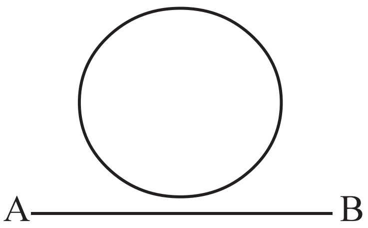
23 නිර්මාණ

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට,
- වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම
- දෙන ලද රේඛාවක් සමාන කොටස්වලට වෙන් කිරීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

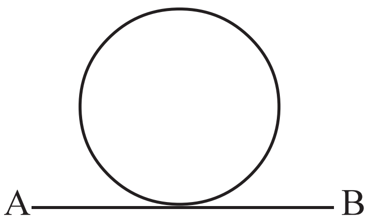
දී ඇති සරල රේඛාවක් හා වෘත්තයක් සම්බන්ධ ව පිහිටිය හැකි ආකාර තුනක් මෙසේ ය.

(I)



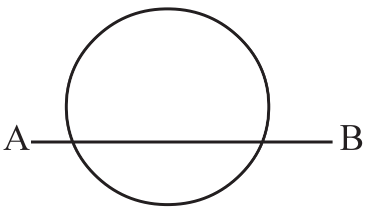
වෘත්තයට බාහිර ව AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

(II)



Bවෘත්තය ස්පර්ශ වන සේ AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

(III)



වෘත්තය ඡේදනය වනසේ AB සරල රේඛාව පිහිටිය හැකි ය.

ඉහත (ii) හි දැක්වෙන ආකාරයට වෘත්තය හා රේඛාව පිහිටි විට

"AB සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන්නේ ය."

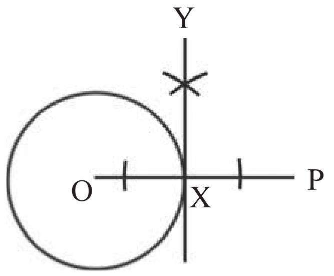
කවකටුව ආධාරයෙන් O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් අඳින්න. අඩි කෝදුව තබා වෘත්තය ස්පර්ශකරන සේ AB සරල රේඛාව අඳින්න. ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කර OP යා කරන්න. $O\hat{P}A$ හා $O\hat{P}B$ කෝණ දෙකෙහි විශාලත්ව මනින්න.

ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය හරහා ඇඳි අරයත් අතර කෝණය 90^0 බව ඔබ දන්නෙහි ය.

23.1 නිර්මාණය

වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක දී එම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් මත X ලක්ෂ්‍යය ඇත. X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ වන පරිදි XY ස්පර්ශකය නිර්මාණය කරමු.



(1) OX රේඛාව ඇඳ එය P දක්වා දික්කරන්න.

(2) කවකටුව ආධාරයෙන් OXP රේඛාවට X හි දී ලම්බකයක් නිර්මාණය කරන්න. එය XY යැයි නම් කරන්න.

OX අරය සහ XY රේඛාව එකිනෙකට ලම්බ වේ. XY යනු වෘත්තයට X හිදි ඇඳි ස්පර්ශකයක් වේ.

XY යනු වෘත්තයේ පරිධිය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකයක් වේ.

- වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් බව ද
- වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයත් එකිනෙකට ලම්බ වන බව ද මීට පෙර උගත්තෙමු.

23.1 අභ්‍යාසය

(1) අරය 3.5 cm වූ වෘත්තයක් අඳින්න. වෘත්තය මත P ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. 4.5 cm දිග PQ ස්පර්ශකය නිර්මාණය කරන්න.

(2) X කේන්ද්‍රය වූ ද අරය 4.5 cm වූ ද වෘත්තය මත ඕනෑ ම Y ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. Yහි දී වෘත්තයට ස්පර්ශකය නිර්මාණය කර XZ=7.5 cm වන සේ Z ලක්ෂ්‍යයක් ස්පර්ශකය මත ලකුණු කරන්න.

(i) YZ දිග මනින්න.

(ii) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් YZ දිග ගණනය කර ඔබ ලබාගත් පිළිතුරෙහි සත්‍යතාව විමසන්න.

(iii) ZY = ZW වනසේ වූ W ලක්ෂ්‍යයක් වෘත්තය මත ලකුණු කර WX යා කරන්න.

(iv) XYZ Δ හා XWZ Δ අංගසම බව සාධනය කරන්න.

(v) WX යනු W හිදී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය බව පෙන්වන්න.

(3) AB සරල රේඛාව මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත. Q ලක්ෂ්‍යය AB ට බාහිරින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) P හි දී AB සරල රේඛාව, ස්පර්ශ කරන Q හරහා ගමන් කරන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) මෙම නිර්මාණය සඳහා ඔබ භාවිතයට ගත් ප්‍රමේය දෙක සඳහන් කරන්න.

23.1 ක්‍රියාකාරකම

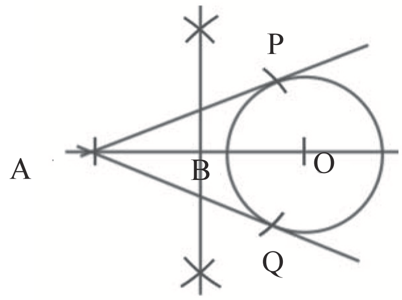
O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක් ඇඳ වෘත්තයෙන් බාහිර ව X ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. සරල දාරයක් භාවිතයෙන් XA හා XB ස්පර්ශක දෙක අඳින්න. OA හා OB අරයයන් ද යා කරන්න

(a) මෙම කරුණු සත්‍යදැයි මැන බැලීමෙන් පරීක්ෂා කරන්න.
අගය මැනීමෙන් පහත සඳහන් කරුණුවල සත්‍යතාව විමසන්න.

(i) XA = XB (ii) $X\hat{A}O = X\hat{B}O$ (iii) $X\hat{O}A = X\hat{O}B$

(b) XAOΔ හා XBOΔ අංගසම ද?

23.2 බාහිර ලක්ෂයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීම



O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට පිටතින් A ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ.
A ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරිම.

පියවර

(1) OA රේඛාව ඇඳ කවකටුව ආධාරයෙන් එහි ලම්බ සමච්ඡේදකය අඳින්න.
(2) ලම්බ සමච්ඡේදකය හා OA රේඛාව ඡේදන ලක්ෂ්‍යය B ලබා ගන්න.
(3) BO අරය ලෙස ද B කේන්ද්‍රය ලෙස ද ගනිමින් වෘත්තය ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වන සේ චාපයක් අඳින්න. එම ලක්ෂ්‍ය දෙක P හා Q ලෙස නම් කරන්න.
(4) AP හා AQ රේඛා අඳින්න.
(5) AP හා AQ රේඛා A සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වේ.

සාධනය :- - BA = BO (AO හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය B නිසා)
BO = BP
BA = BO = BP වේ.
∴ AOP Δ යේ ශීර්ෂ හරහා ඇති වෘත්තයේ (පරිවෘත්තය) කේන්ද්‍රය B වේ. AO එම වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි.

$A\hat{P}O = 90^0$ (අර්ධ වෘත්තයක කෝණය)

∴ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට AP ස්පර්ශකයක් වේ.

මෙලෙසම $A\hat{Q}O = 90^0$ බව ද පෙන්වා දිය හැකි ය.

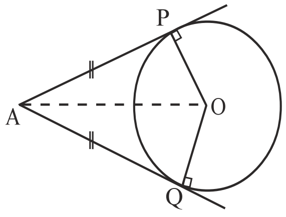
ඒ අනුව AQ රේඛාවද වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට, A බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට AP හා AQ ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම්

(i) AP = AQ

(ii) $O\hat{A}P = O\hat{A}Q$

(iii) $A\hat{O}P = A\hat{O}Q$



ප්‍රමේය :- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට
(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
(ii) කේන්ද්‍රය හා බාහිර ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාවෙන් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ .
(i) ස්පර්ශක මගින් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ දෙක සමාන වේ.

23.2 අභ්‍යාසය

(1) අරය 2.5 cm වූ O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයක් අඳින්න. වෘත්තය මත ඕනෑ ම P ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන දික් කරන ලද OP මත OX = 6.5 cm වන සේ X ලක්ෂ්‍යය ලබා ගන්න.

(i) X හි සිට වෘත්තයට XA හා XB ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන්න.

(ii) XA හා XB දිග මනින්න.

(iii) XAදිග ගණනය කිරීමෙන් (ii) හි ඔබ ලබාගත් ප්‍රතිඵලය හා සසඳන්න.

(2) O කේන්ද්‍රය වූ ද අරය 4.0 cm වූ ද වෘත්තය අඳින්න. වෘත්තය මත X ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. OP = 8 cm වනසේ දික් කරන ලද OX මත P ලකුණු කරන්න.

(i) OP හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.

(ii) P සිට වෘත්තයට PQ ස්පර්ශකය නිර්මාණය කර PQ දිග මැන අගය ලියන්න.

(iii) $P\hat{Q}X$ කෝණයේ අගය 30^0 වන බව අගය මැනීමෙන් තොර ව සාධනය කරන්න.

(iv) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් $PQ = 4\sqrt{3}$ cm බව පෙන්වන්න.

(3) (i) AB = 6 cm BC = 7 cm හා CA = 5 cm වූ ABC Δ නිර්මාණය කරන්න

(ii) $B\hat{A}C$ හා $A\hat{B}C$ කෝණ සමච්ඡේදක දෙකට පොදු ලක්ෂ්‍යය P යැයි නම් කරන්න.

(iii P හි සිට BC ට ලම්බකය නිර්මාණය කරන්න. එය PX යැයි නම් කරන්න.

(iv) PX අරය ද P කේන්ද්‍රය ද වූ වෘත්තය අඳින්න.

(4) XYZΔ යේ $X\hat{Y}Z$ මහා කෝණයක් වේ. YZ පාදය Yහි දී ස්පර්ශ කරමින් XZ පාදය ස්පර්ශ කරන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(5) (i) $A\hat{B}C = 90^0$, $AB = 4.0$ cm හා $BC = 6.5$ cm වූ ABC Δ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) AB පාදය A හි දී ස්පර්ශ කරන්නාවූ ද BC පාදය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

(6) (i) $PQ = 8$cm $P\hat{Q}R = 90^0$ $QR = 4$cm වන සේ PQR Δ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) S හි දී PQ, හමු වන සේ $P\hat{R}Q$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.

(iii) S හි සිට PR ට ලම්බ වන සේ වූ ST නිර්මාණය කරන්න.

(iv) S කේන්ද්‍රය SQ අරය ද වු වෘත්තය අඳින්න.

(v) SQR Δ හා STR Δ අංගසම බව සාධනය කරන්න.

(vi) P හි සිට වෘත්තයට ඇඳි එක් ස්පර්ශකයක් PT බව පෙන්වන්න.

(vii) P හි සිට ඇති අනෙක් ස්පර්ශකය වූ PU නිර්මාණය කරන්න.

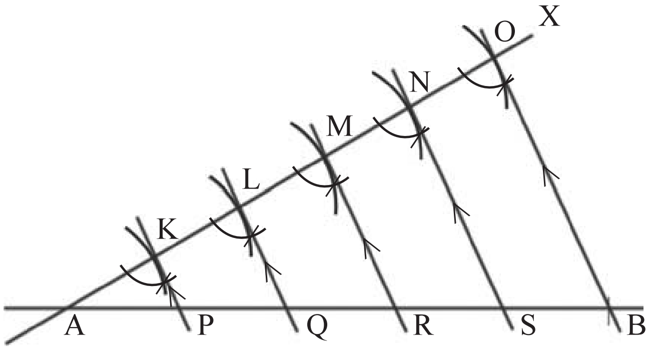
(viii) පයිතගරස් ප්‍රමේය යෙදීමෙන් PR දිග $\sqrt{5}$ ඇසුරෙන් ලියන්න.

(ix) PR හි දිග මැනීමෙන් $\sqrt{5}$ හි අගය පළමුවැනි දශමස්ථානයට සොයන්න.

(x) $\dfrac{\text{PSU } \Delta \text{ වර්ගඵලය}}{\text{QRS } \Delta \text{ වර්ගඵලය}} = \sqrt{5} - 1$ බව පෙන්වන්න.

23.3 නිර්මාණය

දෙන ලද සරල රේඛා ඛණ්ඩයක් සමාන කොටස්වලට බෙදීම.



දී ඇති AB සරල රේඛාව සමාන කොටස් 5 කට බෙදිය යුතු වේ.

පියවර

(1) A හරහා ඇති AX ඕනෑ ම සරල රේඛාවක් අඳින්න.

(2) AK = KL = LM = MN = NO වන සේ කවකටුව ආධාරයෙන් AX මත K,L, M, N, හා O ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.

(3) OB රේඛාව ඇඳ OB ට සමාන්තර වන සේ NS, MR, LQ, KP රේඛා නිර්මාණය කරන්න. (එය AOB කෝණය K,L,M හා N හි දී පිටපත් කිරීමෙන් කළ හැකි ය.)

නොමිලේ බෙදා හැරීම පිණිසයි

සාධනය :- - ALQΔ යේ

$AK = KL$ (නිර්මාණය)

$KP // LQ$ (නිර්මාණය)

$\therefore AQ$ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ප්‍රමේයයේ විලෝමය)

$\therefore AP = PQ$

AMRΔ යේ

$LQ // MR$ වේ. (නිර්මාණය)

$AL : LM = 2:1$ (නිර්මාණය)

$\therefore AQ : QR = 2:1$ වේ. (ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි සරල රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද සමානුපාතික ව බෙදේ)

$AK = KL = LM$ නිසා

$AP = PQ = QR$ වේ.

මේ අයුරින් ම RS හා SB සමාන බව ද සාධනය කළ හැකි ය.

එවිට $AP = PQ = QR = RS = SB$ වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාව ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර එය දිගින් ඉතිරි පාදයේ දිගින් හරි අඩක්වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය විලෝමය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.

23.3 අභ්‍යාසය

(1) 11 cm දිග XY සරල රේඛාවක් ඇඳ එය සමාන කොටස් 4 කට බෙදන්න.

(2) 13cm දිග AB සරල රේඛාව සමාන කොටස් 5 කට බෙදන්න.

(3) (i) $PQ = 9$ cm $P\hat{Q}R = 45^0$ හා $QR = 8$ cm වූ PQR Δ නිර්මාණය කරන්න.

(ii) $PA = AB = 3$ cm වනසේ A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක PQ මත ලකුණු කරන්න.

(iii) QR පාදය සමාන කොටස් තුනකට බෙද වෙන් කෙරෙන සේ PR ට සමාන්තර ව AX හා BY රේඛා නිර්මාණය කරන්න.

(iv) XY දිග මැන අගය ලියන්න.

(v) QAXΔ හා QBYΔ යන ත්‍රිකෝණ PQRΔ ත්‍රිකෝණය හා සමකෝණික බව පෙන්වන්න.