



$a^2 = 2ab + b^2 = (a+b)^2$
 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$
 $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
 $\tan^2(x) + \sec^2(x) = 1$
 $\csc(-x) = -\csc(x)$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $X_{k+1} = (X_k + y/X_k)^{n-1}/2$
 $\arcsin(z) = \ln(z + \sqrt{1-z^2})$
 $\cot(-x) = -\cot(x)$
 $\log_n m = \frac{\log m}{\log n}$
 $\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x) = 2/(e^x + e^{-x})$
 $\text{Parallelogram} = bh$
 $x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$
 $\cos(-x) = \cos(x)$
 $\operatorname{arccsch}(z) = \ln(1 \pm \sqrt{1+z^2})/z$
 $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$
 $\operatorname{csch}(x) = (e^x - e^{-x})/2$
 $\sim \forall x [\sim p(x)] \equiv \exists x [p(x)]$
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
 $x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$
 $a_n = a_{n-1} - 1$
 $\sim \forall x \forall y [p(x,y)] \equiv \exists x \exists y [\sim p(x,y)]$
 $\operatorname{arccoth}(z) = 1/2 \ln((z+1)/(z-1))$
 $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$
 $p \rightarrow F \equiv \sim p$
 $p \wedge T \equiv p$
 $y_{i+1} = y_i + x_n(b - a y_i)$
 $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$
 $\operatorname{arcsch}(z) = \ln(1 \pm \sqrt{1+z^2})/z$
 $\cosh(x) = 1/\tanh(x) = (e^x + e^{-x})/(e^x - e^{-x})$
 $y = x^2$
 $\operatorname{sech}(z) = \sec(iz)$
 $\text{trapezoid} = h/2(h_1 + h_2)$
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
 $\tan(-x) = -\tan(x)$
 $\operatorname{arccsch}(z) = \ln(1 \pm \sqrt{1+z^2})/z$
 $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
 $\sim \forall x [p(x)] \equiv \exists x [\sim p(x)]$
 $\tanh(z) = -i \tan(iz)$
 $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
 $\operatorname{csch}(z) = \cos(iz)$
 $b^2 = (a+b)^2$
 $\sin(-x) = -\sin(x)$
 $\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$
 $A \cap B \subseteq U$



නිපුණතාව 15

ව්‍යුත්පන්න භාවිතයෙන් ශ්‍රිතයක හැසිරීම විශ්ලේෂණය කරයි.

නිපුණතා මට්ටම 15.2

අවකලනය විමර්ශනය කරයි.

ඉගෙනුම් පල



අවකලනය සෙවීමට දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතා කරයි.





01. අවතලතාව

යම් ප්‍රාන්තරයක් තුළ දී වක්‍රයේ බැවුම වෙනස් වීමේ ස්වභාවය මත අවතලතාව රඳා පවතී. අවතලතාව ආකාර දෙකකට බෙදිය හැක. එවා නම්

(i) උඩු අවතලතාව

(ii) යටි අවතලතාව

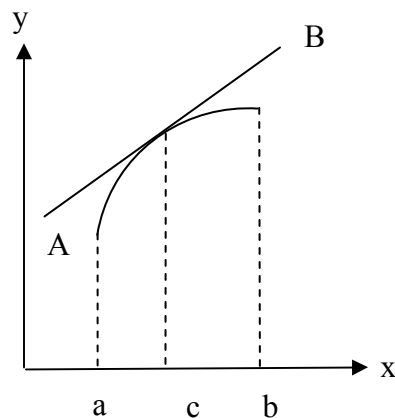
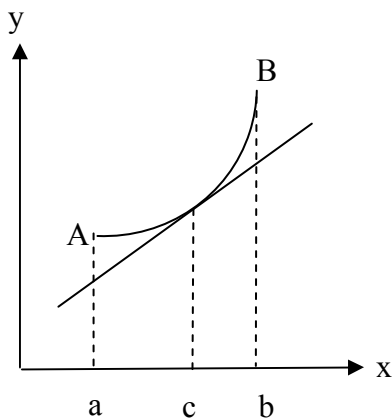
සියළු $x \in (a, b)$ තුළ අවකලය f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු. යනු $a < c < b$ වේ.



$x = c$ හි දී $y = f(x)$ ට අදින ලද ස්පර්ශකයට ඉහළින් වක්‍රය පවතී නම් ; $x = c$ හි දී වක්‍රය උඩු අතට අවතල යැයි කියනු ලැබේ.



$x = c$ හි දී $y = f(x)$ ට අදින ලද ස්පර්ශකයට පහළින් වක්‍රය පවතී නම් ; $x = c$ හි දී වක්‍රය යටි අතට අවතල යැයි කියනු ලැබේ.





දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් අවතලතාව නිර්ණය කිරීම.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ අවකලය f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු.

(i) සියළු $x \in (a, b)$ තුළ $f''(x) > 0$ නම්, එහි ප්‍රාන්තරය තුළ f ශ්‍රිතය උඩු අතට අවතල වේ.

(ii) සියළු $x \in (a, b)$ තුළ $f''(x) < 0$ නම්, එහි ප්‍රාන්තරය තුළ f ශ්‍රිතය යටි අතට අවතල වේ.

රූපය (i) සලකමු.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ f ශ්‍රිතය උඩු අතට අවතල වේ.

x හි අගය a සිට b දක්වා වැඩි වන විට ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය වැඩි වේ.
 f' එමඟින් f හි ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය f' වැඩිවන f'' ශ්‍රිතයක් වේ. එමනිසා හි ව්‍යුත්පන්නය ශ්‍රිතය
 ධන වේ.

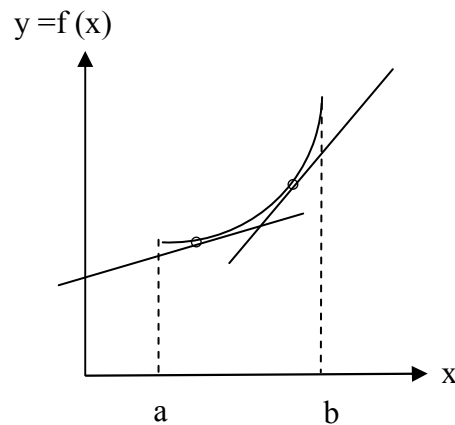
රූපය (ii) $x \in (a, b)$ සලකමු.

සියළු තුළ f f'' ශ්‍රිතය යටි අතට අවතල වේ. මෙහි දී එකී ප්‍රාන්තරය f' තුළ f''
 ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය අඩු වේ. එනම් හි ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය අඩු වේ. එබැවින් හි
 ව්‍යුත්පන්න ශ්‍රිතය සෘණ වේ.



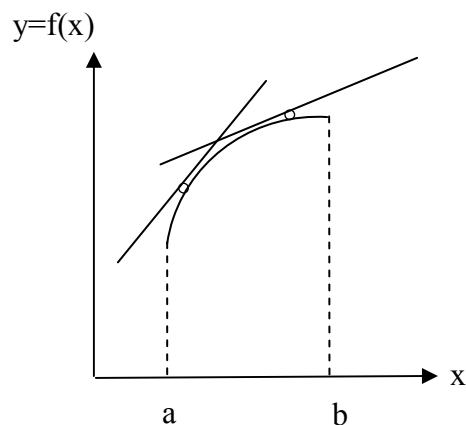
අර්ථ දැක්වීම - උඩු අවතලතාව

සියලු $x \in [a, b]$ තුළ $y=f(x)$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට ඉහළින් වක්‍රය පවතී නම්,
සියලු $x \in [a, b]$ තුළ වක්‍රය **උඩු අවතල** යැයි කියනු ලැබේ. (පහත රූපය බලන්න)



අර්ථ දැක්වීම - යටි අවතලතාව

සියලු $x \in [a, b]$ තුළ $y=f(x)$ වක්‍රයට අඳින ලද ස්පර්ශකයට පහළින් වක්‍රය පවතී නම්,
සියලු $x \in [a, b]$ තුළ වක්‍රය **යටි අවතල** යැයි කියනු ලැබේ. (පහත රූපය බලන්න)





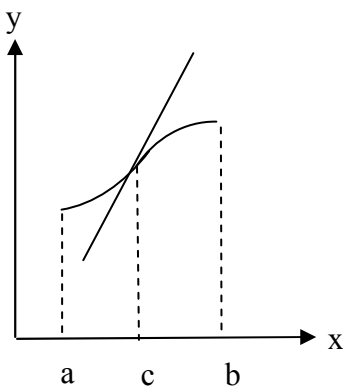
දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් අවතලතාවය නිර්ණය කිරීම.

සියලු $x \in (a,b)$ තුළ අවතලය f නම් ශ්‍රිතයන් සලකමු. (මෙහි දී සියළු $x \in (a,b)$ තුළ f'' පවතී.)

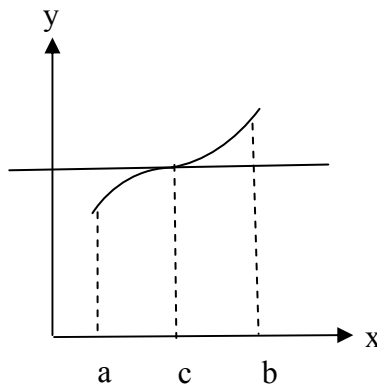
- i) සියලු $x \in (a,b)$ තුළ $f''(x) > 0$ නම්, එම ප්‍රාන්තරය තුළ f ශ්‍රිතය උඩු අවතල වේ.
- ii) සියලු $x \in (a,b)$ තුළ $f''(x) < 0$ නම්, එම ප්‍රාන්තරය තුළ f ශ්‍රිතය යටි අවතල වේ.

නතිවර්තන ලක්ෂය

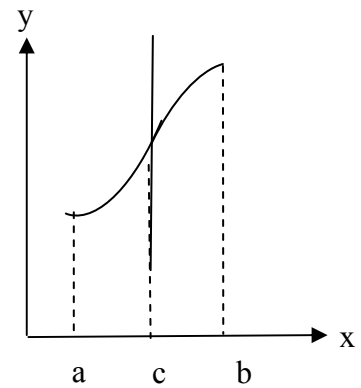
පහත දැක්වෙන පරිදි සියලු $x \in (a,b)$ තුළ $y=f(x)$ චක්‍රය සලකමු. මෙහි f යනු එම ප්‍රාන්තරය තුළ වූ අවතලය ශ්‍රිතයකි.



(i)



(ii)



(iii)

ඉහත අවස්ථාවන්හිදී, $x=c$ ලක්ෂ්‍යයේදී අවතලතාව වෙනස් වේ. එනම් මෙහිදී $x=c$ හිදී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එහි ලක්ෂ්‍යයේදී චක්‍රය හා ජේදනය වේ.

එවැනි ලක්ෂය නතිවර්තන ලක්ෂය යැයි කියනු ලැබේ.

(i) සහ (ii) අවස්ථාවන් වලදී $f''(x)=0$ වන අතර (iii) වන අවස්ථාවේදී $f''(x)$ නොපවතී.



අර්ථ දැක්වීම:

$y=f(x)$ වක්‍රයේ මත පිහිටි P නම් ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු.

P ලක්ෂ්‍යයට සාපේක්ෂව එක් පසකින් වක්‍රයේ උඩු අවතල ද අනෙක් පසින් වක්‍රයේ යටි අවතල වේ

සටහන

$f''(c)=0$ හා $x=c$ ලක්ෂ්‍ය හරහා $y=f(x)$ වක්‍රයේ ගමන්කරන විට $f''(c)$ හි ලක්ෂණ වෙනස් වේ නම්; $x=c$ යනු $y=f(x)$ වක්‍රයට වූ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයන් වේ.

නිදසුන-

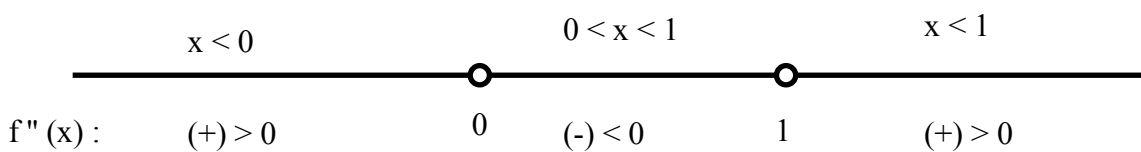
$$f(x) = x^4 - 2x^3 \text{ සලකමු.}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

$$= 12x(x-1)$$

$x=0$ හා $x=1$ දී $f''(x)=0$ වේ.



$f''(x)$ ලකුණ අවක්‍ර $y=f(x)$ වක්‍රය $(-\infty, 0)$ උඩු අවතල ද $(0, 1)$ තුළ යටි අවතල ද $(1, +\infty)$ තුළ උඩු අවතල ද වේ.

එබැවින් $x=0$ හා $x=1$ යනු $y=f(x)$ වක්‍රය මත පිහිටි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය වේ.



නිදසුන-

$$f(x) = x^4 \text{ සලකමු.}$$

$$\text{මෙහි } f'(x) = 4x^3 \text{ හා } f''(x) = 12x^2 \text{ වේ.}$$

$$\text{තවද } f''(x) = 0 \text{ වන අතර,}$$

$$(-\infty, 0) \text{ හා } (0, +\infty) \text{ තුළ } f''(x) > 0 \text{ වේ.}$$

එනම් මෙම වක්‍රය උඩු අවතල වේ.

එබැවින් $y=f(x)$ වක්‍රයට නතිවර්තනයක් නොපවතී.

සටහන

1. $f''(x)=0$ වන සෑම විටම $x=c$ $y=f(x)$ වක්‍රය මත පිහිටි නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ නොවේ.
2. නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය නොවේ.

