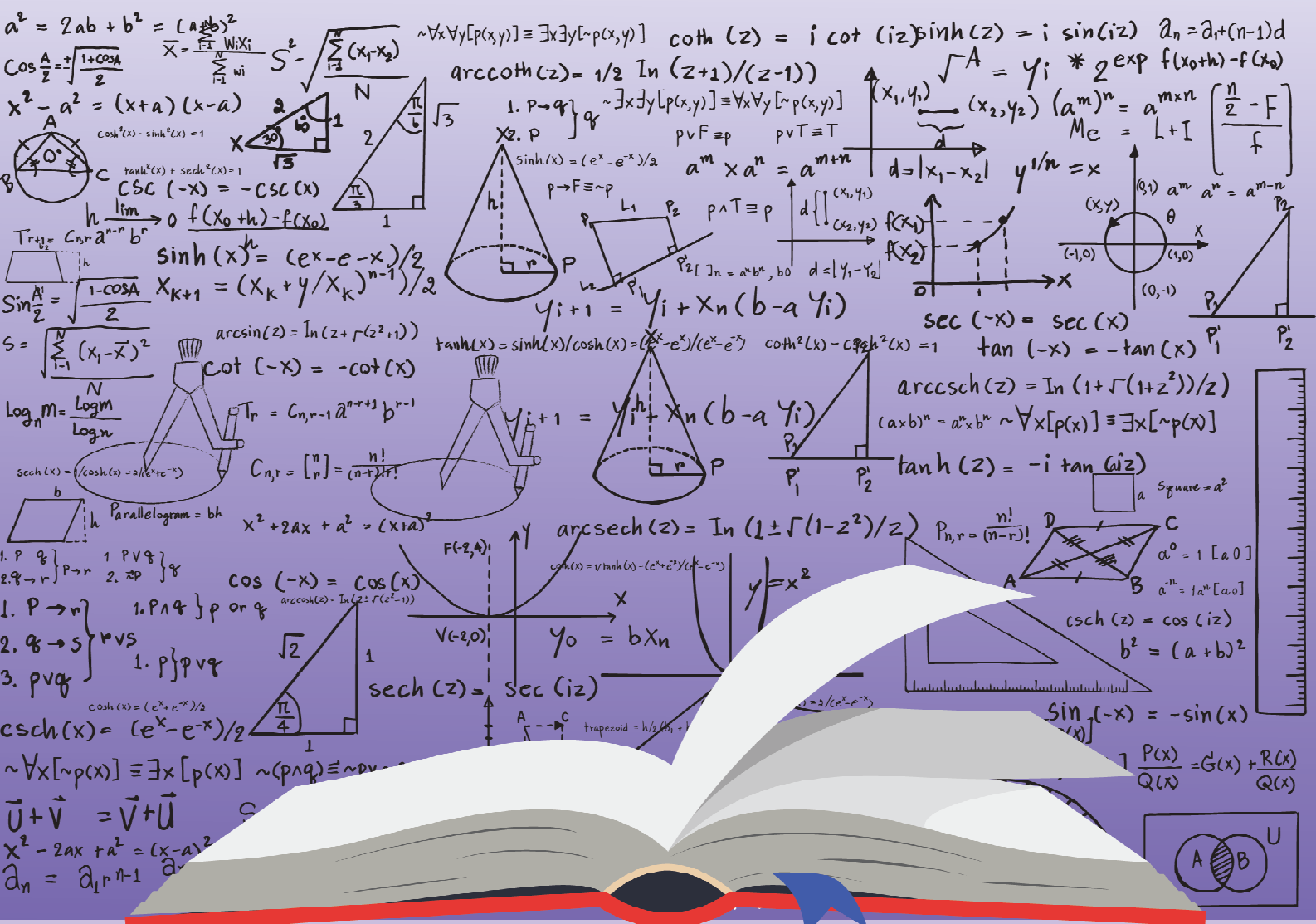




සංග්‍රහය

17.0 සෘජුකෝණාස්‍ර කාටිසිය අක්ෂ පද්ධතිය සහ ජ්‍යාමිතික ප්‍රතිඵල භාවිතා කරයි





නිපුණතාව 17

සෘජුකෝණාස්‍ර කාටිසිය අක්ෂ පද්ධතිය සහ ජ්‍යාමිතික ප්‍රතිඵල භාවිතා කරයි.

නිපුණතා මට්ටම 17.1

කාටිසිය ඛණ්ඩාංක තලයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර සොයයි.

නිපුණතා මට්ටම 17.1.1

කාටිසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතිය.

නිපුණතා මට්ටම 17.1.1

ලක්ෂ්‍ය දෙකක් අතර දුර සෙවීම.

නිපුණතා මට්ටම 17.2

දෙන ලද ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යා කරන රේඛා කණ්ඩය දෙන ලද අනුපාතයට බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයයි.

නිපුණතා මට්ටම 17.2.1

දී ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යා කරන සරල රේඛාවක් දෙන ලද අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.

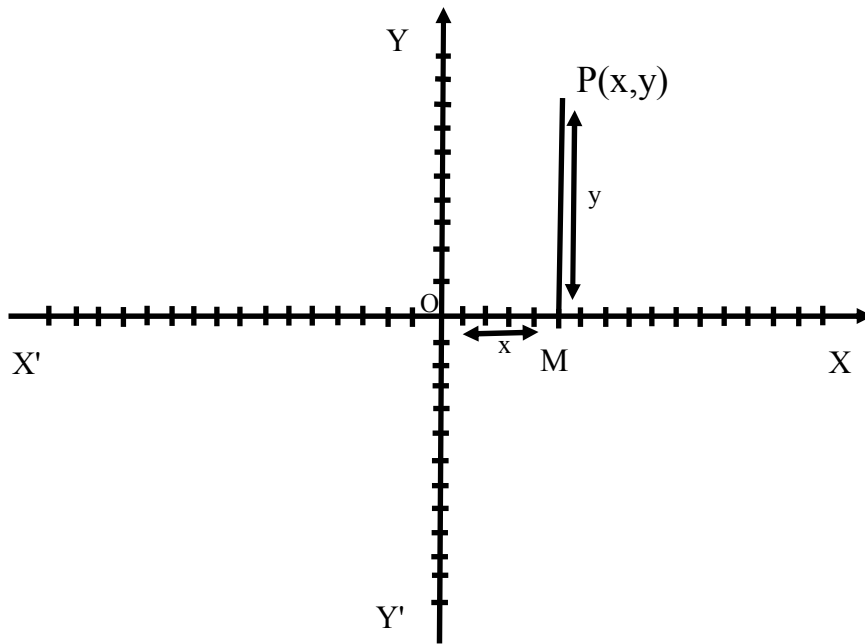
නිපුණතා මට්ටම 17.2.2

දී ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙකක් යා කරන සරල රේඛා ඛණ්ඩය දෙන ලද අනුපාතයට බාහිරව බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.



17.1.1 කාටිසිය බණ්ඩාංක පද්ධතිය

$X'OX$ සහ $Y'OY$ යන සංඛ්‍යා රේඛා දෙකක් ද්විමාන තලයක O හිදී එකිනෙකට ලම්භව ඡේදනය වීමෙන් කාටිසිය බණ්ඩාංක පද්ධතියක් නිර්මාණය වේ.



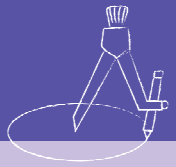
මෙම $X'OX$ රේඛාව සහ $Y'OY$ රේඛාව O මූලයේ සිට සමාන පරතරයන් ගෙන් සිටින පරිදි කොටස්වලට බෙදා O සිට X දිශාවට ඇති කොටස් ධනව වැඩි වන ලෙසටත්, O සිට X' දිශාවට ඇති කොටස් සෘණව වැඩිවන ලෙසටත් අංකනය කර දක්වනු ලැබේ.

$X'OX$ රේඛාව X -අක්ෂය ලෙසටත් $Y'OY$ රේඛාව Y -අක්ෂය ලෙසටත් O ලක්ෂ්‍ය මූලය ලෙසටත් හඳුන්වයි.

මෙලෙසටම O සිට Y දිශාවට ඇති කොටස් ධනව වැඩිවන ලෙසටත්, O සිට Y' දිශාවට ඇති කොටස් සෘණව වැඩිවන ලෙසටත් අංකනය දක්වනු ලැබේ. මෙම $X'OX$ සහ $Y'OY$ රේඛාවන්ට අගයන් අපරිමිත ප්‍රමාණයක් ගත හැකිය.

මෙම තලයේ පිහිටි ඕනෑම P ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු. මෙම P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $X'OX$ රේඛාවට ඇදී ලම්භකයේ අඩිය M නම්, OM හා MP දිගෙන් P ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක නිරූපණය වන්නේ යැයි කියනු ලැබේ.

මෙම OM දිග x - බණ්ඩාංකය හෙවත් **පාටිකය** ලෙසටත් MP දිග y -බණ්ඩාංකය හෙවත් **කොටිකය** ලෙසටත් හඳුන්වනු ලැබේ.



මෙම OM දිග x නම් සහ PM දිග y නම් මෙම P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම හෙවත් P ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය (x,y) ලෙස සංඛ්‍යා යුගලයක් මගින් නිරූපණය කළ හැක. මේ අනුව x - අක්ෂය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $(x,0)$ ආකාරයටත් y - අක්ෂය මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් $(0,y)$ ආකාරය ගනී. මේ අනුව මූල ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක $(0,0)$ වේ.

$X'OX$ සහ $Y'OY$ රේඛා මගින් මෙම ද්විමාන තලය කොටස් හතරකට වෙන් කරනු ලැබේ. මේ අනුව YOX තලය පළමු පාදකය ලෙසටත්, YOX' තලය දෙවන පාදකය ලෙසටත්, $X'OY'$ තලය තෙවන පාදකය ලෙසටත්, $Y'OX$ තලය හතරවන පාදකය ලෙසටත් හඳුන්වනු ලැබේ.

පළමු පාදකයේදී x සහ y අගයන් දෙකම ධනවන ආතර දෙවන පාදකයේදී x සහ y අගයන්ද y ධන අගයක්ද ගනී. තුන්වන පාදකයේදී x සහ y යන දෙකම සහ y ධන අගයන්ද, හතරවන පාදකයේදී x ධන y සහ y ධන අගයන්ද

මේ අනුව ද්විමාන තලයේ පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් තාත්වික සංඛ්‍යා යුගලයක් මගින් ඉදිරිපත් කළ හැකිය.

උදා:-

පහත ලක්ෂ්‍ය පිහිටි පාදකය සොයන්න.

(I) $(-2,3)$ (II) $(3,-1)$ (III) $(-2,-5)$ (IV) $(1,2)$

(I) $(-2,3)$ මෙහි පාඨකය ඊතද කොටිකය ධන වන බැවින් මෙම ලක්ෂ්‍යය දෙවන පාදකයේ පිහිටයි.

(II) $(3,-1)$ මෙහි පාඨකය ධනද කොටිකය සහ වන බැවින් මෙම ලක්ෂ්‍යය හතරවන පාදකයේ පිහිටයි.

(III) $(-2,-5)$ මෙහි පාඨකය සහ කොටිකය යන දෙකම සහ අගයන් වන බැවින් මෙම ලක්ෂ්‍යය තුන්වන පාදකයේ පිහිටයි.

(IV) $(1,2)$ මෙහි පාඨකය සහ කොටිකය යන දෙකම ධන අගයන් වන බැවින් මෙම ලක්ෂ්‍යය පළමු පාදකයේ පිහිටයි.

අභ්‍යාසය

1) පහත ලක්ෂ්‍ය කාටිසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියක ලකුණු කරන්න.

(I) $A(-2,1)$ (II) $B(3,-2)$ (III) $C(-4,-5)$ (IV) $D(0,3)$

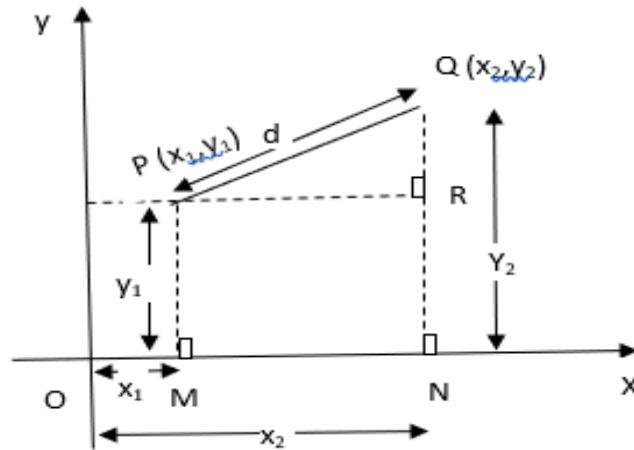
2) y -අක්ෂයේ සිට a දුරකින් x -අක්ෂය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය සොයන්න.





17.1.2 ඛණ්ඩාංක තලයේ පිහිටි ලක්ෂ දෙකක් යා කරන රේඛාවේ දිග සෙවීම

$P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ දෙක යා කරන රේඛාවේ දිග d නම්,



P සහ Q සිට x -අක්ෂයට ඇඳි ලම්භයන් PM සහ QN ද, P සිට QN රේඛාවට ඇඳි ලම්භය PR යයි ගනිමු. මේ අනුව,

$$PR = MN = x_2 - x_1$$

$$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$$

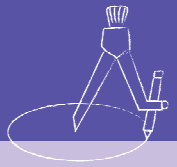
PQR සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් බැවින්

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boxed{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

මෙහි දී දිගක් සෘජු අගයක් විය නොහැකි නිසා සංඛ්‍යාත්මක අගය පමණක් ගනු ලැබේ. තවද මෙම P සහ Q ලක්ෂ ඕනෑම පාදයක පිහිටිය හැකිය.



උදා:- 1

A(3,-2) සහ B(-2,-7) ලක්ෂ් දෙක යා කරන රේඛාවේ දිග සොයන්න.

ලක්ෂ් දෙක අතර දුර d නම්,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-2 - (-7))^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{50} \\ &= 5\sqrt{2} \text{ ඒකක} \end{aligned}$$



. උදා:- 2

(a,-2) සහ (3,1) ලක්ෂ් අතර දුර ඒකක 5 ක් නම් a හි අගයන් සොයන්න

$$\sqrt{(a-3)^2 + (-2-1)^2} = 5$$

$$\begin{aligned} (a-3)^2 + (-3)^2 &= 5^2 \\ (a-3)^2 + 9 &= 25 \\ (a-3)^2 &= 16 \\ (a-3) &= \pm 4 \\ a &= 3 \pm 4 \end{aligned}$$



උදා:- 3

$A(a, a)$, $B(-a, -a)$ සහ $C(-\sqrt{3}a, \sqrt{3}a)$ ලක්ෂ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ බව පෙන්වන්න.

$$AB = \sqrt{(a - -a)^2 + (a - -a)^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2}$$

$$= \sqrt{8a^2}$$

$$= 2\sqrt{2}a$$

$$AC = \sqrt{(a - -\sqrt{3}a)^2 + (a - \sqrt{3}a)^2}$$

$$= \sqrt{(a + \sqrt{3}a)^2 + (a - \sqrt{3}a)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2 + a^2 - 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2}$$

$$= \sqrt{8a^2}$$

$$= 2\sqrt{2}a$$

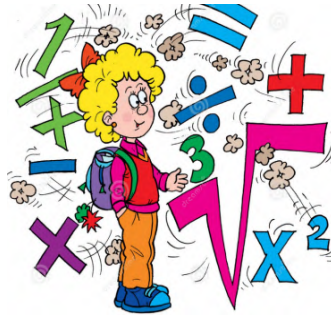
$$BC = \sqrt{(-a - -\sqrt{3}a)^2 + (-a - \sqrt{3}a)^2}$$

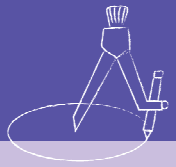
$$= \sqrt{(a - \sqrt{3}a)^2 + (-a + \sqrt{3}a)^2}$$

$$= \sqrt{8a^2}$$

$$= 2\sqrt{2}a$$

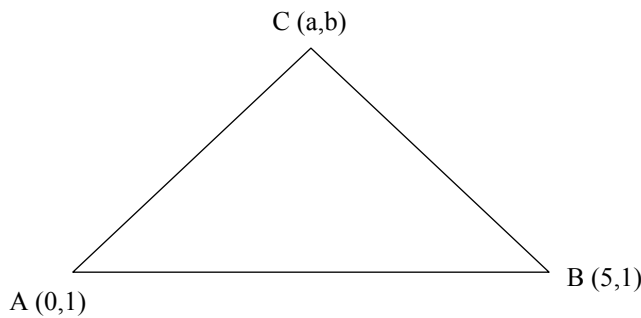
$$\therefore AB = AC = BC = 2\sqrt{2}a$$





උදා :- 4

සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ දෙකක් (0,1) සහ (5,1) වේ. තවද සමාන පාද වල දිග ඒකක 3ක් වෙයි නම් සහ තුන්වන ශීර්ෂය හතරවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටයි නම් එම ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



A(0,1) සහ B(5,1) ලෙසටද නොදන්නා ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (a,b) යයි ගනිමු.

එවිට

$$\begin{aligned} & \text{AC පාදයේ} \\ & (a-0)^2 + (b-1)^2 = 3^2 \\ & a^2 + (b-1)^2 = 9 \quad \text{සඳහා} \quad (1) \end{aligned}$$

$$(a-5)^2 + (b-1)^2 = 9 \quad \text{BC පාදයේ} \quad (2)$$

$$(2) - (1)$$

$$(a-5)^2 + a^2 = 0$$

$$a^2 - 10a + 25 - a^2 = 0$$

$$a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

(1)

හි ආදේශයෙන්

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (b-1)^2 = 9$$

$$(b-1)^2 = 9 - \frac{25}{4} = \frac{11}{4}$$

$$b-1 = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$b = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

C ශීර්ෂය තුන් වන පාදකයේ ඇති නිසා,

$$b = \frac{2 - \sqrt{11}}{2} \quad \text{විය යුතුය.}$$

එම නිසා C ශීර්ෂය,

$$\left(\frac{5}{2}, \frac{2 - \sqrt{11}}{2}\right)$$



අභ්‍යාසය

(1) පහත ලක්ෂ අතර දුර සොයන්න.

(I) $(-5, 7)$ සහ $(-1, 3)$

(II) $(a+b, a-b)$ සහ $(a-b, a+b)$

(III) $(ab^2, 2ab)$ සහ $(ac^2, 2ac)$

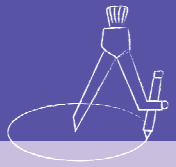


(2) $(8,6)$, $(8,-2)$ සහ $(2,-2)$ ශීර්ෂ වශයෙන් ඇති ත්‍රිකෝණයක පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය සොයන්න.

(3) $A(1,-2)$, $B(3,6)$, $C(5,10)$ සහ $D(3, 2)$ යන ලක්ෂ සමාන්තරාස්‍රයක ශීර්ෂ බව පෙන්වන්න.

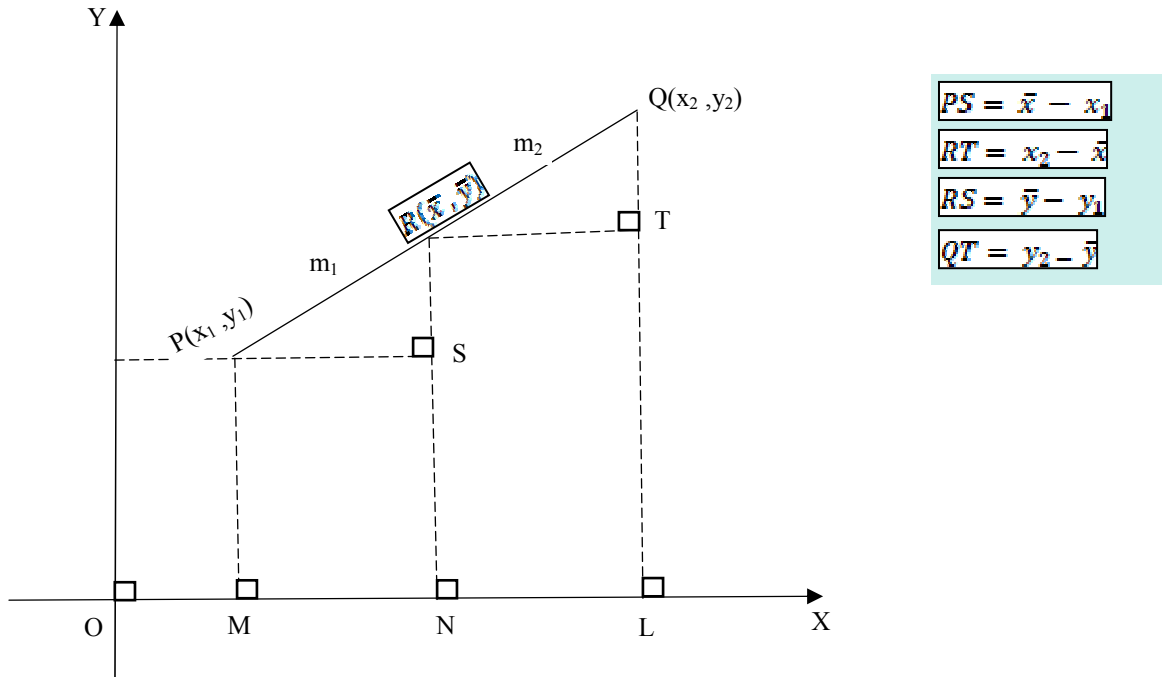
(4) ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක පැත්තක දිග ඒකක 3ක් වන අතර, B ශීර්ෂය මූල ලක්ෂය මතද, BC පාදය x අක්ෂය මතද පිහිටයි. ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂවල ශීර්ෂ වල ඛණ්ඩාංක සොයන්න.





17.2.1 ලක්ෂ දෙකක් යා කරන රේඛාවක් දෙන ලද අනුපාතයකට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.

$P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ දෙක යා කරන රේඛාව $m_1 : m_2$ අනුපාතයකට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.



PQ යා කරන රේඛාව $R(\bar{x}, \bar{y})$ ලක්ෂයෙන් $m_1 : m_2$ අනුපාතයකට අභ්‍යන්තරව බෙදේ යයි ගනිමු. එවිට,

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$$

P, R සහ Q ලක්ෂයන්ගේ සිට x අක්ෂයට ඇඳි ලම්භකයන් පිළිවෙලින් PM, RN සහ QL ද, P සහ R ලක්ෂයේ සිට RN සහ QL ට ඇඳි ලම්භයන් පිළිවෙලින් S හා T හිදී හමුවේ.

එවිට PRS සහ RQT ත්‍රිකෝණ සමරූපී බැවින්,

$$\frac{PS}{RT} = \frac{RS}{QT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - \bar{x}} = \frac{\bar{y} - y_1}{y_2 - \bar{y}} = \frac{m_1}{m_2}$$

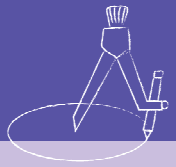
එනම්

$$\frac{\bar{x} - x_1}{x_2 - \bar{x}} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$m_2\bar{x} - m_2x_1 = m_1x_2 - m_1\bar{x}$$

$$\bar{x}(m_1 + m_2) = m_1x_2 + m_2x_1$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{(m_1 + m_2)}$$



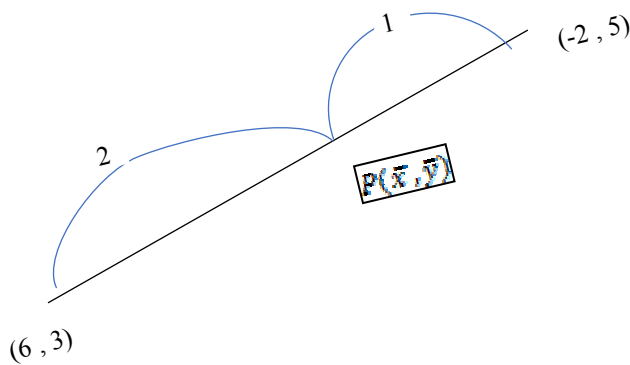
මෙලෙසම

$$\bar{y} = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{(m_1 + m_2)}$$

මෙම $P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ් දෙක ඕනෑම වෘත්ත පාදයක පිහිටිය හැක. මේ අනුව PQ යා කරන රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංකය $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

උදා :- 01

(6, 3) සහ (-2, 5) ලක්ෂ් යා කරන රේඛාව 2:1 අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$\bar{x} = \frac{2X(-2) + 1X6}{(2+1)} = \frac{2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{2X5 + 1X3}{(2+1)} = \frac{13}{3}$$

$$P = \left(\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

උදා :- 02

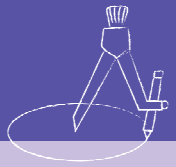
වෘත්තයක විශ්කම්භයක දෙකෙලවර ඛණ්ඩාංක (-4, 7) සහ (3, 8) නම් කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක C $(\bar{x}, \bar{y})$ නම්,

$$\bar{x} = \frac{-4X1 + 3X1}{(1+1)} = \frac{-1}{2}$$

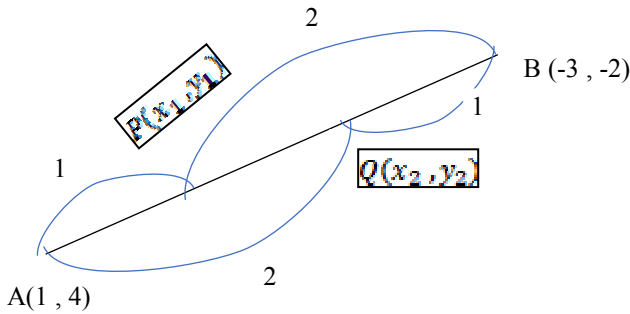
$$\bar{y} = \frac{7X1 + 8X1}{(1+1)} = \frac{15}{2}$$

$$C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{2}\right)$$



උදා :- 03

$(1, 4)$ සහ $(-3, -2)$ ලක්ෂ් යා කරන රේඛාව ත්‍රිවිජේදනය කරන ලක්ෂ් වල බන්ධාංක සොයන්න.



එම ලක්ෂ් දෙක යා කරන රේඛාව ත්‍රිවිජේදනය කරන ලක්ෂ් $P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ නම්,

$$x_2 = \frac{1x_1 + 2x(-3)}{(1+2)} = \frac{-5}{3}$$

$$y_2 = \frac{1x_4 + 2x(-2)}{(1+2)} = 0$$

$$Q = \left(\frac{-5}{3}, 0\right)$$

$$x_1 = \frac{1x - 3 + 2x1}{(1+2)} = \frac{-1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1x - 2 + 2x4}{(1+2)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$P = \left(\frac{-1}{3}, 2\right)$$

අභ්‍යාසය

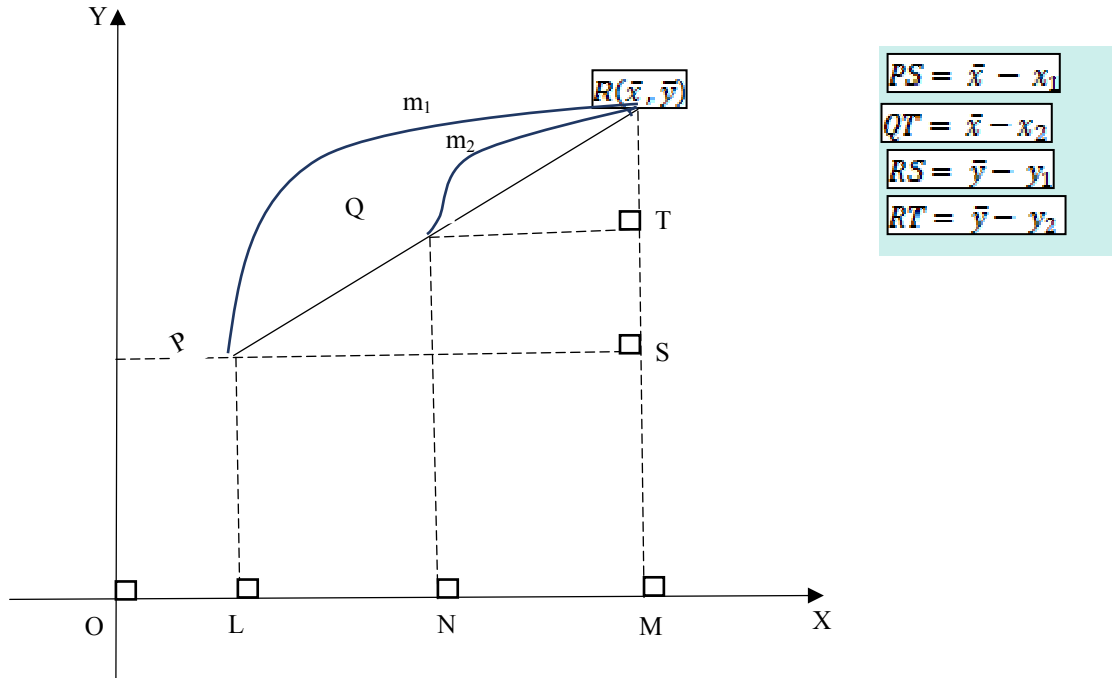
- 1) සමාන්තරාස්‍රයක ශීර්ෂ තුනක කන්ධාංක පිළිවෙලින් $(4, -4)$, $(-7, 5)$ සහ $(-2, 1)$ වේ නම් අනෙක් ශීර්ෂයේ කන්ධාංක සොයන්න.
- 2) ත්‍රිකෝණයක පාද වල මධ්‍ය ලක්ෂ් වල කන්ධාංක $(2, 1)$, $(-1, 0)$ සහ $(-1, 2)$ වේ. ත්‍රිකෝණයේ ශීර්ෂ වල කන්ධාංක සොයන්න.
- 3) $(2, y)$ ලක්ෂ්‍ය මගින් $(-4, 3)$ සහ $(6, 3)$ ලක්ෂ් යා කරන රේඛාව අභ්‍යන්තරව බෙදෙන අනුපාතය සොයන්න. තවද y හි අගයද සොයන්න.





17.2.2 ලක්ෂ දෙකක් යා කරන රේඛාවක් දෙන ලද අනුපාතයකට බාහිරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.

$P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ දෙක යා කරන රේඛාව $m_1 : m_2$ බාහිරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සෙවීම.



$P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ යා කරන රේඛාව $R(\bar{x}, \bar{y})$ ලක්ෂය මගින් $m_1 : m_2$ අනුපාතය බාහිරව බෙදෙන්නේ යයි ගනිමු. එවිට

$$\frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$$

P, Q සහ R ලක්ෂ වල සිට x අක්ෂයට ඇදී ලම්භකයක් PL, QN සහ RM යයි ගනිමු. තවද P සහ Q සිට RM මතට ඇදී ලම්භකයන් PS සහ QT වේ.

PRS සහ QRT ත්‍රිකෝණ සමරූපී බැවින්,

$$\frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT} = \frac{PR}{QR} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{\bar{x} - x_1}{\bar{x} - x_2} = \frac{\bar{y} - y_1}{\bar{y} - y_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{\bar{x} - x_1}{\bar{x} - x_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$m_2(\bar{x} - x_1) = m_1(\bar{x} - x_2)$$

$$m_2\bar{x} - m_2x_1 = m_1\bar{x} - m_1x_2$$

$$m_1\bar{x} - m_2\bar{x} = m_1x_2 - m_2x_1$$

$$\bar{x}(m_1 - m_2) = m_1x_2 - m_2x_1$$

$$\bar{x} = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{(m_1 - m_2)}$$

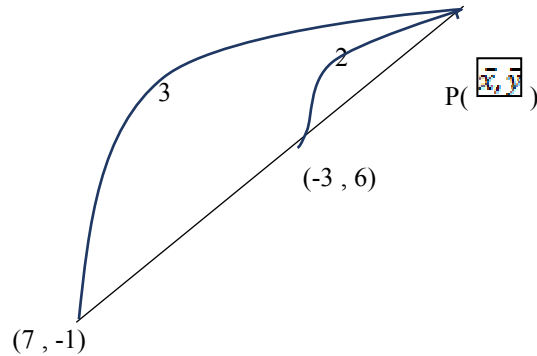


මෙලෙසම,
$$\bar{y} = \frac{m_1 y_2 - m_2 y_1}{(m_1 - m_2)}$$

මෙහිදී ද $P(x_1, y_1)$ සහ $Q(x_2, y_2)$ ලක්ෂ ඕනෑම පාදයක පිහිටිය හැකිය.

උදා :- 01

$(7, 1)$ සහ $(-3, 6)$ ලක්ෂ යා කරන රේඛාව 3:2 අනුපාතයට බාහිරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න



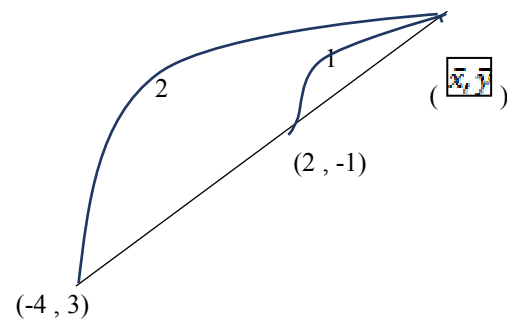
$$\bar{x} = \frac{3 \times (-3) - 2 \times 7}{(3 - 2)} = -23$$

$$\bar{y} = \frac{3 \times 6 - 2 \times 1}{(3 - 2)} = 16$$

$$P = (-23, 16)$$

උදා :-02

චාන්තයක කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංකය $(2, -1)$ වේ. චාන්තයේ විශ්කම්භය එක් අන්තයක ඛණ්ඩාංක $(-4, 3)$ නම් අනෙක් ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$$\bar{x} = \frac{2 \times 2 - 1 \times (-4)}{(2 - 1)} = 8$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times (-1) - 1 \times 3}{(2 - 1)} = -5$$

අනෙක් ලක්ෂයේ ඛණ්ඩාංක $(8, -5)$ වේ.