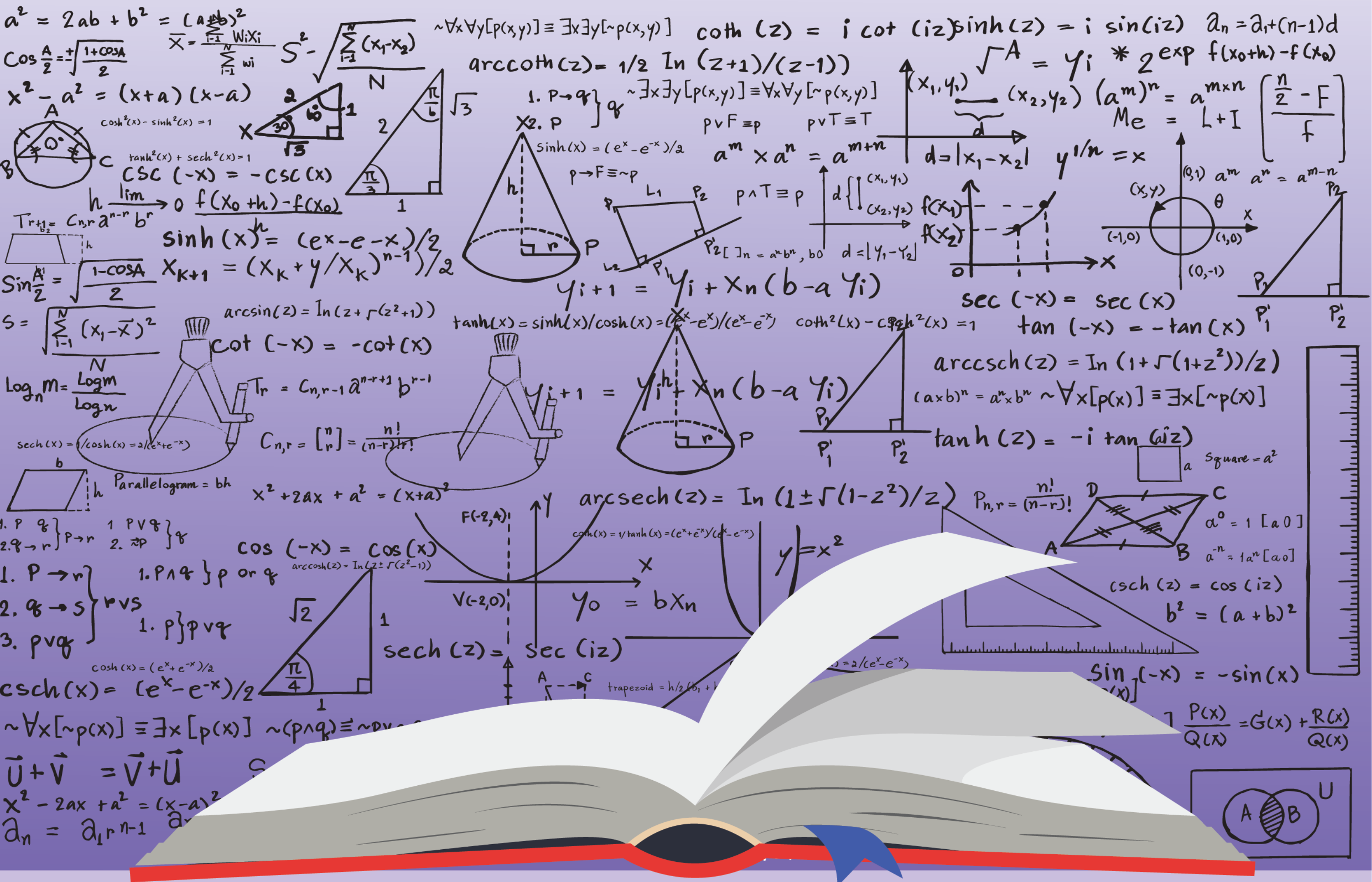
සංයුක්ත ගණිතය

9.5 ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත විචරණය කරයි.



The National e-learning Portal for The General Education
Start Your Learning Journey with e-thaksalawa

9.5.1.ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ හඳුනාගැනීම

කිසියම් සමීකරණයක ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත අඩංගු වේ නම්, එවැනි සමීකරණ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ ලෙස හැඳින්වේ.

Sin θ =√3/2 , Cos θ =1/2,Tan θ=1/√3, $Cos^2θ$ =-1/2 ආදී ප්‍රකාශන ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ ලෙස හැඳින්විය හැක.

මෙවැනි ප්‍රකාශය සඳහා සුදුසු අගයක් ලබා ගැනීම එම **සමීකරණ විසඳීම** නම් වේ.

Sin θ =√1/2 සමීකරණය ගත් විට **θ=π/4,3π/4....**යන අගයන් එම සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

මේ අනුව යම් කෝණයක සයින් අනුපාතය කිසියම් අගයක් දරන විට එම කෝණය සඳහා විසඳුම් අපරිමිත ප්‍රමාණයක් ඇති බව පැහැදිලි වේ. මෙම කෝණ සියල්ල ප්‍රකාශ කිරීම සූත්‍රයක් මගින් කළ හැකිය.

ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල මූලික ප්‍රතිඵල

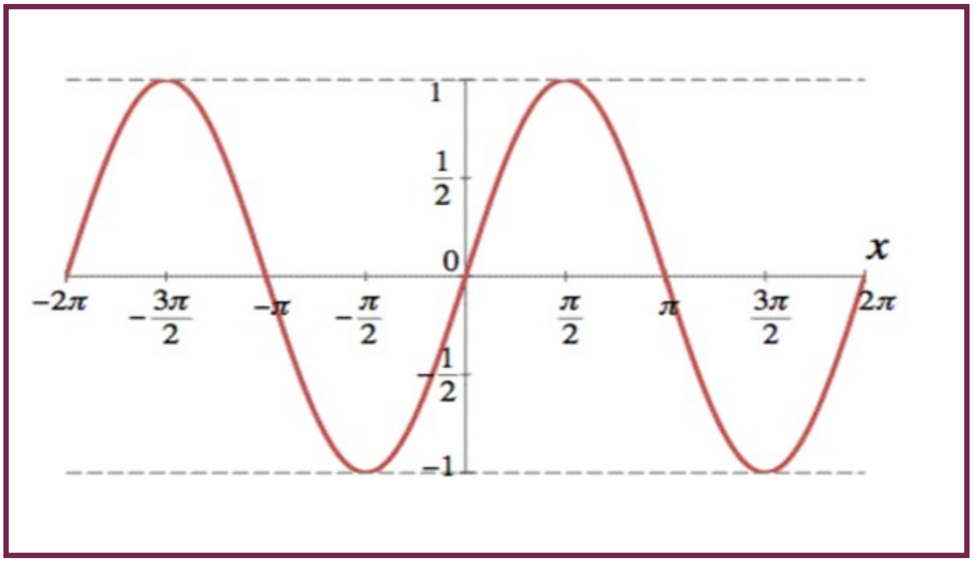
a

Sin θ =0 ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් θ =nπ ආකාරය වේ.

n යනු නිඛිලයකි.

y=Sin θ ශ්‍රිතය සලකමු.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

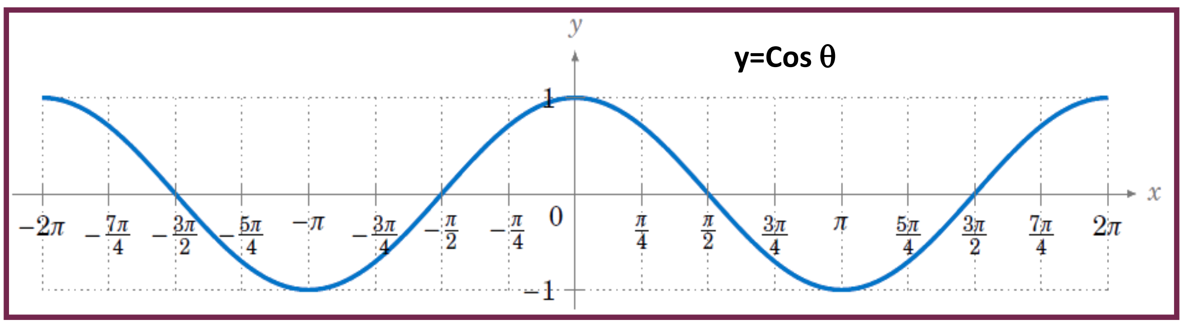


මෙම ශ්‍රිතයට අනුව θ =0, 2π,−2π,3π,....යන අගයන්වලදී ශ්‍රිතයේ අගය ශුන්‍යවන බව පැහැදිලිය.මේ අනුව **Sin θ =0** ආකාරයේ සමීකරණයක විසඳුම් **θ = nπ** ආකාරය වේ.

b

Cos θ =0 ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් **θ =(2n+1)π /2** ආකාරය ගනී.මෙහි **n** යනු ඕනෑම නිඛිලයකි.

මෙය පැහැදිලි කරගැනීම සඳහා **y=Cos θ** ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය සලකමු.



මෙම ශ්‍රිතයට අනුව θ =π/2,3π/2,5π/2,....යන අගයන්වලදී ශ්‍රිතයේ අගය ශුන්‍යවන බව පැහැදිලි වේ.

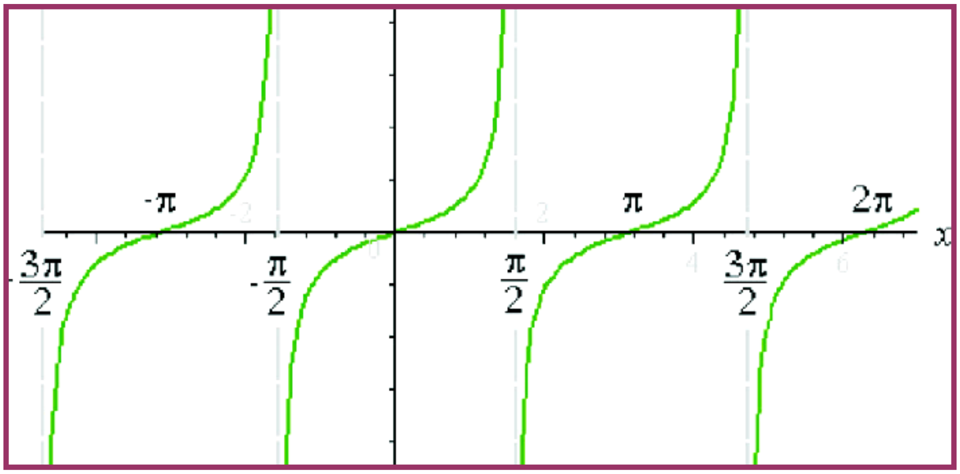
මේ අනුව **Cos θ =0** ආකාරයේ සමීකරණයක විසඳුම් **θ =(2n+1)π /2** ආකාරයක් ගනී.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

c

tan θ =0 ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් θ =nπ ආකාරය ගන්නා අතර මෙහි **n** මගින් ද නිඛිලයක් නිරූපණය කරයි.

මෙය පැහැදිලි කරගැනීම සඳහා **y=** tan θ ශ්‍රිතය පරීක්ෂා කර ඇත.

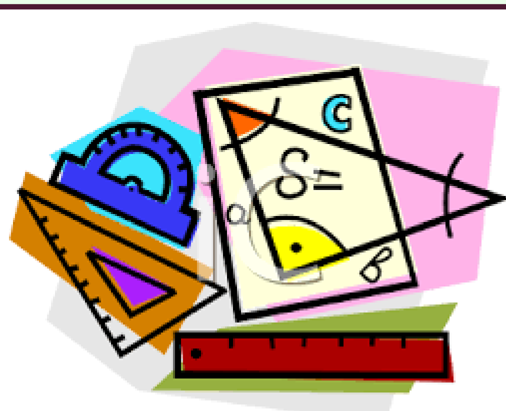


මෙම ප්‍රස්තාරයට අනුව θ කෝණය π හි නිඛිල ගුණාකාර වන විට,

ශ්‍රිතයේ අගය ශූන්‍යවේ.එනම් θ =0,π,2π,3π අගයන් සඳහා tan θ =0 වේ.

මේ අනුව විසඳුම් θ =nπ ආකාරය වේ.

මෙහි **n** යනු ඕනෑම නිඛිලයකි.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

9.5.2.ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම්

දෙන ලද සයිනයක් ඇති කෝණ සියල්ල සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනැගීම

Sin θ =Sin α ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$ ආකාරය වේ.

මෙහි n යනු නිඛිලයකි.

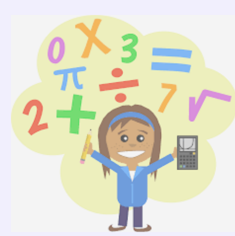
$$\sin\theta = \sin\alpha$$

$$\sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$2\cos\left[\frac{\theta+\alpha}{2}\right] . \sin\left[\frac{\theta-\alpha}{2}\right] = 0$$

එනම් $\cos\left[\frac{\theta+\alpha}{2}\right] = 0$ හෝ $\sin\left[\frac{\theta-\alpha}{2}\right] = 0$ වේ.

$$\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in 2 \quad \text{හෝ} \quad \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,\ n \in 2$$



$$\theta+\alpha = (2n+1)\pi,\ n \in 2 \quad \text{හෝ} \quad \theta-\alpha = 2n\pi, n \in 2$$

$$\theta = \left[(2n+1)\pi - \alpha\right] \quad \text{හෝ} \quad \theta = 2n\pi + \alpha$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

$\theta = \pi$ හි ඔත්තේ ගුණාකාර $-\alpha$ හෝ $\theta = \pi$ හි ඉරට්ටේ ගුණාකාර $+\alpha$,මෙම විසඳුම් දෙකම $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$ සමීකරණය මගින් ඉදිරිපත් කළ හැකි වේ.

මෙහි n යනු ඕනෑම නිඛිලයකි.

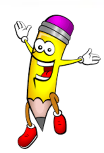
$\text{Sin}\,\theta = \text{Sin}\,\alpha$ ආකාරයේ සමීකරණයක් විසඳීමේදී ප්‍රථමයෙන්

$\frac{-\pi}{2} \leq \alpha \Sigma \frac{\pi}{2}$ කෝණය සොයා ගත යුතු වේ.එම අගය ප්‍රධාන විසඳුම ලෙස හඳුන්වයි.

දෙන ලද කෝසයිනයක් ඇති කෝණ සියල්ල සඳහා සූත්‍රයක් සෙවීම

$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,\alpha$ ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් $\theta = 2n\pi \pm \alpha$ ආකාරය වේ.

මෙහි n යනු නිඛිලයකි.



$$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,\theta - \text{Cos}\,\alpha = 0$$

$$-2\,\text{Sin}\left[\frac{\theta + \alpha}{2}\right]\text{Sin}\left[\frac{\theta - \alpha}{2}\right] = 0$$

එනම් $\text{Sin}\left[\frac{\theta + \alpha}{2}\right] = 0$ හෝ $\text{Sin}\left[\frac{\theta - \alpha}{2}\right] = 0$

$\frac{\theta + \alpha}{2} = n\pi, n \in \pi$ හෝ $\frac{\theta - \alpha}{2} = n\pi, n \in \pi$

$\theta + \alpha = 2n\pi, n \in \pi$ හෝ $\theta - \alpha = 2n\pi, n \in \pi$

$\theta = 2n\pi - \alpha, n \in \pi$ හෝ $\theta = 2n\pi + \alpha$

මේ අනුව $\theta = 2n\pi - \pm \alpha$ වේ.මෙහි n යනු නිඛිලයකි.

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. වලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

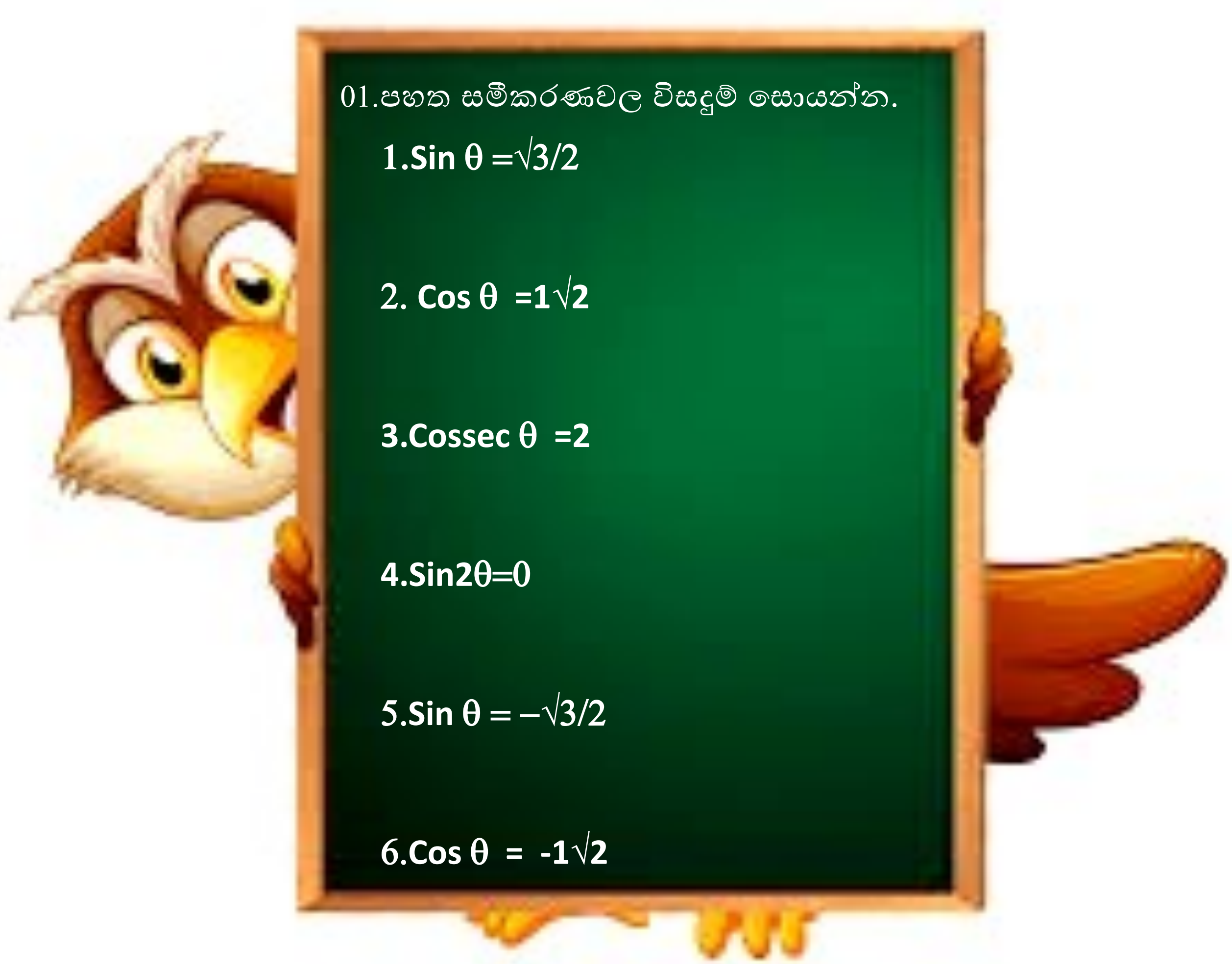
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Cos θ =Cos α ආකාරයේ සමීකරණයක් විසඳීමේදී ප්‍රථමයෙන් එම සමීකරණය සපුරාලන $0 \Sigma \alpha \Sigma \pi$

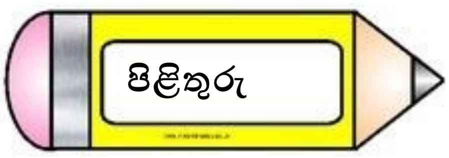
අතර කෝණය ලබාගත යුතුය.

එම අගය ප්‍රධාන විසඳුම ලෙස හඳුන්වයි.

නිදසුන්



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



1.

Sin $\theta = \sqrt{3}/2$

Sin $\theta =$ Sin $(\pi/3)$

$\theta = n\pi + (-1)^n (\pi/3), n \in \pi$

2.

Cos $\theta = 1\sqrt{2}$

Cos $\theta =$ Cos $(\pi/4)$

$\theta = 2n\pi \pm (\pi/4), n \in \pi$

3.

Cossec $\theta = 2$

Sin $\theta = 1/2$

Sin $\theta =$ Sin $(\pi/6)$

$\theta = n\pi + (-1)^n (\pi/6), n \in \pi$

4.

Sin$2\theta = 0$

$2\theta = n\pi$, $n \in \pi$

$\theta = n\ (\pi/2)$, $n \in \pi$

5.

Sin $\theta = -\sqrt{3}/2$

Sin $\theta = -$Sin $(\pi/3)$

Sin $\theta =$ Sin $(-\pi/3)$

$\theta = n\pi + (-1)^n (-\pi/3) n \in \pi$

6.

Cos $\theta = -1\sqrt{2}$

Cos $\theta =$ Cos $(\pi - \pi/4)$

Cos $\theta =$ Cos $(3\pi/4)$

$\theta = 2n\pi \pm (3\pi/4)$, $n \in \pi$

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. වලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

පහත සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

1. $\sin(\theta/2) = 1/2$

2. $\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\cos 5\theta = \sin 2\theta$

4. $\sin 3\theta + \cos 2\theta = 0$

5. $\sin(m\theta) + \sin(n\theta) = 0$

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. චලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

පිළිතුරු

1. $\text{Sin}\,(\theta/2) = 1/2$

   $\text{Sin}\,(\theta/2) = \text{Sin}\,(\pi/6)$

   $\theta/2 \quad = n\pi + (-1)^n(\pi/6), n \in \pi$

   $\theta \quad = 2n\pi + (-1)^n(\pi/3), n \in \pi$

2. $\text{Cos}\left[\dfrac{3\theta}{2}\right] = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\text{Cos}\left[\dfrac{3\theta}{2}\right] = \text{Cos}\,(\pi - \pi/6)$

   $\text{Cos}\left[\dfrac{3\theta}{2}\right] = \text{Cos}\,(5\pi/6)$

   $\dfrac{3\theta}{2} = 2n\pi \pm 5\pi/6, n \in \pi$

   $3\theta = 4n\pi \pm 5\pi/3$

   $\theta = 4n\pi/3 \pm 5\pi/3$

3. $\text{Cos}5\theta = \text{Sin}\,2\theta$

   $\text{Cos}\,5\theta = \text{Cos}(\pi/2 - \theta)$

   $5\theta = 2n\pi \pm (\pi/2 - 2\theta), n \in \pi$

   $\theta = 2n\pi \pm (\pi/10 - 2\theta/5), n \in \pi$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

4. $\sin 3\theta + \cos 2\theta = 0$

$\cos 2\theta = -\sin 3\theta$

$\cos 2\theta = \cos(\pi/2 + 3\theta)$

$2\theta = 2n\pi \pm (\pi/2 + 3\theta), n \in \pi$

$\theta = n\pi \pm (\pi/4 + 3\theta/2), n \in \pi$

5. $\sin(m\theta) + \sin(n\theta) = 0$

$\sin(m\theta) = -\sin(n\theta)$

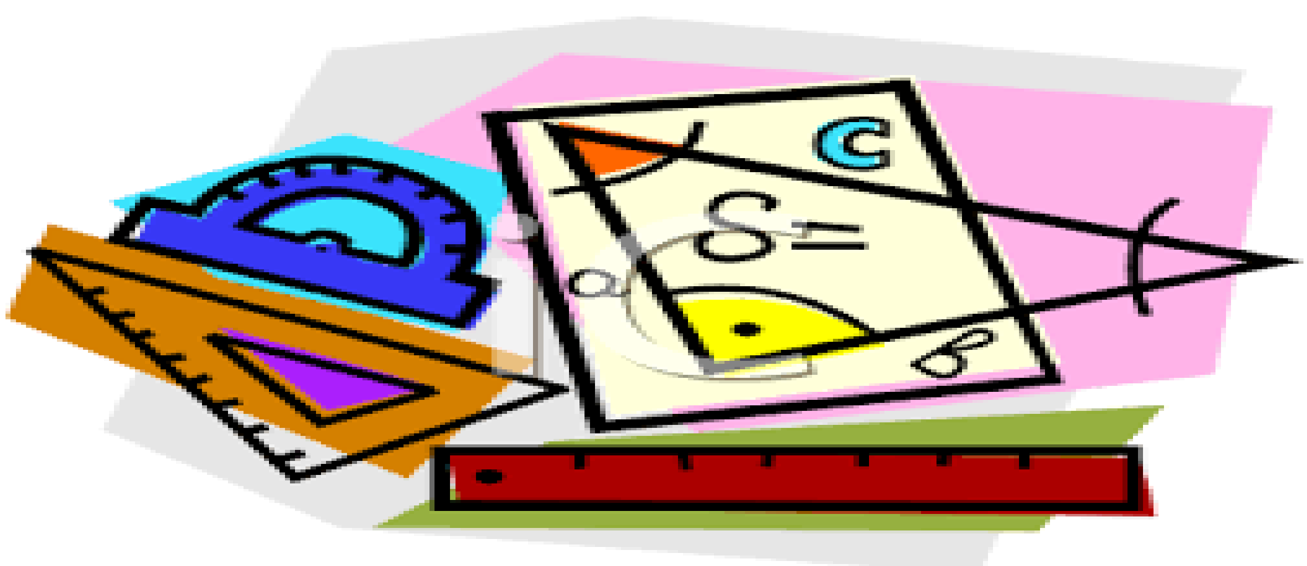
$\sin(m\theta) = \sin(-n\theta)$

$m\theta = n\pi + (-1)^n(-n\theta), n \in \pi$

$m\theta + (-1)^n(-n\theta) = n\pi$

$\theta[m + (-1)^n \pi] = n\pi$

$\theta = \dfrac{n\pi}{[m + (-1)^n \pi]}, n \in \pi$



අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. චලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

අභ්‍යාස

පහත සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

1. $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$

2. $\cos\theta = -1/2$

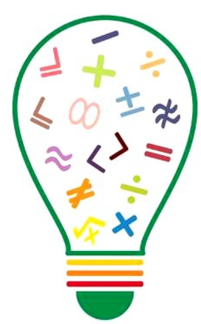
3. $\sin\theta = \cos(5\theta)$

4. $\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) = 0$

5. $\cos(m\theta) = \sin(n\theta)$

6. $\sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$

7. $\cos 4\theta = \cos 2\theta$



අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. වලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

දෙන ලද ටැංජනයක් ඇති කෝණ සියල්ල සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනැගීම

$\tan\theta = \tan\alpha$ ආකාරයේ සමීකරණයක සාධාරණ විසඳුම් $\theta = n\pi + \alpha$ ආකාරය වේ.

මෙහි $n \in \pi$ වේ.

$$\tan\theta = \tan\alpha$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin\theta.\cos\alpha = \cos\theta.\sin\alpha$$

$$\sin\theta.\cos\alpha - \cos\theta.\sin\alpha = 0$$

$$\sin(\theta - \alpha) = 0$$

$$\theta - \alpha = n\pi, n \in \pi$$

$$\theta = n\pi + \alpha, n \in \pi$$

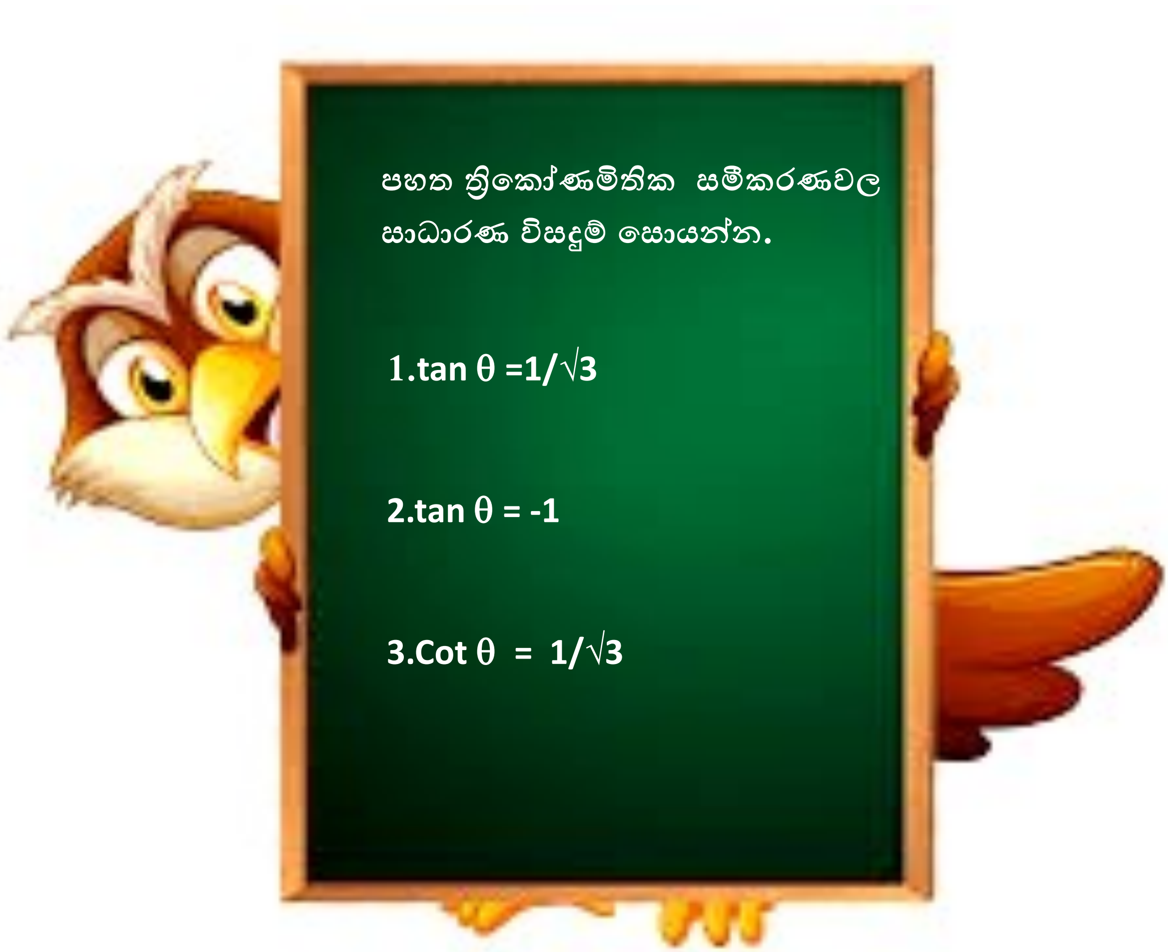
මෙහි $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ අගය ප්‍රධාන විසඳුම වේ.

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. වලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

නිදසුන්



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

පිළිතුරු

1. $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$

$\tan\theta = \tan(\pi/6)$

$\theta = n\pi + \pi/6 \;, n \in \pi$

2. $\tan\theta = -1$

$\tan\theta = -\tan(\pi/4)$

$\tan\theta = \tan(-\pi/4)$

$\theta = n\pi + (-\pi/4) \; \theta \in \pi$

$\theta = n\pi - \pi/4$

3. $\cot\theta = 1/\sqrt{3}$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

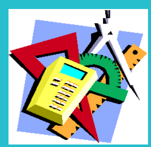
$\tan\theta = \tan(\pi/3)$

$\theta = n\pi + (\pi/3)$

අන්තර්ගතය : එච්.ඩී. වලංග ශෂිමාල් ප්‍රනාන්දු මයා,විවේකානන්ද ජාතික පාසල,කොළඹ 13

පරික්ෂා කළේ:

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



$\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos\theta = \cos^2\alpha$ සහ $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම් සෙවීම

1. $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$

$2\sin^2\theta = 2\sin^2\alpha$

$1-\cos 2\theta = 1-\cos\alpha$

$\cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha$, $n \in \pi$

$\theta = n\pi \pm \alpha$, මෙහි $n \in \pi$ ද වේ.

2. $\cos\theta = \cos^2\alpha$

$2\cos\theta = 2\cos^2\alpha$

$1+\cos 2\theta = 1+\cos 2\alpha$

$\cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha$, $n \in \pi$

$\theta = n\pi \pm \alpha$, මෙහි $n \in \pi$ ද වේ.

3. $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$

$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\alpha - 1$

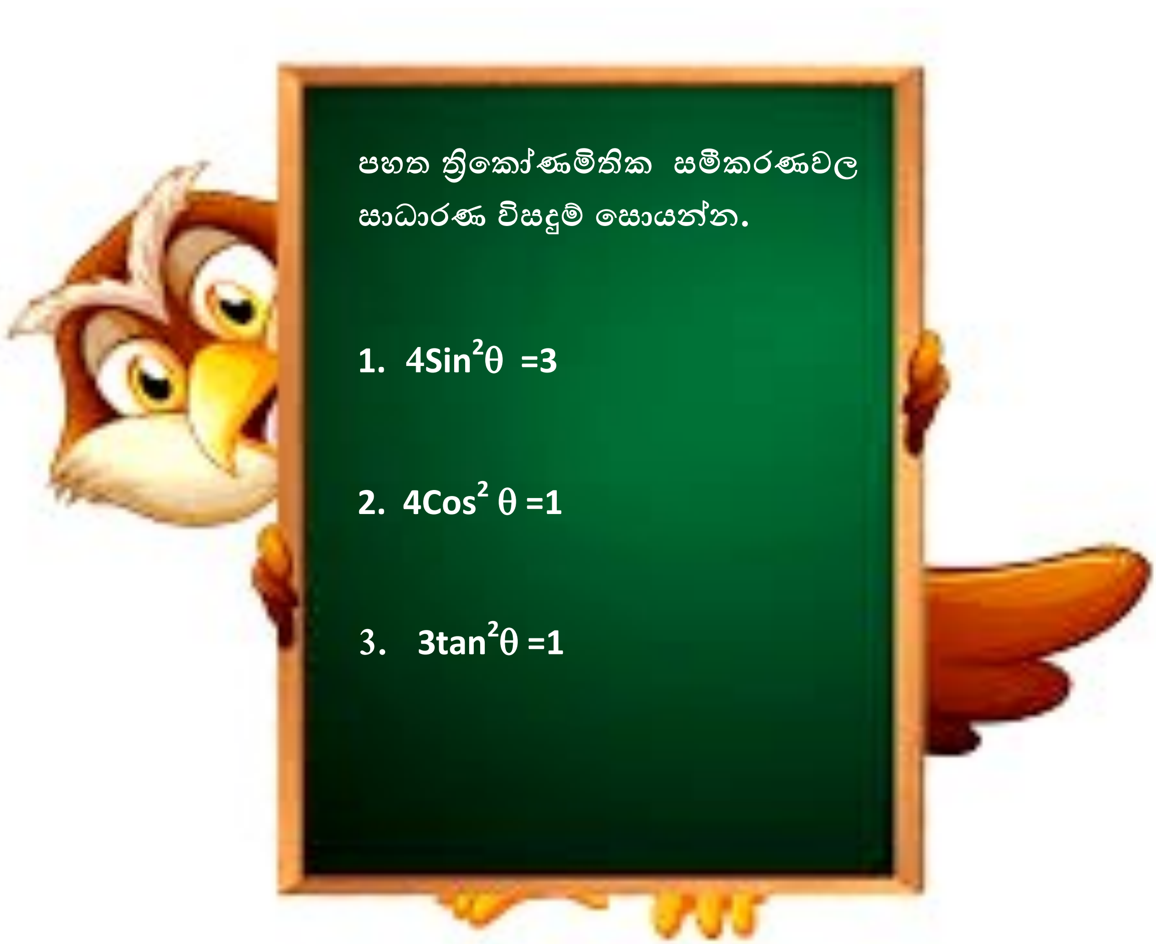
$\sec^2\theta = \sec^2\alpha$

$\cos^2\theta = \cos^2\alpha$

$\theta = n\pi \pm \alpha$, මෙහි $n \in \pi$ ද වේ.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

නිදසුන්



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

පිළිතුරු

1. $4\sin^2\theta = 3$

$\sin^2\theta = 3/4$

$\sin^2\theta = (\sqrt{3}/2)^2$

$\sin^2\theta = \sin^2(\pi/3)$

$\theta = n\pi \pm \pi/3, \; n \in \pi$

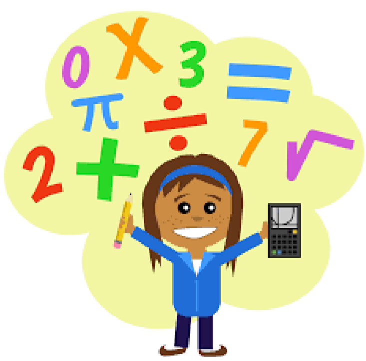
2. $4\cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1/4$

$\cos^2\theta = (1/2)^2$

$\cos^2\theta = \cos^2(\pi/4)$

$\theta = n\pi \pm \pi/4, \; n \in \pi$



3. $3\tan^2\theta = 1$

$\tan^2\theta = 1/3 = (1/\sqrt{3})^2$

$\tan^2\theta = \tan^2(\pi/6)$

$\theta = n\pi \pm \pi/6, \; n \in \pi$

A cos θ +b sin θ =c ආකාරයේ ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණවල සාධාරණ විසඳුම්

$$acos\theta + bsin\theta = C$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,sin\theta = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ නම් $sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ වේ.

$$cos\alpha.cos\theta + sin\alpha.sin\theta = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos(\theta-\alpha) = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$cos\beta = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$C \le \sqrt{a^2+b^2}$ නම්

$cos\beta = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ලෙස ගත් විට

$$cos(\theta-\alpha) = cos\beta$$

$$\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta \quad ,n\epsilon\pi$$

$$\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha \quad ,n\epsilon\pi$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

1.

$$\sqrt{3}cos\theta + sin\theta = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta + \frac{1}{2}sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right)cos\theta + sin\left(\frac{\pi}{6}\right)sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\theta\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad , n\epsilon\pi$$

$$\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

2.

$$\sqrt{2}sec\theta + tan\theta = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{cos\theta} = \cos\theta$$

$$\sqrt{2} + sin\theta = cos\theta$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}sin\theta = 1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\theta - sin\left(\frac{\pi}{4}\right)sin\theta = 1$$

$$cos\theta\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = cos(0)$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm 0$$

$$\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{4} \quad , n \in \pi$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

3.

$$3cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\,.cos\theta - 3sin^2\theta = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{3}cos2\theta - \sin2\theta = 2$$

$$3(cos^2\theta - sin^2\theta) - 2\sqrt{3}\sin\theta\,.cos\theta = \sqrt{6}$$

$$3cos2\theta - \sqrt{3}\sin2\theta = \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos2\theta - \frac{1}{2}sin2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right).cos(2\theta) - sin\left(\frac{\pi}{6}\right).sin(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\theta + \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

අභ්‍යාස

පහත ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ විසඳන්න.

(I) $tan\theta + sec\theta = \sqrt{3}$

(II) $cosec\theta = 1 + cot\theta$

(III) $\sqrt{3}sin\theta - cos\theta = 2$

(IV) $sin\theta - cos\theta = -\sqrt{2}$

(V) $cos2\theta = \cos\theta + sin\theta$

(VI) $9cos^2 + 24sin\theta.cos\theta + 16sin^2\theta - \frac{25}{4} = 0$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk