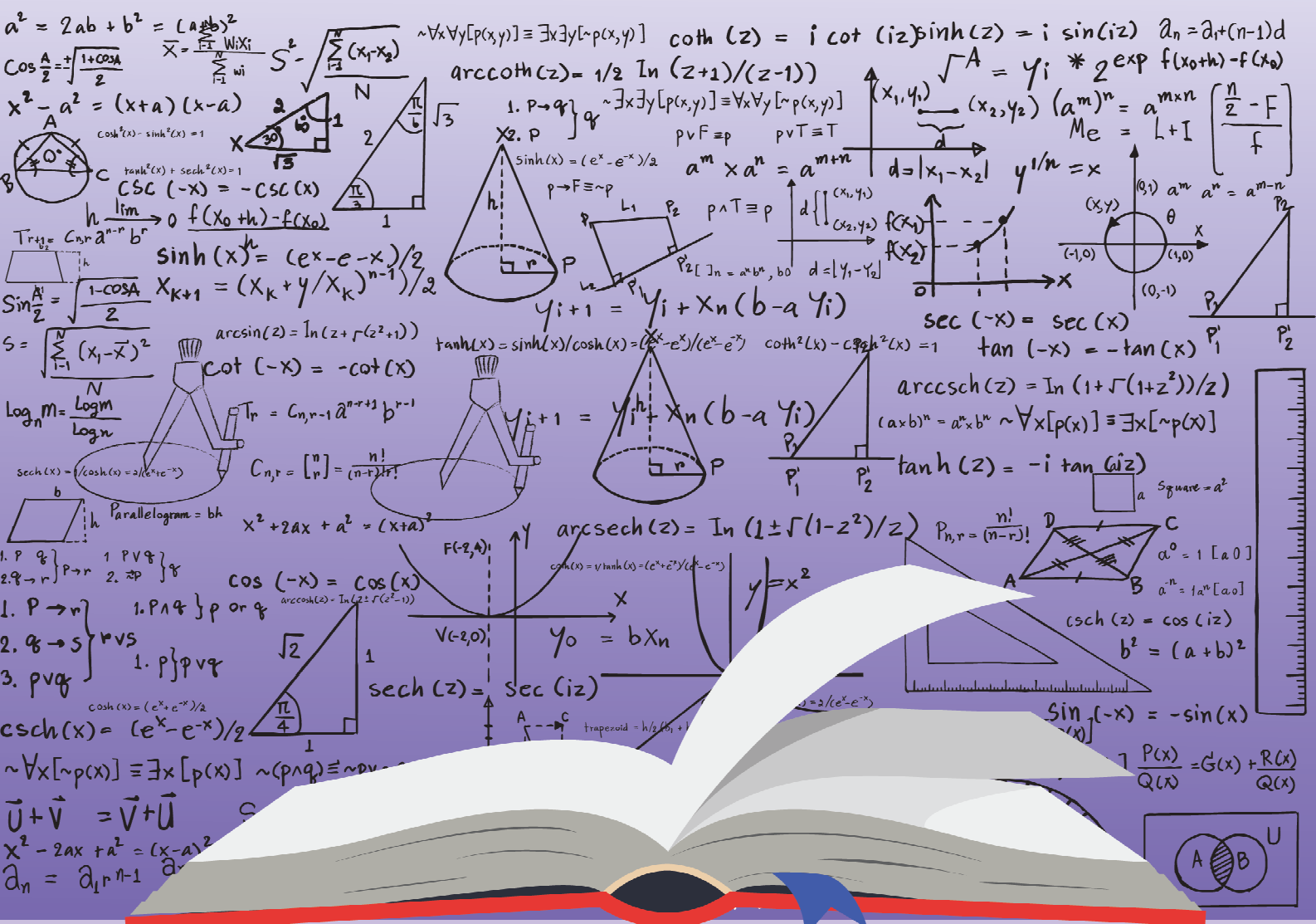




සංග්‍රහය

11

ත්‍රිකෝණමිතික ගැටලු විසඳීම සඳහා සයින් නීතිය හා කෝසයින් නීතිය යොදා ගනියි.





නිපුණතා මට්ටම

11.1 :- සයින් නීතිය හා කෝසයින් නීතිය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරයි.

ඉගෙනුම් ඵල

11.1 :- ත්‍රිකෝණයක පාද කෝණ අංකනය කරයි.

11.2 :- ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීති

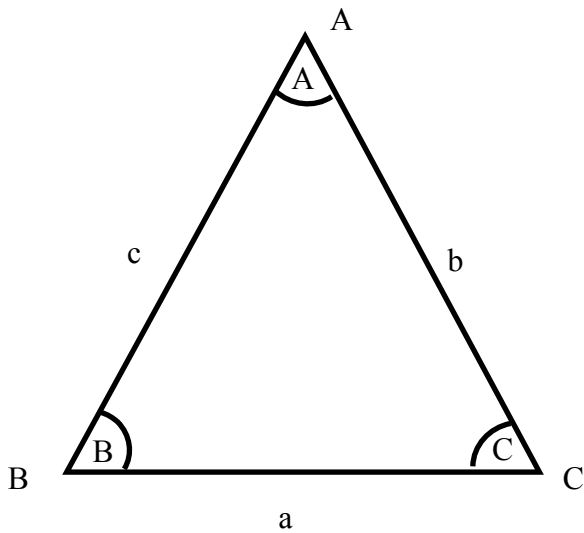
11.3 :- ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නීතිය



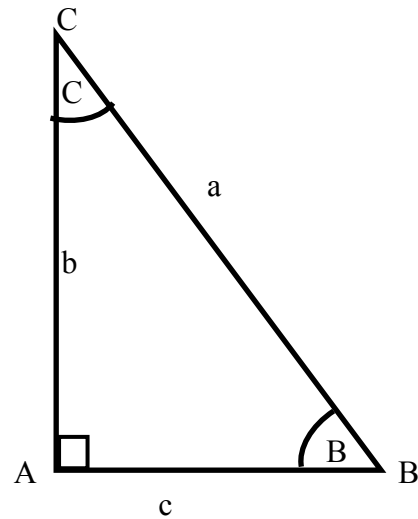
11.1:- ත්‍රිකෝණයක පාද හා කෝණ අංකනය කිරීම.

ඔබ්බේ ත්‍රිකෝණයක පාද සහ කෝණ එහි මූලික අංග වේ.

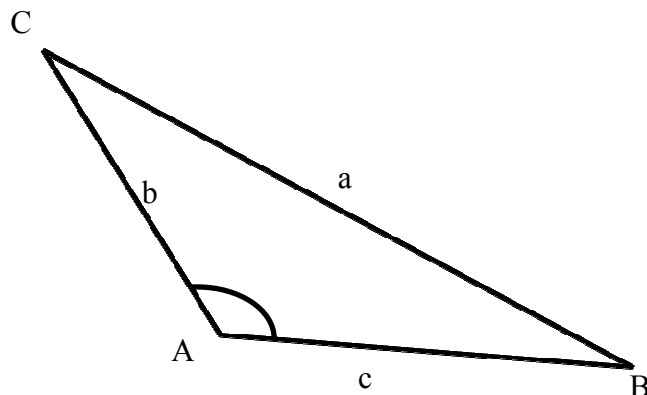
ඔබ්බේ ත්‍රිකෝණය ශීර්ෂ A,B,C අකුරුවලින් අංකනය කළ විට A ශීර්ෂ හා බැඳුණු අභ්‍යන්තර කෝණ A වලින් අංකනය කරන අතර A අභ්‍යන්තර කෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති BC පාදය 'a' ලෙසත් මෙලෙසම B සහ C කෝණවල සම්මුඛ පාද 'b' හා 'c' අකුරුවලින් අංකනය කරනු ලැබේ. තවද $A + B + C = \pi$ වේ.



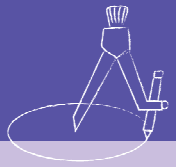
සුළුකෝණී ත්‍රිකෝණය



සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණය



මහාකෝණී ත්‍රිකෝණය



11.1.2 ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සයින් නීතිය

ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු සයින් නීතිය ප්‍රකාශ කළ හැකිවේ.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ලෙස

තවද මෙම නීතිය අවස්ථාවට අනුරූපව

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ලෙසද ප්‍රකාශ කළ හැකිය.

උදා :- 1 ABC ත්‍රිකෝණයක $a = 2$ ද $b = 3$ ද $\sin A = \frac{2}{3}$ නම් B කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

සයින් නීතියට අනුව

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{\sin B}{3}$$

එනම්

$$\sin B = \frac{2 \times 3}{3 \times 2}$$

$$\sin B = 1$$

එනම් $B = 90^\circ$ වේ.

උදා :- 2 කිසියම් ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ අතර අනුපාතය $1 : 3 : 8$ වේ නම් පාද අතර අනුපාතය සොයන්න.

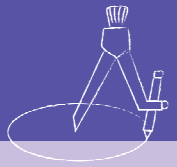
ත්‍රිකෝණයේ කෝණ x , $3x$ සහ $8x$ යයි ගනිමු.
එවිට

$$x + 3x + 8x = 180^\circ$$

$$12x = 180$$

$$x = 15^\circ$$

එනම් ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ වන්නේ 15° , 45° සහ 120° වේ.



සයින නීතියට අනුව

$$\frac{\sin(15^\circ)}{a} = \frac{\sin(45^\circ)}{b} = \frac{\sin(120^\circ)}{c}$$

එනම් $a : b : c = \sin(15^\circ) : \sin(45^\circ) : \sin(120^\circ)$

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$\sin = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} (15^\circ)$$

$$\sin (120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ)$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a : b : c = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} : 1 : \sqrt{3}$$

$$\text{එනම් } a:b:c = \sqrt{3} - 1 : 2 : \sqrt{6}$$

උදා :- 3 $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ ABC ත්‍රිකෝණයක A,B සහ C කෝණ පිළිවෙලින් සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම් සහ

b:c = නම් කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.

A,B සහ C කෝණ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන නිසා

$$B - A = C - B$$

$$2B - A = C$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

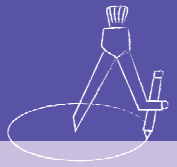
$$3B = A + B + C + \pi$$

B

$$\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \sin 60^\circ$$

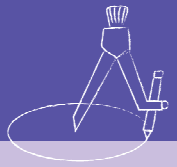
සයින නීතියට අනුව

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



අභ්‍යාසය :-

- (1). ABC ත්‍රිකෝණයක $\hat{A} = 45^\circ$ ද $\hat{B} = 60^\circ$ ද නම් ත්‍රිකෝණයේ පාද අතර අනුපාතය සොයන්න.
- (2). ත්‍රිකෝණයක කෝණ අතර අනුපාතය 1 : 2 : 3 වේ නම් පාද අතර අනුපාතය සොයන්න.
- (3). ABC ත්‍රිකෝණයක $\hat{A} = 30^\circ$ ද $b : c = 2 : \sqrt{3}$ නම් $\hat{B}$ කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.
- (4). ABC ත්‍රිකෝණයක B කෝණය 45° ද C කෝණය 105° ක් ද $a = 2\text{cm}$ නම් b හි අගය සොයන්න.
- (5). ABC ත්‍රිකෝණයක $a = 16$ ද $b = 12$ ද B කෝණය 30° නම් Sin A හි අගය සොයන්න.



11.1.3 ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නීතිය

ඕනෑම ත්‍රිකෝණයක් සඳහා කෝසයින් නීතිය සුපුරුදු අංකනයෙන්

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{ලෙස ප්‍රකාශ කරයි.}$$

සමහර අවස්ථාවලදී මෙම ප්‍රකාශන මෙලෙසද ඉදිරිපත් කරයි.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

උදා:-1 ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $a = 2$ ද $b = 3$ සහ $c = 4$ නම් $\cos A : \cos B$ අනුපාතය සොයන්න.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4}$$

$$= \frac{9 + 16 - 4}{24} = \frac{21}{24}$$

$$\cos A = \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$$

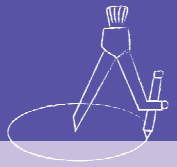
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{2^2 + 4^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 4}$$

$$= \frac{4 + 16 - 9}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\cos A : \cos B = \frac{14}{16} : \frac{11}{16}$$

$$= 14 : 11$$



උදා:-2 ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා $a = 2$ $b = \sqrt{6}$ ද $c = \sqrt{3} + 1$ සහ නම් $\cos A : \cos B$ අනුපාතය සොයන්න.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3} + 1)^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{6 + 3 + 1 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$A = 45^\circ$$



අභ්‍යාසය :-

(1). ABC ත්‍රිකෝණයක $A = 30^\circ$ ද $B = 2\text{cm}$ සහ $C = 3\text{cm}$ නම් a හි අගය සොයන්න.

(2). ABC ත්‍රිකෝණයක $a = 2$ ද $b = \sqrt{6}$ ද $c = \sqrt{3} - 1$ නම් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ සොයන්න.

(3). ත්‍රිකෝණයක පාද $x^2 + x + 1, 2x + 1$, සහ $x^2 - 1$ මගින් නිරූපණය වෙයි නම් ත්‍රිකෝණයේ විශාලතම කෝණය සොයන්න.