත්තය - PQR ත්‍රිකෝණයේ $\hat{P} = 90^0$

PS යනු P සිට QR ට ඇඳි ලම්බයයි.

QR මත T ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ PR = TR වන පරිදි ය.

සාධනය කළ යුත්ත - $Q\hat{P}T = T\hat{P}S$ බව

සාධනය - PTS ත්‍රිකෝණයේ $P\hat{S}T = 90^0$ (දත්තය නිසා)

$R\hat{T}P + T\hat{P}S = 90^0$ ——— (1)

$Q\hat{P}T + T\hat{P}R = 90^0$ ——— (2)

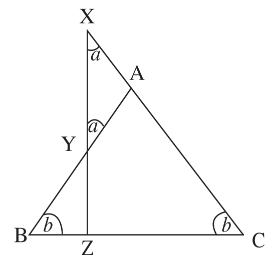
(1) හා (2) $R\hat{T}P + T\hat{P}S = Q\hat{P}T + T\hat{P}R$

නමුත් $R\hat{T}P = T\hat{P}R$ (PR = TR නිසා)

$T\hat{P}S = Q\hat{P}T$

නිදසුන (5)

ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. දික් කළ CA මත X පිහිටන්නේ AX = AY වන සේ ය. YZ⊥BC බව සාධනය කරන්න.



දත්තය - ABC Δ යේ AB = AC වේ.
දික්කල CA මත x පිහිටන්නේ
AX = AY වන සේ ය.

සාධනය කළ යුත්ත - YZ BC බව

සාධනය - $A\hat{X}Y = A\hat{Y}X = a$ (AX = AY නිසා)

AB = AC නිසා $A\hat{B}C = A\hat{C}B = b$ නම්

$B\hat{A}C = 2a$ (Δ පාදයන් දික්කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණවල ඓක්‍යය)

ABC Δ යේ අභ්‍යන්තර කෝණවල ඓක්‍යය 180^0 නිසා

$$B\hat{A}C + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180^0$$
$$2a + b + b = 180^0$$
$$2a + 2b = 180^0$$
$$a + b = 90^0$$

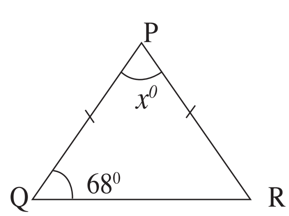
XZC ත්‍රිකෝණයේ $Z\hat{X}C + X\hat{C}Z + X\hat{Z}C = 180^0$

$$a + b + X\hat{Z}C = 180^0$$
$$90^0 + X\hat{Z}C = 180^0$$
$$X\hat{Z}C = 90^0$$
$$\therefore YZ \perp BC$$

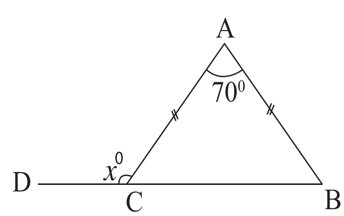
9-1 අභ්‍යාසය

(1) පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපවල දත්ත අනුව x^0 ලෙස දක්වා ඇති කෝණයේ අගය සොයන්න.

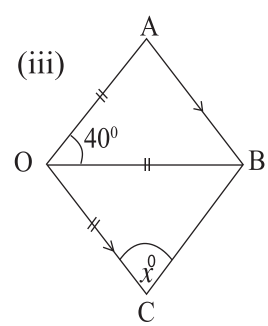
(i)



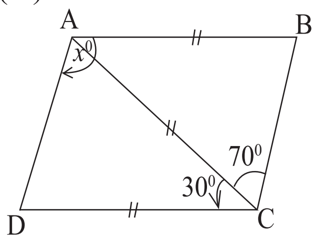
(ii)



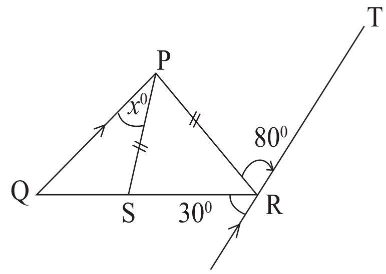
(iii)



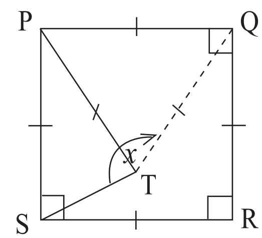
(iv)



(v)

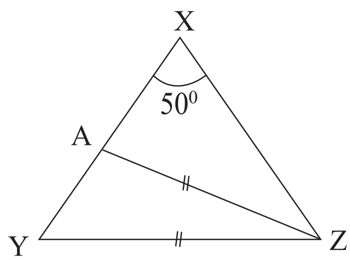


(vi)



(2) ආධාරක කෝණයක් ශීර්ෂ කෝණය මෙන් දෙගුණයක් වූ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක එක් එක් කෝණයේ අගය සොයන්න.

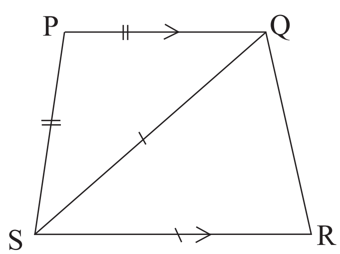
(3)



රූපයේ XYZ ත්‍රිකෝණයේ XY = XZ ද AZ = YZ ද වේ. $Y\hat{X}Z = 50^0$ නම් $X\hat{Z}A$ සොයන්න.

(4) ABCDE සවිධි පංචාස්‍රයකි. එහි $E\hat{B}C$ අගය සොයන්න.

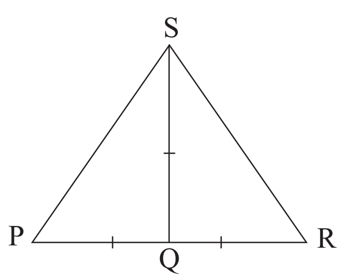
(5)



PQRS චතුරස්‍රයේ PQ // SR වේ. එහි PQ = PS සහ SQ = SR වේ නම් $S\hat{P}Q = 100^0$ වූ විට $S\hat{R}Q$ අගය සොයන්න.

(6) ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$ නම් AB = BC = CA බව සාධනය කරන්න.

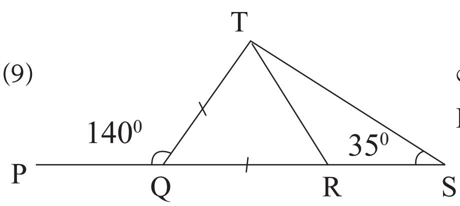
(7)



PSR ත්‍රිකෝණයේ PR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Q වේ. PQ = SQ වේ නම් $P\hat{S}R$ සෘජුකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

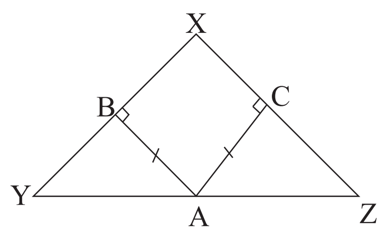
(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A} = \hat{B}$ වේ. $\hat{A}$ හා $\hat{B}$ සමච්ඡේදක x හි දී එකිනෙක හමුවේ. ABX සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

(9)



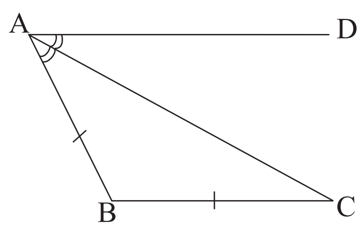
රූපයේ PQRS සරල රේඛාවකි. QT = QR වේ RT = RS බව පෙන්වන්න.

(10)



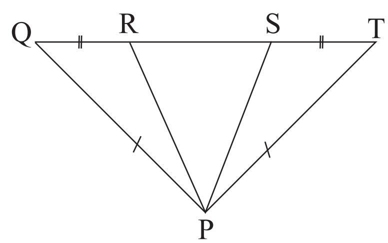
XYZ ත්‍රිකෝණයේ XY = XZ වේ. YZ මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ සිට XY ට ඇඳි ලම්බය AB ද XZ ට ඇඳි ලම්බය AC ද වේ. AB = AC නම් YZ පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය A බව සාධනය කරන්න.

(11)



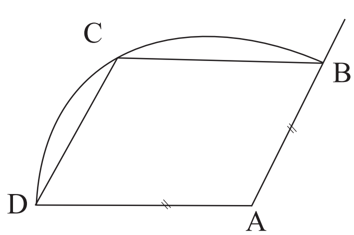
රූපයේ AC මගින් $D\hat{A}B$ සමච්ඡේදනය වී ඇත. AB = BC නම් AD // BC බව සාධනය කරන්න.

(12)



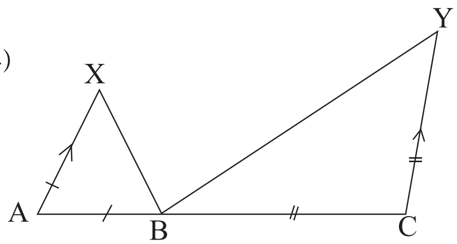
රූපයේ QRST සරල රේඛාවකි. PQ = PT සහ QR = ST නම් $P\hat{R}S = P\hat{S}R$ බව සාධනය කරන්න.

(13)



A කේන්ද්‍රය වූ වෘත්ත චාපයක් මත B, C, D ලක්ෂ්‍ය පිහිටයි.
$A\hat{D}C + A\hat{B}C = B\hat{C}D$ බව සාධනය කරන්න.
(ඉඟිය - AC යා කරන්න.)

(14)



රූපයේ ABC සරල රේඛාවකි. AX // CY වන අතර AX = AB සහ CB = CY වේ නම් $X\hat{B}Y$ සෘජුකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

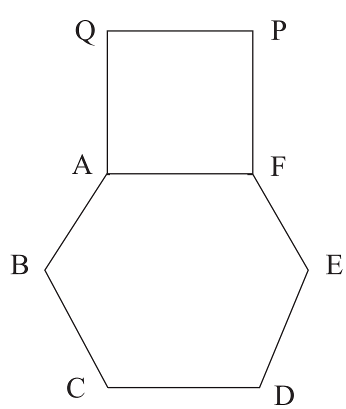
(15) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. BA හා BC මත පිළිවෙළින් X හා Y පිහිටා ඇත්තේ XB = YB වන පරිදි ය. දික්කළ XY ත් දික් කළ AC ත් Z හි දී හමු වේ. XA = XZ නම් $\hat{B} = 3\hat{A}$ බව සාධනය කරන්න.

සාරාංශය

- පාද දෙකක් සමාන ත්‍රිකෝණ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණ ලෙස හඳුන්වන අතර, ඒවායේ සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන වේ.
- ත්‍රිකෝණයක කෝණ දෙකක් සමාන නම් සමාන කෝණවලට සම්මුඛ පාද සමාන වේ.
- ත්‍රිකෝණයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණවල ඓක්‍යයට සමාන වේ.
- ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල ඓක්‍යය සෘජුකෝණ දෙකකි.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

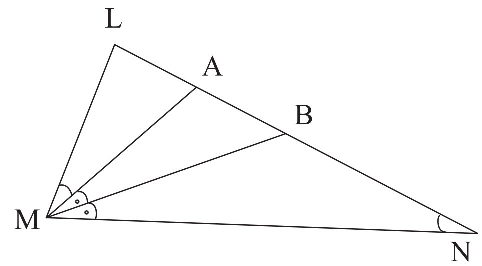
(1)



රූපයේ ABCDEF සවිධි ෂඩාස්‍රයකි. AFPQ සමචතුරස්‍රයකි. $F\hat{P}E$ අගය සොයන්න.

නොමිලේ බෙදා හැරීම සඳහා ය.

(2) රූපයේ LMN ත්‍රිකෝණයේ LN පාදය මත A හා B ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $A\hat{M}N$ සමච්ඡේදකය MB වන සේ සහ $L\hat{M}A = B\hat{N}M$ ලෙස නම් LM = LB බව සාධනය කරන්න.

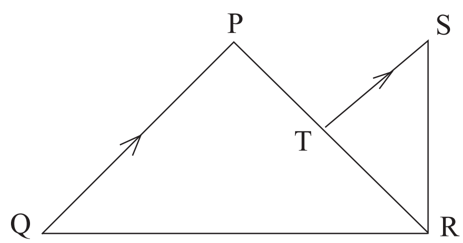


(3) PQR ත්‍රිකෝණයේ $\hat{P} = 90^0$ වේ. PS යනු P සිට QR ට ඇඳි ලම්බයයි. QR මත T ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ PR = TR වන පරිදි ය. $T\hat{P}S = T\hat{P}Q$ බව සාධනය කරන්න.

(4) XYZ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ XY = YZ වේ. $Y\hat{X}Z$ සමච්ඡේදකය T හිදී YZ හමුවේ. XZ = XY + YT බව සාධනය කරන්න. (ඉඟිය: T සිට XZ ට ලම්බයක් අඳින්න.)

(5) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. CN යනු C ලක්ෂ්‍යයේ සිට AB ට ඇඳි ලම්බයයි. $B\hat{A}C = 2N\hat{C}B$ බව සාධනය කරන්න.

(6)



PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ = PR වේ. TS = TR සහ PQ // TS නම් QRS සෘජුකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.