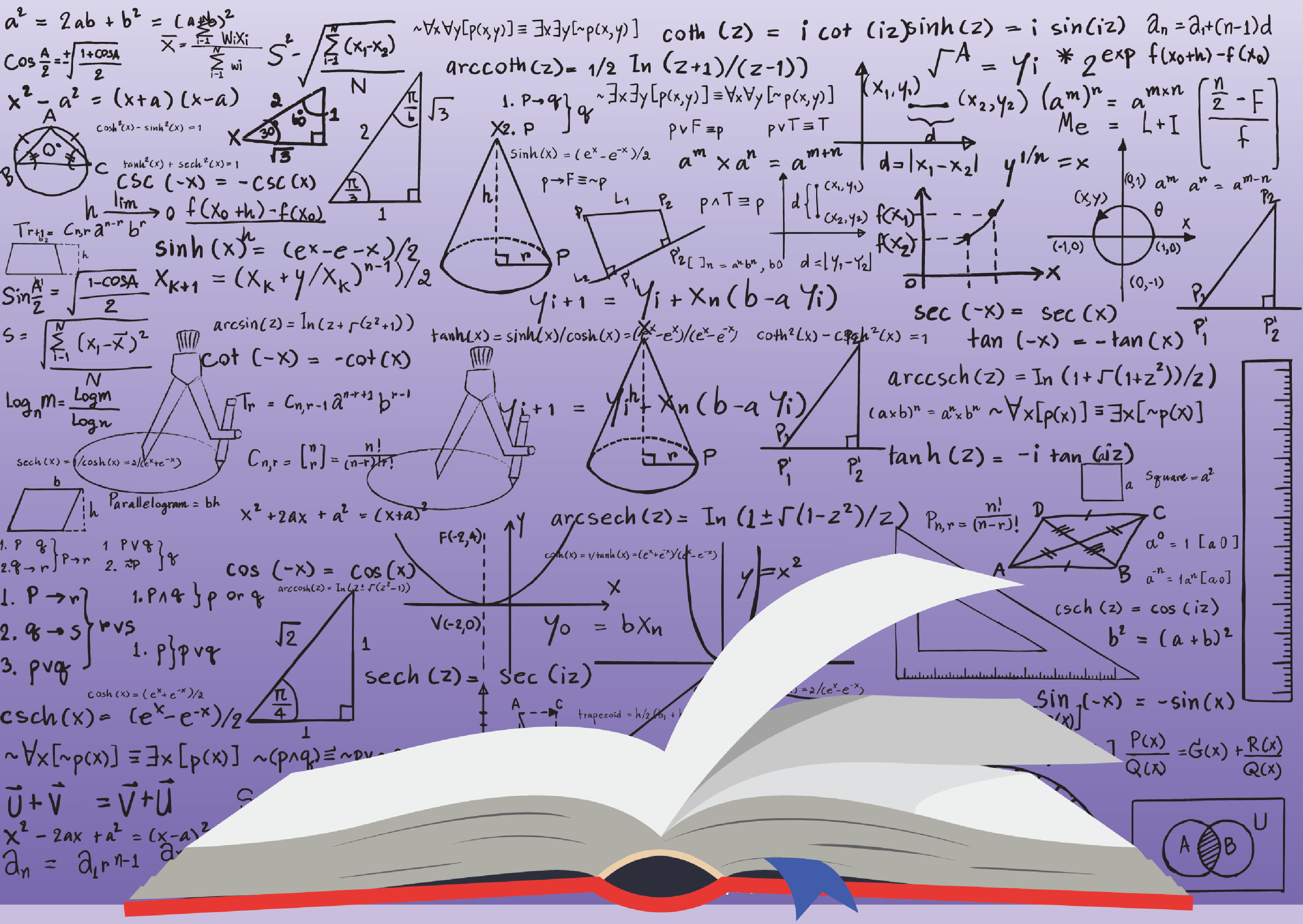
සංයුක්ත ගණිතය

15.1 ව්‍යුත්පන්නය ඇසුරෙන් හැරුම් ලක්ෂ්‍යය විමර්ශනය කරයි.



Start Your Learning Journey with e-thaksalawa

The National e-learning Portal for The General Education

නිපුණතාව 15

වායුත්පන්න භාවිතයෙන් ශ්‍රිතයක හැසිරීම විශ්ලේෂණය කරයි.

නිපුණතා මට්ටම 15.1

වායුත්පන්නය ඇසුරින් හැරවුම් ලක්ෂ්‍යය විමර්ශනය කරයි.

ඉගෙනුම් පල

- දෙන ලද ශ්‍රිතයක ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය අර්ථ දක්වයි.
- සාපේක්ෂ උපරිමය සහ සාපේක්ෂ අවමය යනු කුමක් දැයි විස්තර කරයි.
- ශ්‍රිතයක උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය සෙවීම සඳහා “ප්‍රථම වායුත්පන්න පරීක්ෂාව “ යොදයි.
- ස්ථානීය උපරිම ලක්ෂ්‍යයක් හෝ ස්ථානීය අවම ලක්ෂ්‍යයක් හෝ නොවන ස්ථාවර ලක්ෂ්‍ය ද පවතින බව ප්‍රකාශ කරයි.
- නතිවර්තන ලක්ෂ්‍ය හඳුනා ගනියි.
- දී ඇති ශ්‍රිතයක හැරවුම් ලක්ෂ්‍යයක් උපරිමයක් ද අවමයක් ද නතිවර්තනයක් දැයි පරීක්ෂා කිරීමට දෙවන අවකලන සංගුණකය භාවිතා කරයි.

අන්තර්ගතය : ජී.සී දයාරත්න , යූ.ජී.ජේ.එස් රත්නායක , එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි මෙනවිය , ජාතික තරුණ සේවා සභාව (2017/2018)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

01. ව්‍යුත්පන්නය ඇසුරින් හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය

1. ශ්‍රිතයක ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යය $x = c$ හිදී අර්ථ දක්වා ඇති අවකල්‍ය f ශ්‍රිතයක $f'(c) = 0$ වන සෙවූ $x = c$ ලක්ෂ්‍ය f ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යක් ලෙස අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

නිදසුන :

$f(x) = x^2 - 2x; x \in IR$ සලකමු.

මෙහි $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$x = 1$ වි $f'(1) = 0$ වේ.

$\therefore$ x = 1 යනු f ශ්‍රිතයේ ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යයක් වේ.
තව ද x = 1 විට f (1) = 1-2 = -1 වේ.

$\therefore$(1 , -1) ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය ශුන්‍ය වේ.
එනම් එහි ලක්ෂ්‍ය යේ දී වක්‍රයට අඳින ස්පර්ශකය x අක්ෂයට සමාන්තර වේ.

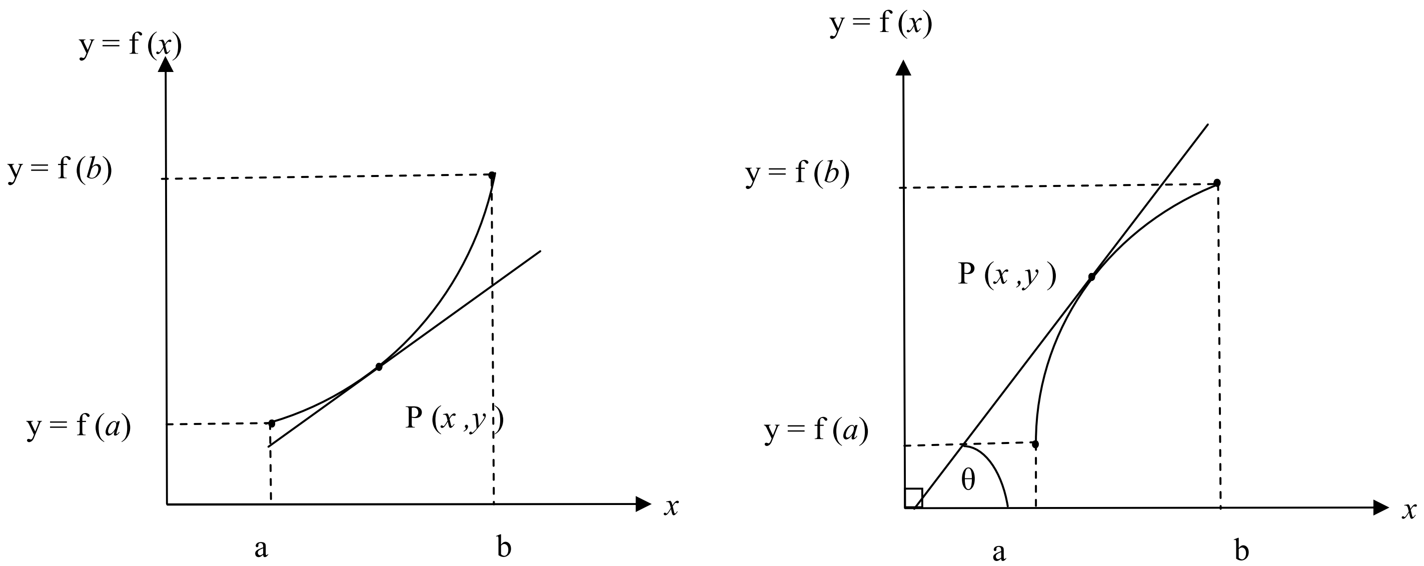
02. ප්‍රාන්තරයක් තුළ වැඩි වවන සහ අඩුවන ශ්‍රිත

C සියළු $x \in (a, b)$ තුළ අවකල්‍ය f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු.

සියළු තුළ $x \in (a, b)$ තුළ y = f (x) හි ප්‍රස්තාරය පහත රූපයේ පරිදි වේ යැයි ගනිමු.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

y = f (x) වක්‍රයේ (i) රූපය පරිදි වේ නම්,



(i)

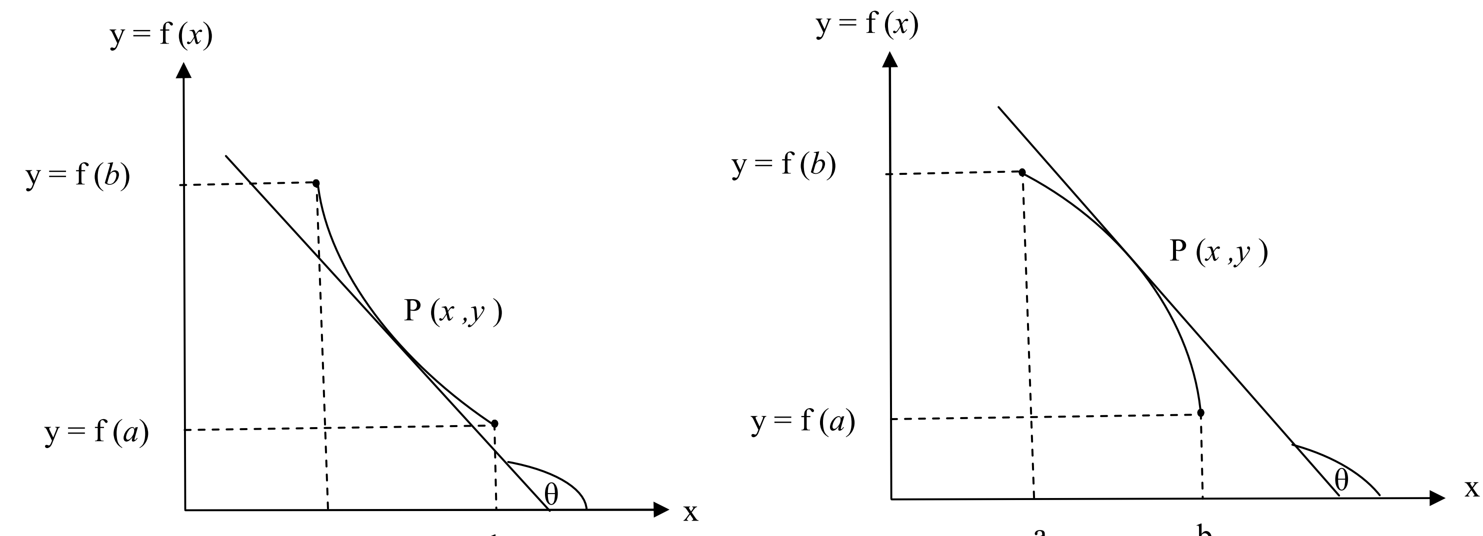
මෙහි දී සියළු $x \in (a,b)$ තුළ x හි අගය a සිට b දක්වා වැඩිවන විට f (x) යන්න f (a) සිට f (b) දක්වා සතතයෙන් වැඩි වන බව පෙනේ.

තව ද සියළු $x \in (a,b)$ තුළ වක්‍රය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග සාදන කෝණය θ නම් ; θ යන්න $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි පිහිටයි.

එනම් $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \tan\theta > 0$ වේ.

මෙවැනි ශ්‍රිත වැඩි වන ශ්‍රිත ලෙස හඳුන්වමු.

y = f (x) වක්‍රය (b) රූපයේ පරිදි වේ නම් ;



(ii)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

මෙහි දී x හි අගය a සිට b දක්වා වැඩි වන විට f ශ්‍රිතයේ අගය f (a) සිට f (b) දක්වා අඩුවේ.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ වක්‍රය මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග θ මහාකෝණය සාදයි. එනම් $\pi/2 < \theta < \pi$

එබැවින් $f'(x) = \tan\theta \langle 0$ වේ.

මෙවැනි ශ්‍රිත අඩුවන ශ්‍රිත ලෙස හඳුන්වමු.

<u>වැඩි වන ශ්‍රිතය</u>

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ $f'(x) \rangle 0$ නම් , f ශ්‍රිතය එම ප්‍රාන්තරය තුළ වැඩි වේ යැයි කියනු ලැබේ.

<u>අඩුවන ශ්‍රිතය</u>

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ $f'(x) \langle 0$ නම් f ශ්‍රිතය එම ප්‍රාන්තරය තුළ අඩු වේ යැයි කියනු ලැබේ.

නිදසුන :

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$ නම් , f ශ්‍රිතය අඩුවන සහ වැඩි වන x හි අගය පරාසය සොයන්න.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

විසඳුම් :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \; ; \quad x \in IR$$

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$
$$= (x+1)(x-2)$$

$x = -1$ හා +2 විට $f'(x) = 0$ වේ.

තවද $x \langle -1$ විට $f'(x) \rangle 0$ වේ. f වැඩිය.

$-1 \langle x \langle 2$ විට $f'(x) \langle 0$; f ශ්‍රිතය අඩු වේ.

$2 \langle x$ විට $f'(x) \rangle 0$; f ශ්‍රිතය වැඩිවේ.

03. දී ඇති ශ්‍රිතයක සාපේක්ෂ උපරිමය සහ සාපේක්ෂ අවමය.
(පළමු ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන්)

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ අවකලාා f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු. මෙහි $c \in (a, b)$ නම්,

(i) a<x<c විට $f'(x) \rangle 0$ ද

c<x<b විට $f'(x) \langle 0$ ද නම්,

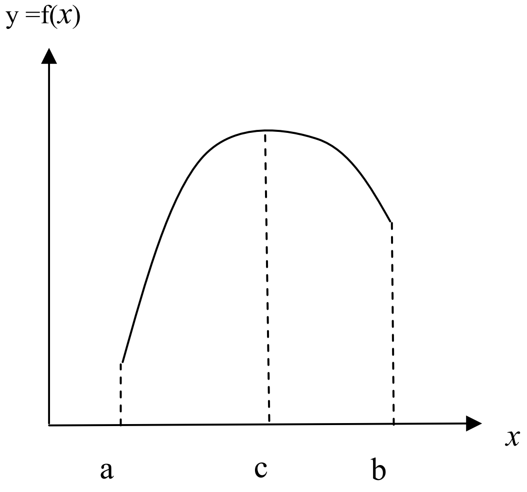
$x = c$ ලක්ෂායේ දී f ශ්‍රිතයට සාපේක්ෂ උපරිමයක් ද

(ii) a < x <c විට $f'(x) \langle 0$ ද වේ.

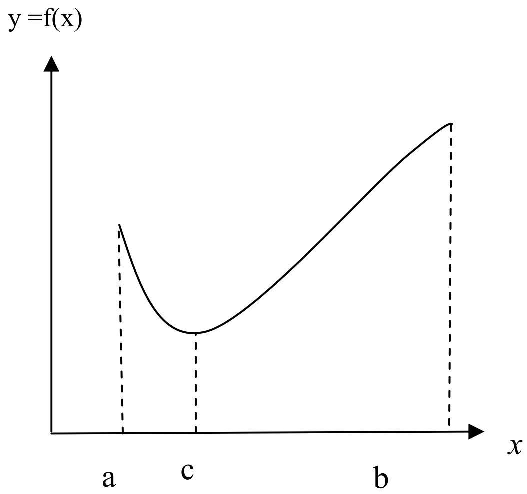
c< x < b විට $f'(x) \langle 0$ ද නම්,

$x = c$ ලක්ෂායේ දී ශ්‍රිතයට සාපේක්ෂ අවමයත් ද ඇතැයි කියනු ලැබේ. පහත රූප සටහනින් දැක්වේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



$a\langle x\langle c$ විට f ශ්‍රිතය වැඩි වේ.
$c\langle x\langle b$ විට f ශ්‍රිතය අඩු වේ.



$a\langle x\langle c$ විට f ශ්‍රිතය අඩු වේ.
$c\langle x\langle b$ විට f ශ්‍රිතය වැඩි වේ.

සියළු $x \in (a,b)$ තුළ $f'(x)$ පවතී නම් ; x = c හිදී උපරිමයන් හෝ අවමයන් තිබීමට අනිවාර්‍ය අවශ්‍යතාවය f '(x)=0 වීමයි.

ඉහත උපරිම හෝ අවම ලක්ෂ්‍යවලට ආසන්න ලක්ෂ්‍යවලදී අවකල සංගුණකයේ ලකුණ වෙනස් වන බැවින් එම ලක්ෂ්‍ය **හැරවුම් ලක්ෂ්‍ය** ලෙස ද හඳුන්වමු.

සටහන

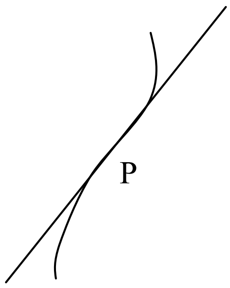
සාපේක්ෂ උපරිම , සාපේක්ෂ අවම සඳහා ස්ථානීය උපරිම, ස්ථානීය අවම ලෙස ද හඳුන්වමු.

අන්තර්ගතය : ජී.සී දයාරත්න , යූ.ජී.ජේ.එස් රත්නායක , එන් . එම්. මිස්බා
සැකසුම : ප්‍රසංගිකා මධුෂානි මෙනවිය , ජාතික තරුණ සේවා සභාව (2017/2018)
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

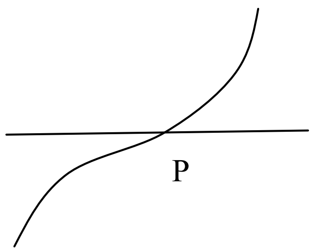
04. නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය

සාමාන්‍යයෙන් වක්‍රයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී වක්‍රයකට ස්පර්ශකයක් ඇඳි විට , ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය අඩංගු යම් කුඩා ප්‍රාන්තරයක් තුළ වක්‍රය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය ස්පර්ශකයට එකම පස පිහිටයි. (රූපයේ පරිදි)

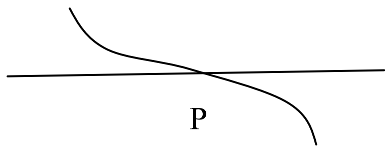
වක්‍රය මත පිහිටි සමහර ලක්ෂ්‍ය වලදී වක්‍රයට ස්පර්ශකයක් ඇඳි විට, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය අඩංගු යම් කුඩා ප්‍රාන්තරයක් (අසරක්) තුළ වක්‍රය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය රූපයේ පරිදි ස්පර්ශකයට දෙපස පිහිටයි.
මෙවැනි ලක්ෂ්‍ය නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යන් යැයි කියනු ලැබේ.



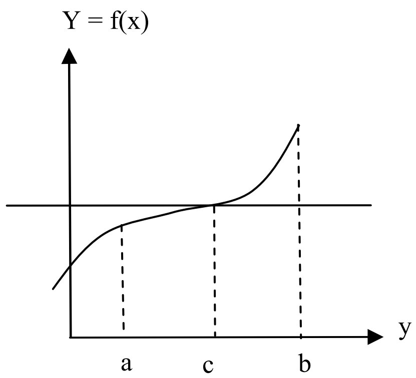
(i)



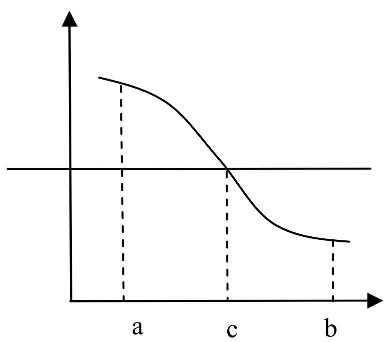
(ii)



මෙහිදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය , නැවත ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය හරහා වක්‍රය ඡේදනය කරයි.
මෙහිදී අපි සාකච්ඡා කරනුයේ $f'(x) = 0$ වන පරිදි වූ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යක් පමණි.



(i)



(ii)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

එවැනි ලක්ෂ්‍ය නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ලෙස හැඳින්වේ. තව ද මෙම ස්පර්ශකයට දෙපස යම් ප්‍රාන්තරයක් තුළ වක්‍රය පිහිටා ඇත.

(i) රූපය සලකමු.

a < x < c විට $f'(x) > 0$ ද

c < x < b විට $f'(x) > 0$ ද වේ නම්

f ශ්‍රිතයට $x = 0$ හිදී නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඇතැයි කියනු ලැබේ.

(ii) රූපය සලකන්න.

a < x < c විට $f'(x) < 0$ ද

c < x < b විට $f'(x) < 0$ ද වේ නම්

f ශ්‍රිතයට $x = c$ හිදී නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඇතැයි කියනු ලැබේ.

සටහන

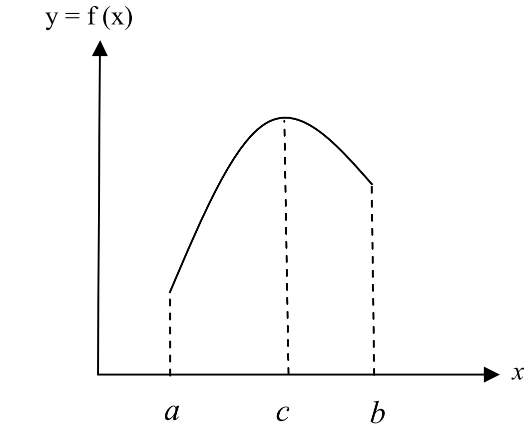
නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය හැරුම් ලක්ෂ්‍ය නොවේ. එනම් $x = c$ හරහා x හි අගය වෙනස් වීමේ දී $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ හි ලකුණ වෙනස් නොවේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

05. දෙවන ව්‍යුත්පන්නය භාවිතයෙන් ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල ස්වභාවය නිර්ණය කිරීම.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ අවකලා f නම් ශ්‍රිතයක් සලකමු. තව ද c යනු $a < c < b$ වන පරිදි වූ අගයක් ගනිමු.

(i) $x = c$ හි f ශ්‍රිතයට සාපේක්ෂ උපරිමයක් ඇති විට

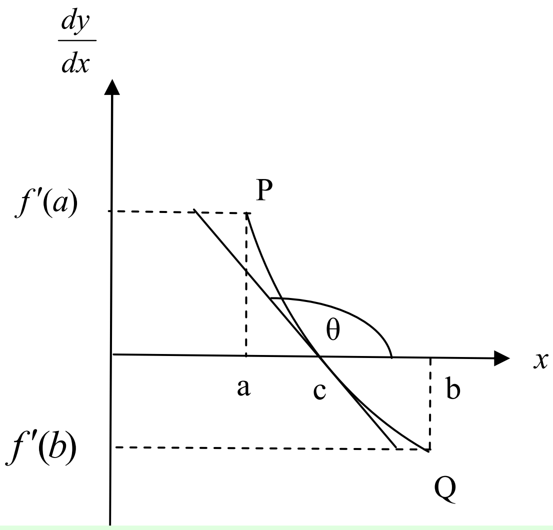


$a < x < c$ විට $f'(x) \rangle 0$ ද

$x = c$ විට $f'(x) = 0$ ද

$c < x < b$ විට ද $f'(x) \langle 0$ වේ.

දැන් x ට එදිරිව $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ප්‍රස්තාරය සලකමු.



සියළු $x \in (a, b)$ තුළ එහි වක්‍ර කොටස PQ මඟින් නිරූපණය වේ. එවිට (c ,0) ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග සාදන කෝණය මහ කෝණයක් වේ. $b < \theta < \pi$
එබැවින්

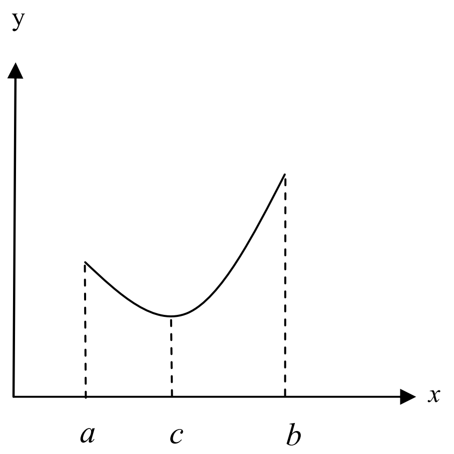
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan \theta \langle 0$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} \langle 0$$

එනම් $x = c$ හිදී $y = f(x)$ වක්‍රයට සාපේක්ෂ උපරිමයක් ඇති විට , $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=c} \langle 0$ වේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(ii) $x = c$ හිදී සාපේක්ෂ අවමයක් ඇති විට



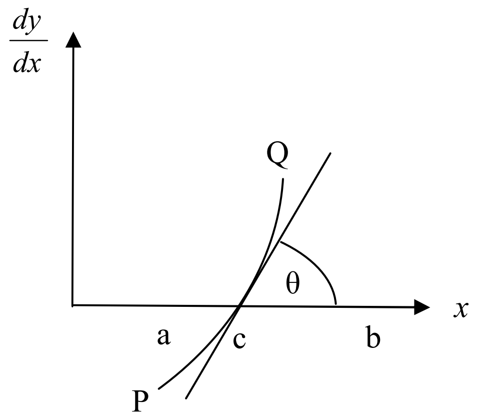
මෙහිදී

a < x < c විට $f'(x) < 0$ ද

$x = c$ විට $f'(x) = 0$ ද

c < x < b විට $f'(x) > 0$ ද වේ.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ x ට එදිරිව $\frac{dy}{dx}$ හි ප්‍රස්තාරය සලකමු.



සියළු $x \in (a, b)$ තුළ එහි වක්‍ර කොටස PQ වන අතර , (c ,0) දී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකය x අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග සාදන θ කෝණය සුළු කෝණයක් වේ. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
එබැවින්

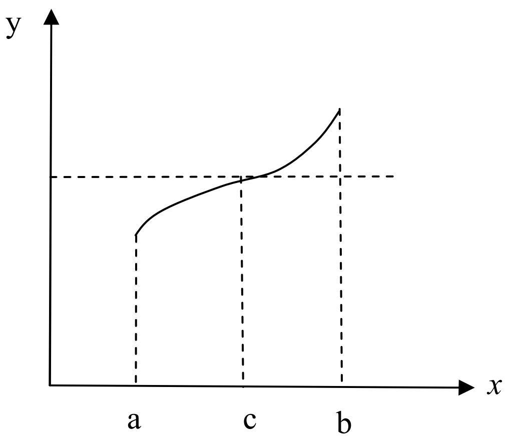
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan\theta > 0$$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=c} > 0$$

එනම් $x = c$ හිදී y = f (x) වක්‍රයට සාපේක්ෂ අවමයක් ඇත් නම්, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=c} > 0$ වේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(iii) $x = c$ හිදී f ශ්‍රිතයට නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයක් ඇති විට ඇති විට

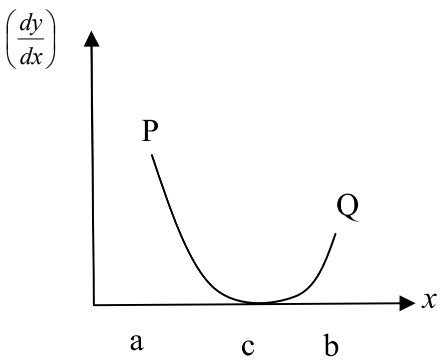


$a < x < c$ විට $f'(x) \rangle 0$ ද

$x = c$ විට $f'(x) = 0$ ද

$c < x < b$ විට $f'(x) \rangle 0$ ද වේ.

සියළු $x \in (a, b)$ තුළ x ට එදිරිව $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ප්‍රස්තාරය සලකමු. එය PQ මඟින් දැක්වේ.



මෙහි PQ කොටස (c , 0) හිදී x අක්ෂය හා ස්පර්ශ වේ.
එනම්

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=c} = 0$$ වේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk