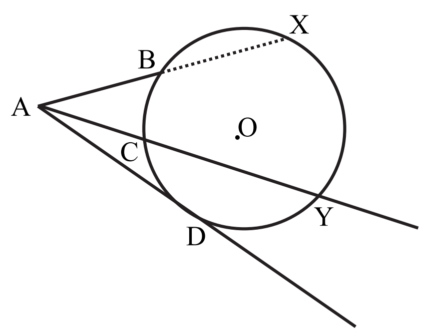
22 ස්පර්ශක

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- වෘත්තයක ස්පර්ශක ආශ්‍රිත කෝණවල ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශකවල ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීම සහ එහි භාවිතය
- වෘත්තයක ස්පර්ශකය මගින් ස්පර්ශ කළ ලක්ෂ්‍යයේ (Touching point) පිහිටි ජ්‍යායක් සමග සෑදෙන කෝණය හා ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ සෑදෙන කෝණය අතර සම්බන්ධය හඳුනා ගැනීම සහ එහි භාවිතය

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

22.1 ස්පර්ශක හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය



AB සරල රේඛාවට වෘත්තය B හි දී හමුවන අතර AB දික් කළ විට X හි දී යළිත් වෘත්තය ඡේදනය කරයි. ACY රේඛාව C හා Y හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි. AB,ACY වැනි රේඛා ඡේදක යනුවෙන් හැඳින්වේ.
AD රේඛාව වෘත්තය D හි දී හමු වෙයි වෘත්තයට හා AD රේඛාවට පොදු ව ඇත්තේ එක ම ලක්ෂ්‍යයකි. එනම් D ලක්ෂ්‍යයයි.
AD වැනි රේඛාවක් වෘත්තයේ ස්පර්ශකයක් යැයි කියනු ලැබේ.

සරල රේඛාවක් මගින් වෘත්තයක් ඡේදනය වීමේ දී ඡේදක ලක්ෂ්‍ය දෙක එක මත එක සම්පාත වන අවස්ථාවේ එම සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. එම පොදු ලක්ෂ්‍යය ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය නම් වේ. ඉහත රූපයට අනුව AD සරල රේඛාව , O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය D ලක්ෂයේ දී ස්පර්ශ කරයි.

වෘත්තයක් සහ එහි ස්පර්ශක සම්බන්ධ වන පහත සඳහන් ප්‍රතිඵල වැදගත් වේ.

(A) **වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශකයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳී අරය කේන්ද්‍රයේ සිට ස්පර්ශකයට ඇඳි කෙටි ම දුර වේ.**

(B) **වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බක ව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.**

(C) **ඉහත (B) හි විලෝමය මෙසේ ය. වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය එම ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වේ.**

නොමිලේ බෙදා හැරීම පිණිසයි

(D) ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය හැර ස්පර්ශකයේ අනෙකුත් ලක්ෂ්‍යයන් සියල්ල වෘත්තයෙන් බාහිර ව පිහිටයි

22.1 ක්‍රියාකාරකම

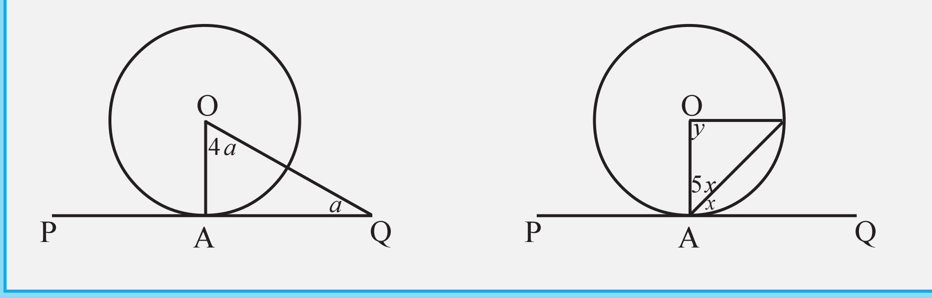
- කේන්ද්‍රය O වන හා අරය 3 cm වන වෘත්තයක් අඳින්න.
- වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර A ලෙස නම් කරන්න.
- OA යා කරන්න.
- OA අරයට A හි දී ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එය PA ලෙස නම් කරන්න, PA රේඛාව Q තෙක් දික් කරන්න.
- PAQ රේඛාව මත X නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
- OX යා කරන්න.
- OX හි දිග මනින්න. OX>OA ද?
- PAQ රේඛාව මත A හැර වෙනත් ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක සිට කේන්ද්‍රයට ඇති දුර OA අරයේ දිග සමග සංසන්දනය කරන්න.

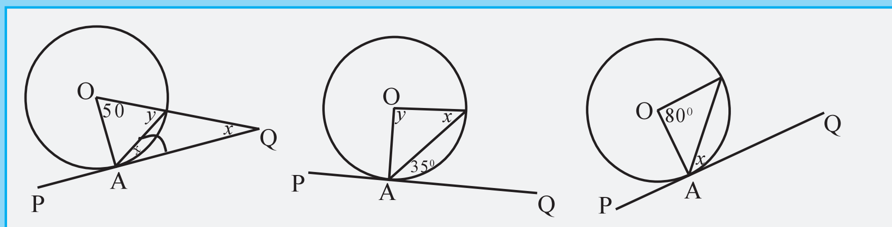
22.2 ක්‍රියාකාරකම

- බ්‍රිස්ටල් බෝඩ් කැබැල්ලක 5 cm අරය සහිත වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.
- වෘත්තයට බාහිර ව A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය මත අල්පෙනෙත්තක් සවිකරන්න. නූල් කැබැල්ලක් එයට ගැට ගසා නූල් කැබැල්ලේ අනිත් කෙළවරේ තවත් කටුවක් යා කරන්න.
- නූල් කැබැල්ල ඇදී සිටින සේ චලනය කිරීමේ දී යම් අවස්ථාවක වෘත්තයේ ගෑවී නො ගෑවී තිබෙන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස ලකුණු කරන්න.
- OP යා කර $O\hat{P}A$ මනින්න.

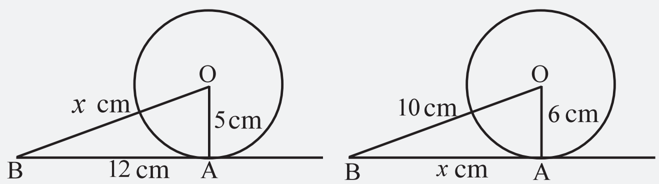
22.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත එක් එක් රූප සටහනේ PAQ යනු වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ. රූප සටහන්වල දී ඇති තොරතුරු ද භාවිත කොට අකුරුවලින් ලකුණු කර ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.





(2) පහත දී ඇති එක් එක් රූප සටහනේ කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්ත මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ස්පර්ශකයක් ඇඳ ඇත. අකුරු මගින් පෙන්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

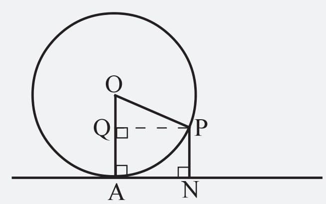


(3) O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශකය AN වේ. $A\hat{N}P = 90^0$, AN = 15 cm, PN = 9 cm නම්

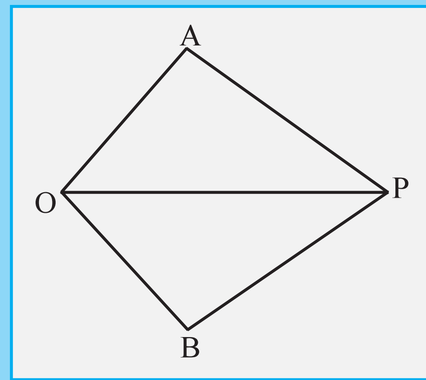
(i) PQ හි දිග සොයන්න.

(ii) AQ හි දිග සොයන්න.

(iii) වෘත්තයේ අරය r නම් OQ හි දිග r ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.



(4) OAP හා BOP යන සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක් රූපයේ දක්වා ඇත. එහි OA = OB වේ.



(i) OPA△ හා BOP△ අංගසම බව පෙන්වන්න.

(ii) $O\hat{P}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණය කුමක් ද?

(iii) $A\hat{O}P$ කෝණයට සමාන වූ කෝණය නම් කරන්න.

(iv) AP ට දිගින් සමාන වූ පාදය නම් කරන්න.

(5) O හා C යනු දී ඇති A හා B හි දී ඡේදනය වන වෘත්ත දෙකක කේන්ද්‍ර වේ. දික් කළ OC , C කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය T හි දී ඡේදනය වේ. වෘත්ත දෙක $A\hat{O}B = 60^0$

(i) OA ,OB , TA,TB යා කරන්න.

(ii) OAT △ හා OBT ත්‍රිකෝණය අංගසම බව පෙන්වන්න.

(iii) $O\hat{T}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

(iv) $T\hat{O}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

22.2 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක

22.3 ක්‍රියාකාරකම

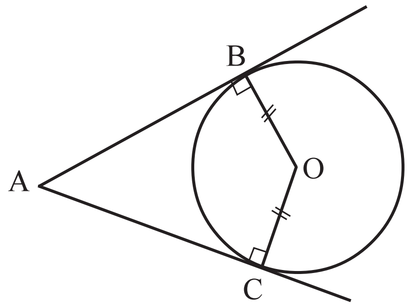
- 3 cm අරය සහිත වෘත්තයක් අඳින්න. එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න.
- BC විෂ්කම්භය නොවන පරිදි B හා C යන ලක්ෂ්‍ය දෙකක් වෘත්තය මත ලකුණු කරන්න. එම ලක්ෂ්‍යවල සිට ස්පර්ශක දෙකක් අඳින්න.
- ස්පර්ශක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය A ලෙස නම් කරන්න.
- OA යා කරන්න.
- ලැබෙන AOB ත්‍රිකෝණය හෝ AOC ත්‍රිකෝණය අංගසම ද ?
- මෙයින් එළඹිය හැකි නිගමන ප්‍රකාශ කරන්න.

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳිය හැකි ය. එම ස්පර්ශක හා සම්බන්ධ ව පහත සඳහන් ප්‍රමේයය ඉතා වැදගත් වේ.

ප්‍රමේයය

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට

(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.
(ii) ස්පර්ශක දෙක කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ සමාන වේ.
(iii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේද කරයි.



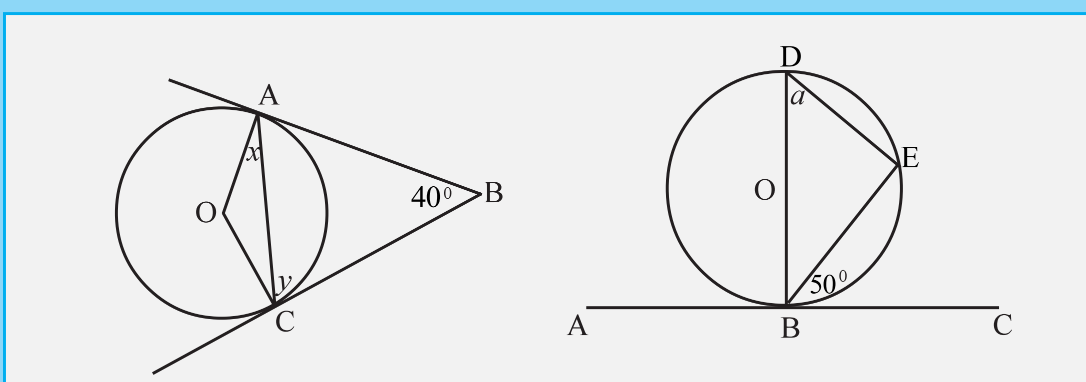
දත්තය :- O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක AB හා AC ස්පර්ශක වේ.
B හා C ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය වේ.

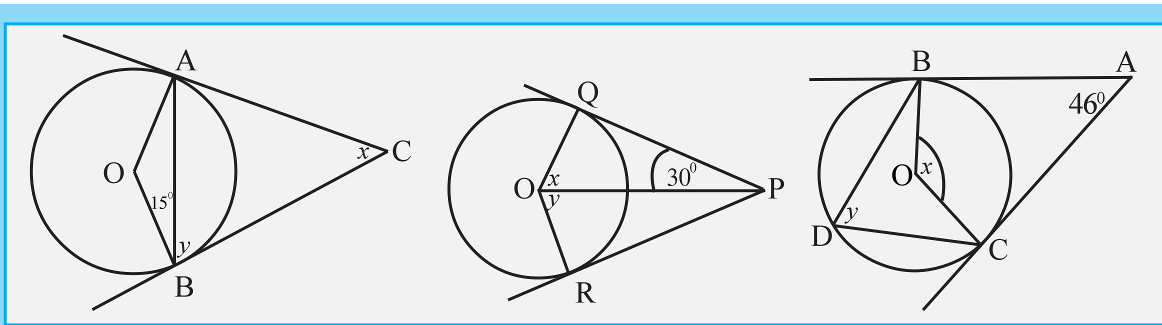
සා.ක.යු. :- i $AB = AC$
ii $A\hat{O}B = A\hat{O}C$
iii $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ බව

සාධනය :- $O\hat{B}A = O\hat{C}A = 90^0$ (ස්පර්ශකය අරයට ලම්භක වේ.)
OBA, OCA යන සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකේ
$OB = OC$ (අරය)
$OA = OA$ (පොදු පාදය - කර්ණය)
$\therefore OAB\triangle \equiv OCA\triangle$ (කර්ණ පාද)
එම නිසා
$AB = AC$
$A\hat{O}B = A\hat{O}C$
$O\hat{A}B = O\hat{A}C$

22.2 අභ්‍යාසය

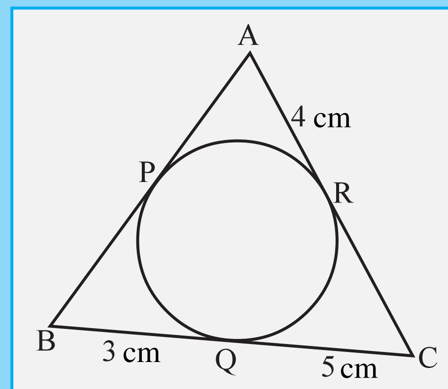
(1). එක් එක් වෘත්තයට බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට අඳින ලද ස්පර්ශක රූපයේ පෙන්වා ඇත. O කේන්ද්‍රය වේ. අක්ෂර මගින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.





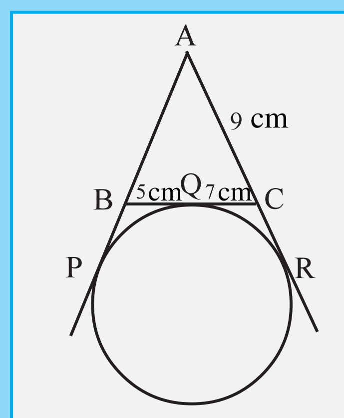
(2). AB, BC හා CA වෘත්තයට ස්පර්ශක වේ. දී ඇති මිනුම් භාවිත කරමින්

(i) AP හි දිග සොයන්න.
(ii) BP හි දිග සොයන්න.
(iii) CR හි දිග සොයන්න.
(iv) ABC △ හි පරිමිතිය සොයන්න.



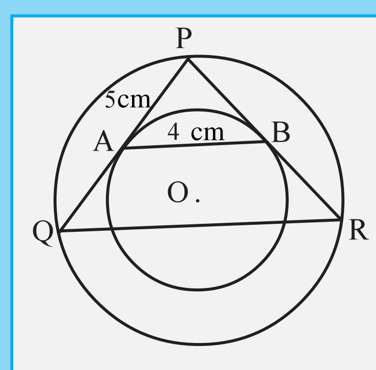
(3). AP, AR, හා BC වෘත්තයක ස්පර්ශක වේ. BC, Q හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. දී ඇති මිනුම් භාවිත කර

(i) BP හි දිග සොයන්න.
(ii) CR හි දිග සොයන්න.
(iii) AR හි දිග සොයන්න.
(iv) AP හි දිග සොයන්න.
(v) AB හි දිග සොයන්න.



(4). O යනු ඒක කේන්ද්‍රීය වෘත්ත දෙකක කේන්ද්‍රය වේ. PQ,PR යනු කුඩා වෘත්තයේ ස්පර්ශක දෙකක් වේ. P , Q , R විශාල වෘත්තයේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.
PQ = 10cm , PR = 10cm

(i) $O\hat{A}P$ හි විශාලත්වය සොයන්න.
(ii) PB හි දිග සොයන්න.
(iii) BR හි දිග සොයන්න.
(iv) QR හි දිග සොයන්න.
(v) PQR△ යේ පරිමිතිය සොයන්න.



(5). O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක ස්පර්ශක දෙකක් PA හා PB වේ.

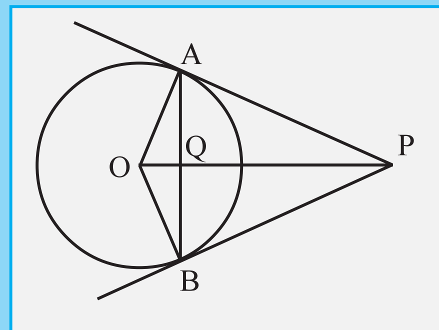
(i) $PAQ\Delta \equiv PBQ\Delta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $AQ = BQ$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $P\hat{Q}A = P\hat{Q}B$ බව පෙන්වන්න.

(iv) $P\hat{Q}A$ කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

(v) OP යනු AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වේ යැයි කිව හැකි ද?



(6). රූපයේ සටහන් කර ඇති පරිදි CBA, DEA හා BFE යනු වෘත්තයකට C, D හා F හි අඳින ලද ස්පර්ශක වේ. AD මත E ද AC මත B ද ඇත. EF=FB

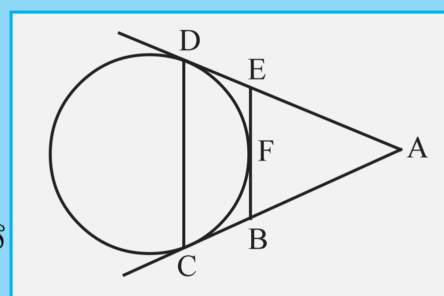
(i) AD, රේඛා ඛණ්ඩ දෙකක ඓක්‍යයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(ii) රේඛා ඛණ්ඩ දෙකක ඓක්‍යයක් ලෙස AC හි දිග ලියා දක්වන්න.

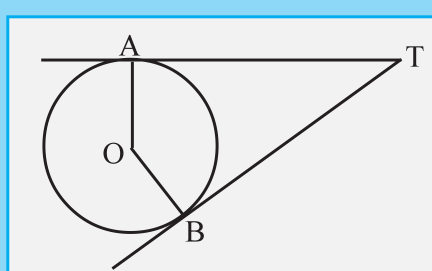
(iii) ED ට දිගින් සමාන රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

(iv) B C ට දිගින් සමාන වූ රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

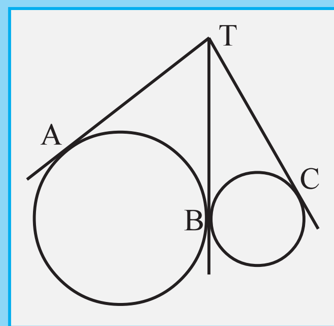
(v) $AD + AC = AB + BE + AE$ බව පෙන්වන්න.



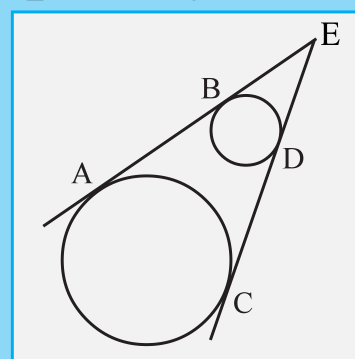
(7). O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට T සිට අඳින ලද ස්පර්ශක TA හා TB වේ. AOBT යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



(8). රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි වෘත්ත දෙකක පොදු ස්පර්ශකය TB වේ. TA විශාල වෘත්තයට ද TC කුඩා වෘත්තයට ද අඳින ලද ස්පර්ශක වේ.
TA = TC බව පෙන්වන්න.

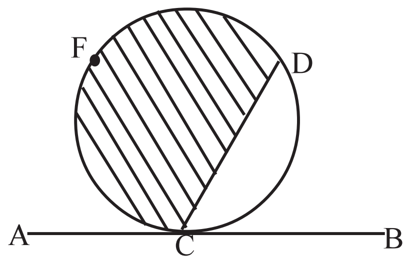


(9). රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි EBA හා EDC යනු වෘත්ත දෙකක පොදු ස්පර්ශකය වේ.
(i) AB = CD බවත්
(ii) AC // BD බවත් සාධනය කරන්න.

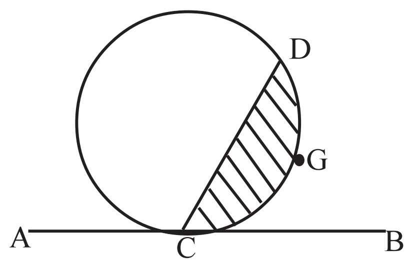


22.3 ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය

(i) රූපයේ $B\hat{C}D$ කෝණයට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ අඳුරු කර පෙන්වා ඇති CFD වෘත්ත ඛණ්ඩය $B\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වේ.



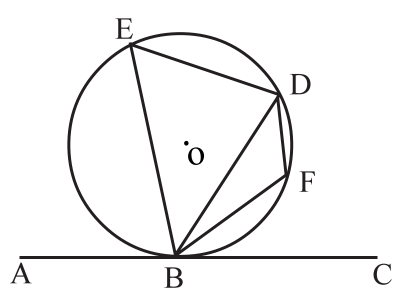
(ii) රූපයේ $A\hat{C}D$ කෝණයට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ අඳුරු කර පෙන්වා ඇති CGD යන වෘත්ත ඛණ්ඩය $A\hat{C}D$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය වේ.



වෘත්තයක් හා සම්බන්ධ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය හා ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය යනු කුමක් දැයි මුලින් ම සලකා බලමු.

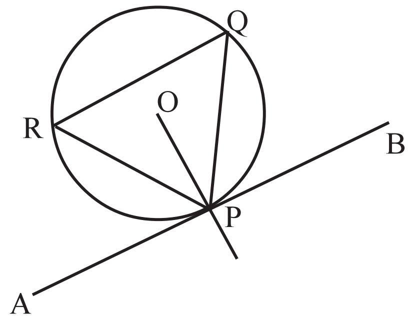
(iii) පහත රූපයේ ABC යනු කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශකයක් වේ. B ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය වේ. BD ජ්‍යායක් වේ. BD මගින් වෘත්තය ඛණ්ඩ දෙකකට බෙදයි.

- $D\hat{B}C$ සලකන විට $D\hat{E}B$ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයක් වේ.
- $D\hat{B}A$ සලකන විට $D\hat{F}B$ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයක් වේ.



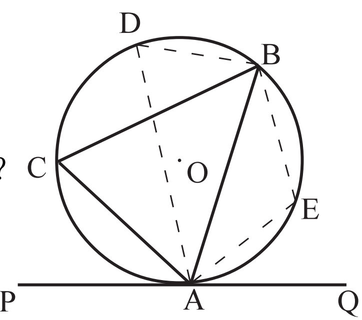
22.4 ක්‍රියාකාරකම

- O කේන්ද්‍රය වූ 5 cm අරය වූ ද වෘත්තයක් බ්‍රිස්ටල් බෝඩ් කැබැල්ලක අඳින්න.
- වෘත්තයේ P නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. P හි දී ස්පර්ශකයක් අඳින්න. ස්පර්ශකය APB ලෙස නම් කරන්න.
- PQ නම් ජ්‍යායක් අඳින්න.
- $Q\hat{P}B$ කෝණයේ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ පරිධියේ R නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
- PQR ත්‍රිකෝණය සම්පූර්ණ කරන්න.
- $Q\hat{P}B$ කෝණය කපා එය PQR Δ යේ $P\hat{R}Q$ කෝණය සමග සම්පාත වන්නේ දැයි බලන්න.
- මෙයින් එළඹිය හැකි නිගමනය කුමක් ද?



22.5 ක්‍රියාකාරකම

වෘත්තයක කේන්ද්‍රය O වේ. PAQ ස්පර්ශකය වෘත්තය A ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ කරයි. $Q\hat{A}B = 60^0$ වන සේ B ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත ලකුණු කරන්න. වෘත්තය මත E, D. C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කර BD, BC, CA, DA, AE , EB යා කරන්න



(i) $B\hat{D}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(ii) $B\hat{C}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(iii) ඉහත (i) හා (ii) හි විශාලත්වය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

(iv) $B\hat{A}Q$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ ද?

(v) $B\hat{A}P$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(vi) $B\hat{E}A$ හි විශාලත්වය මනින්න.

(vii) ඉහත (v) හා (vi) හි විශාලත්වය ගැන ඔබට කුමක් කිව හැකි ද?

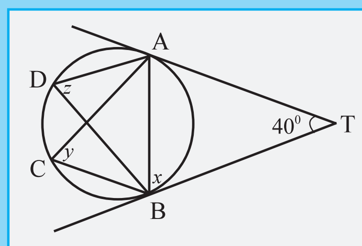
(viii) $B\hat{A}P$ හි ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේද?

ප්‍රමේයය

සරල රේඛාවක් වෘත්තයක් ස්පර්ශ කරත් ම ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යයේ සිට ජ්‍යායයක් ඇඳි විට ජ්‍යාය හා ස්පර්ශකය අතර කෝණ ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩවල කෝණවලට සමාන වේ.

22.3 අභ්‍යාසය

(1) වෘත්තයකට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක T හි දී ඡේදනය වේ.



(i) BT රේඛා ඛණ්ඩයට සමාන රේඛා ඛණ්ඩයක් නම් කරන්න.

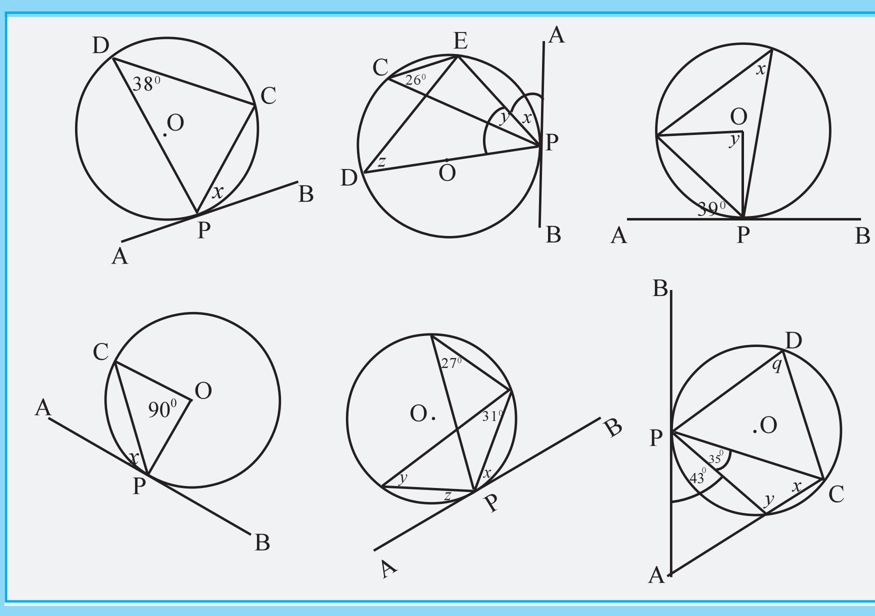
(ii) ATB Δ කිනම් වර්ගයේ ත්‍රිකෝණයක් ද?

(iii) x හි අගය කුමක් ද?

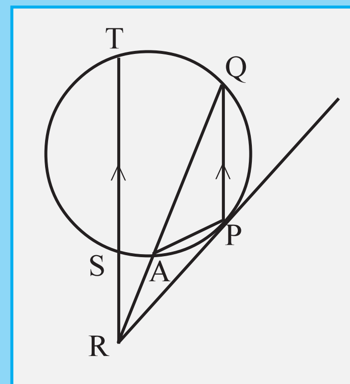
(iv) $A\hat{B}T$ සැලකූ විට ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ නම් කරන්න.

(v) y හා z හි අගයයන් සොයන්න.

(2) පහත එක් එක් රූපයේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P නම් ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳින ලද ස්පර්ශකය APB වේ. රූප එක එකෙහි දී ඇති තොරතුරු අනුව අක්ෂර යොදා ඇති කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.



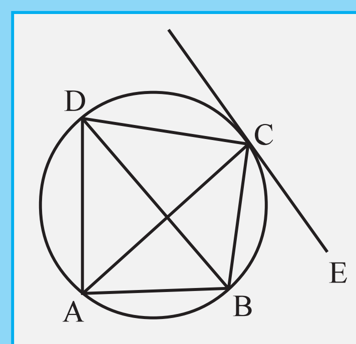
(3) A, P, Q, T,S වෘත්තයක් මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ.
RST , RAQ ඡේදක දෙකකි.
PR ස්පර්ශකයකි.
PQ // RT



(i) $R\hat{P}A$ කෝණයට සමාන වූ කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) $P\hat{Q}A$ කෝණයට සමාන වූ වෙනත් කෝණයක් නම් කරන්න.

(4) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයකි $\hat{A}$ කෝණයෙහි සම්ච්ඡේදකය AC වේ.
CE යනු C ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකයකි.

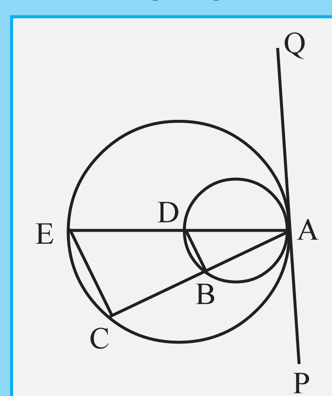


(i) $B\hat{C}E = x^0$ නම් x ට සමානවන ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ දෙකක් නම් කරන්න.

(ii) $D\hat{A}C = D\hat{B}C$ බව පෙන්වන්න.

(iii) BD // CE බව පෙන්වන්න.

(5) වෘත්ත දෙකක් අභ්‍යන්තරව A ලක්ෂයෙහි දී ස්පර්ශ වේ. A ලක්ෂ්‍යයේ දී පොදු ස්පර්ශකය PAQ වේ. E හා C විශාල වෘත්ත මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AE හා AC පිළිවෙළින් D හා B හි දී කුඩා වෘත්තය ඡේදනය කරයි .



(i) $Q\hat{A}D$ කෝණයට සමාන වූ කුඩා වෘත්තයේ කෝණය කුමක් ද?

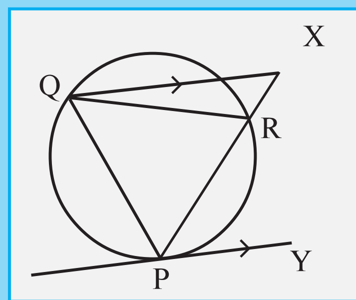
(ii) $Q\hat{A}D$ කෝණයට සමාන වූ විශාල වෘත්තයේ කෝණය කුමක් ද?

(iii) BD // CE බව පෙන්වන්න.

(iv) AB = BC නම් AD = DE බව පෙන්වන්න.

(v) AB = BC හා $D\hat{A}Q = 90^0$ නම් විශාල වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය D බව පෙන්වන්න.

(6) රූපයේ PY ස්පර්ශකය වෘත්තය P ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ කරයි. Q හා R වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. PY ට සමාන්තර ව Q හරහා ඇඳි රේඛාව දික් කළ විට PR රේඛාව X හි දී හමුවෙයි.
$P\hat{Q}R = P\hat{X}Q$ බව පෙන්වන්න.



(7) K, L හා M යන ලක්ෂ්‍ය වෘත්තයක පිහිටා ඇත.
L හි අඳින ලද ස්පර්ශකය දික් කරන ලද KM රේඛාව P හි දී හමු වෙයි.

$K\widehat{L}P = L\widehat{M}P$ බව පෙන්වන්න.