21 වෘත්ත චතුරස්‍ර

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

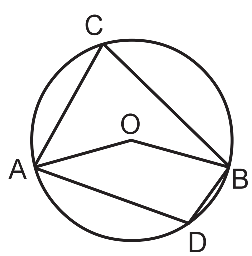
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ. යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය සාධනය හා භාවිතය
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ. යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය සාධනය හා භාවිතය

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

21.1 වෘත්තයක කෝණ

පසුගිය වසරේ දී වෘත්තයක කෝණ පිළිබඳ ව ඉගෙන ගත් ප්‍රමේයයන් නැවත මතක් කර ගනිමු.

(1) **ප්‍රමේයය:** වෘත්ත චාපයකින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය එම වෘත්ත චාපයෙන් ම පරිධියේ ඉතිරි කොටස මත ආපාතිත කෝණයක් මෙන් දෙගුණයක් වේ.

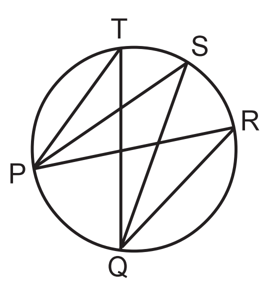


වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

$A\hat{O}B = 2\,A\hat{C}B$

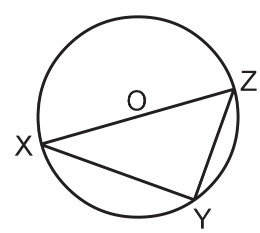
$A\hat{O}B$ (පරාවර්ත) $= 2A\hat{D}B$

(2) **ප්‍රමේයය:** වෘත්තයක එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන වේ.



$P\hat{T}Q = P\hat{S}Q = P\hat{R}Q$

(3) **ප්‍රමේයය:** අර්ධ වෘත්තයක කෝණය සෘජුකෝණයක් වේ.



වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වේ.

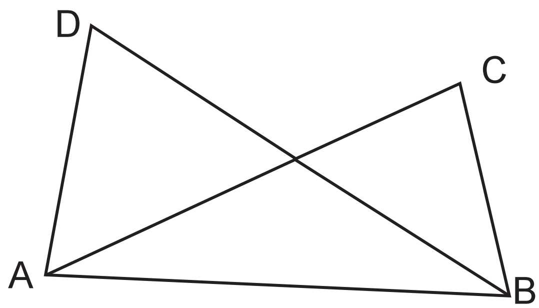
$X\hat{Y}Z = 90^0$

ඉහත රූපවල A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය ද P, Q, R,S හා T ලක්ෂ්‍ය ද X,Y හා Z ලක්ෂ්‍ය ද එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත. එසේ ලක්ෂ්‍ය කිහිපයක් එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම ලක්ෂ්‍ය ඒක වෘත්ත යයි කියනු ලැබේ.

ඉහත දෙවැනි ප්‍රමේයයේ විලෝමය ඒක වෘත්ත ලක්ෂ්‍යයන් සඳහා ප්‍රයෝජනවත් ප්‍රමේයයක් වේ.

ප්‍රමේයය

සරල රේඛාවක්, එයට එක ම පැත්තේ පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි නම් එම ලක්ෂ්‍ය දෙක ද සරල රේඛාවේ අන්ත ලක්ෂ්‍ය දෙක ද ඒක වෘත්ත වේ.



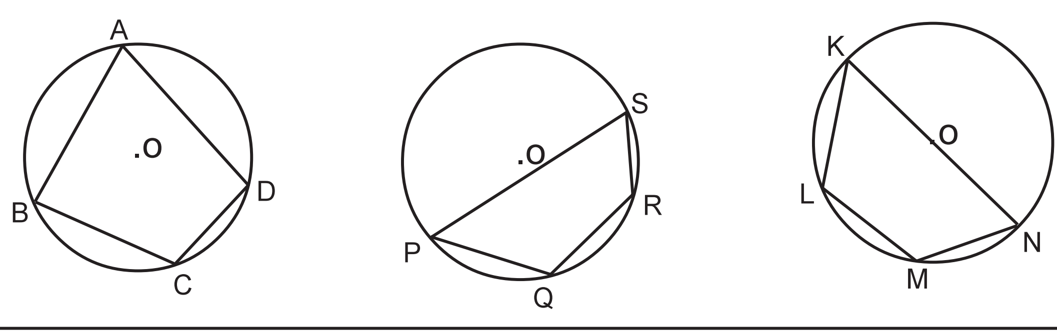
රූපයේ C හා D ලක්ෂ්‍ය AB සරල රේඛාවට එක ම පැත්තේ පිහිටා ඇත. ප්‍රමේයයට අනුව

$A\hat{C}B = A\hat{D}B$ නම්

A,B,C හා D ලක්ෂ්‍ය ඒක වෘත්ත වේ.

21.2 වෘත්ත චතුරස්‍ර

චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ හතර එක ම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

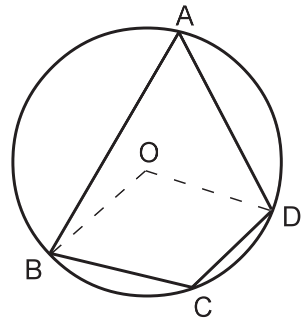


ඉහත රූපවල ABCD,PQRS හා KLMN වෘත්ත චතුරස්‍ර වේ.

ප්‍රමේයය -

වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

දැන් අපි මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරමු.



දත්තය :- ABCD කේන්ද්‍රය O වූ වෘත්තය තුළ ඇඳි වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.

සා.ක.යු :- $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$ සහ

$A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$ බව

නිර්මාණය :- OB හා OD යා කිරීම.

සාධනය :- - $B\hat{O}D = 2B\hat{A}D$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය පරිධියේ ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 2B\hat{C}D$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය පරිධිය ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි.)

$\therefore B\hat{O}D + B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 2B\hat{A}D + 2B\hat{C}D$

එහෙත් $B\hat{O}D + B\hat{O}D$ (පරාවර්ත) $= 360^0$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$\therefore 2B\hat{A}D + 2B\hat{C}D = 360^0$

එවිට $B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$

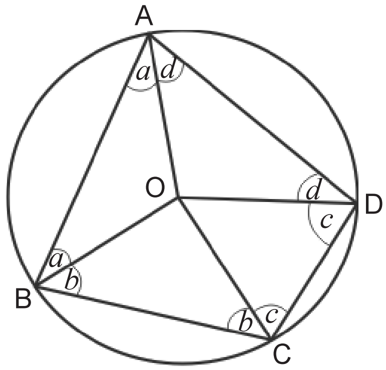
නමුත් $A\hat{B}C + A\hat{D}C + B\hat{A}D + B\hat{C}D = 360^0$ (චතුරස්‍රයක කෝණ)

$\therefore A\hat{B}C + A\hat{D}C + 180^0 = 360^0$

$\therefore A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$

$\therefore$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

සමද්විපාද ත්‍රිකෝණ පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රමේයයෙන් දැක්වෙන සම්බන්ධය සත්‍යාපනය කළ හැකි ය.
වෘත්තයක අරයයන් සමාන නිසා
AOB, BOC, COD හා AOD ත්‍රිකෝණ සමද්විපාද වේ.



$$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 360^0$$
$$\therefore\ 2a+2b+2c+2d = 360^0$$
$$\therefore\ (a+b) + (c+d) = 180^0$$
$$\therefore\ A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$$
එසේ ම $(a+d) + (b+c) = 180^0$
$$\therefore\ B\hat{A}D + B\hat{C}D = 180^0$$

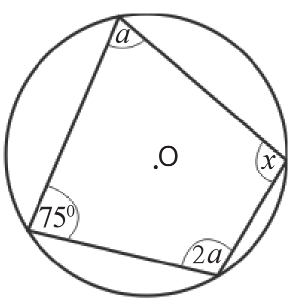
මෙම ප්‍රමේයයේ විලෝමය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස භාවිත කළ හැකි ය. එනම්,

චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

නිදසුන 1.

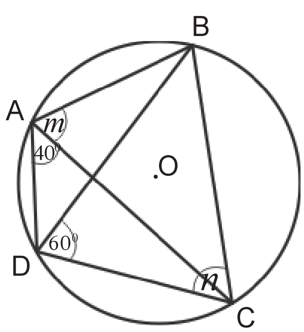
මෙම රූපවල සංකේත මඟින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.

(i)



$$x + 75^0 = 180^0$$
$$x = 180^0 - 75^0$$
$$\underline{\underline{x = 105^0}}$$
$$a + 2a = 180^0$$
$$3a = 180^0$$
$$\underline{\underline{a = 60^0}}$$
$$\underline{\underline{2a = 120^0}}$$

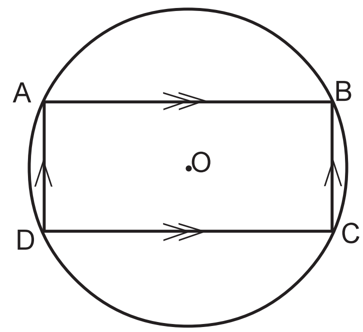
(ii)



$m = 60^0$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)
$$B\hat{A}D = 60^0 + 40^0$$
$$= 100^0$$
$$n = 180^0 - 100^0$$
$$\underline{\underline{n = 80^0}}$$

නිදසුන 2.

ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ ශීර්ෂ ඒක වෘත්ත වේ.
ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



දත්තය :- ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ ශීර්ෂ ඒක වෘත්ත වේ.

සා.ක.යු :- - ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් බව

සාධනය :- - ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා

$\hat{B} + \hat{D} = 180^0$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ)

එහෙත් $\hat{B} = \hat{D}$ (ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ)

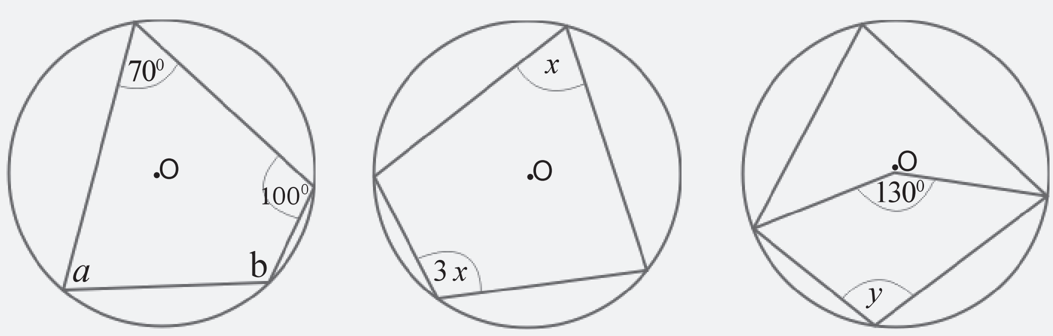
$\therefore \hat{B} = \hat{D} = 90^0$

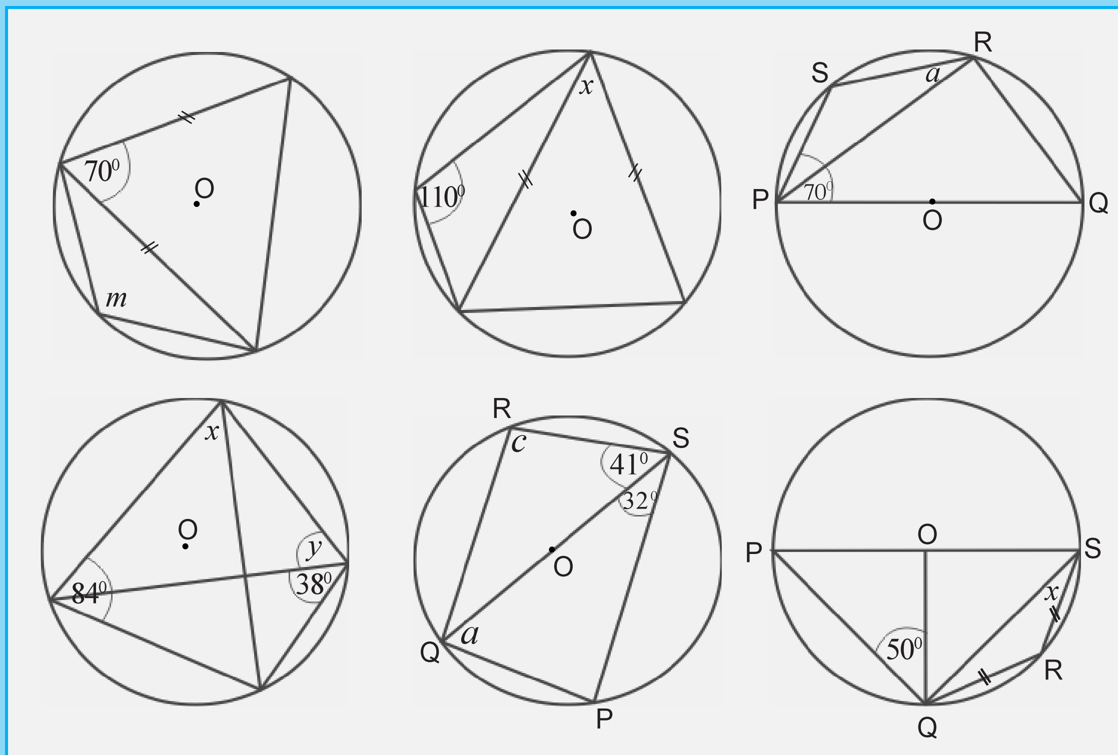
තව ද ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. (දත්තය) $\therefore AB = DC$ ද වේ.

$\therefore$ ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයක් වේ.

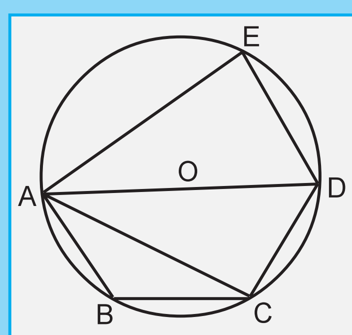
21.1 අභ්‍යාසය

(1) මෙම රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ ඒ ඒ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි. සංකේත මගින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.





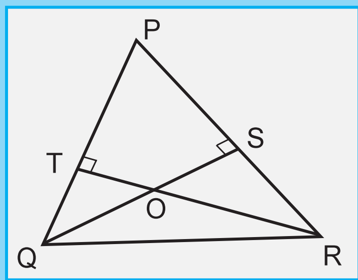
(2) රූපයේ දැක්වෙන ABCDE පංචාස්‍රයේ ශීර්ෂ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. AD යනු වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. $D\hat{A}E = 30^0$ ද, $B\hat{A}C = 25^0$ ද AB = BC හා DC = DE ද නම් ABCDE පංචාස්‍රයේ එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.



(3) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ AB//DC වේ. $A\hat{B}C = B\hat{A}D$ බව සාධනය කරන්න.

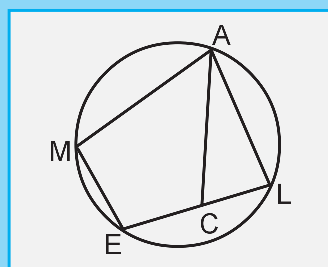
(4) KLMN වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $K\hat{L}M = K\hat{N}M$ වේ. KM වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක් බව සාධනය කරන්න.

(5) PQR ත්‍රිකෝණයේ Q සිට PR ට ඇඳි ලම්බයත් හා R සිට PQ ට ඇඳි ලම්බයත් O හි දී ඡේදනය වේ. (රූපය බලන්න.)

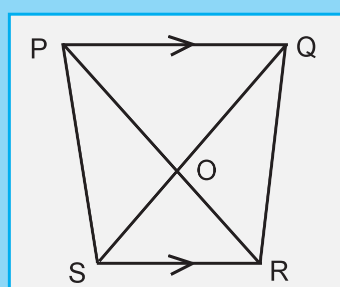


(i) PSOT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත්
(ii) QRST වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත්
සාධනය කරන්න.

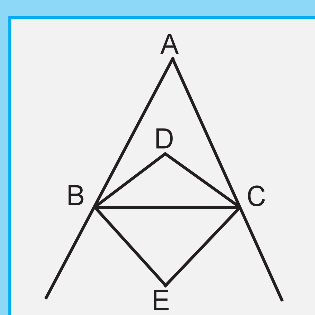
(6) MALE වෘත්ත චතුරස්‍රයේ EL පාදය මත C ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ AC = AL වන සේ ය. $A\widehat{M}E = A\widehat{C}E$ බව සාධය කරන්න.



(7) PQRS චතුරස්‍රයේ PR හා QS විකර්ණ O හි දී ඡේදනය වේ. PQ // SR ද, SO = OR ද වේ. P, Q, R හා S ලක්ෂ්‍ය ඒකවෘත්ත බව සාධනය කරන්න.



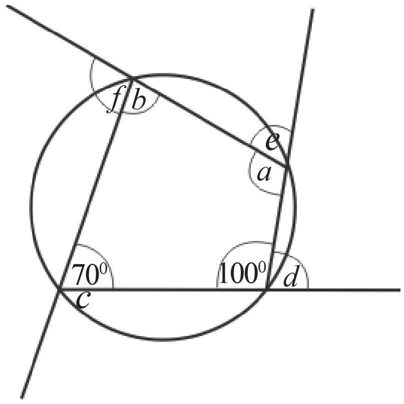
(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ B හා C හි අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදක D හි දී ද බාහිර කෝණ සමච්ඡේදක E හි දී ද හමු වේ. BDCE වෘත්ත චතරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



21.3 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

21.1 ක්‍රියාකාරකම

මෙම රූපයේ සංකේත මගින් දැක්වෙන කෝණවල අගය සොයමු.



$a = 180^0 - 70^0 = \ldots$

$b = 180^0 - 100^0 = \ldots$

$c = 180^0 - 70^0 = \ldots$

$d = 180^0 - 100^0 = \ldots$

$e = 180^0 - 110^0 = \ldots$

$f \ = \ldots - \ldots = \ldots$

මෙම වෘත්ත චතුරස්‍රයේ අභ්‍යන්තර කෝණ සහ බාහිර කෝණවල අගයයන් වෙන වෙන ම ලියා දක්වමු.

අභ්‍යන්තර කෝණ $\rightarrow 70^0, 100, 110^0, 80^0$

බාහිර කෝණ $\rightarrow ---, ---, ---, ---$

ඔබට ලැබී ඇති අගයයන් අනුව අභ්‍යන්තර කෝණවල හා බාහිර කෝණවල විශාලත්වයන් අතර සම්බන්ධයක් ඇත් දැයි බලන්න.

> චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණයක් සැලකූ විට එයට බද්ධ ව ඇති අභ්‍යන්තර කෝණයට සම්මුඛ ව පිහිටන අභ්‍යන්තර කෝණය **අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය** ලෙස හැඳින්වේ.

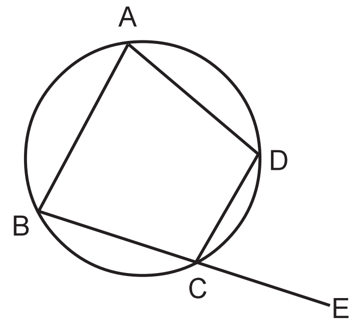
මෙම වගුව සම්පූර්ණ කරමු

බාහිර කෝණයේ විශාලත්වය	110^0	80^0		32^0
අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයේ විශාලත්වය	110^0		50^0	

වගුවේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව බාහිර කෝණයේ විශාලත්වයත් අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයේ විශාලත්වයත් සමාන වේ. මෙම සම්බන්ධය ප්‍රමේයයක් ලෙස හඳුනා ගනිමු.

> ප්‍රමේයය
>
> **වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.**

මෙම ප්‍රමේයය විධිමත්ව සාධනය කරන ආකාරය



දත්තය :--- ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ BC පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත.

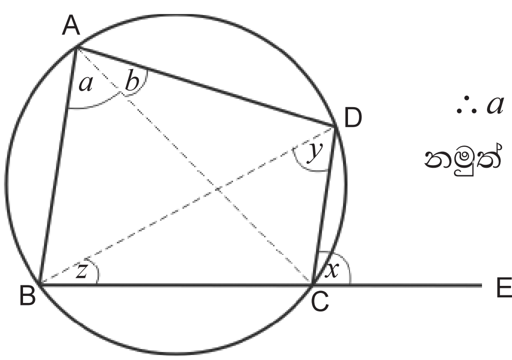
සා.ක.යු. :- - $D\hat{C}E = B\hat{A}D$ බව

සාධනය :- - $B\hat{C}D + D\hat{C}E = 180^0$ (පරිපූරක බද්ධ කෝණ)

$B\hat{C}D + B\hat{A}D \quad = 180^0$ (ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ)

$\therefore B\hat{C}D + D\hat{C}E = B\hat{C}D + B\hat{A}D$

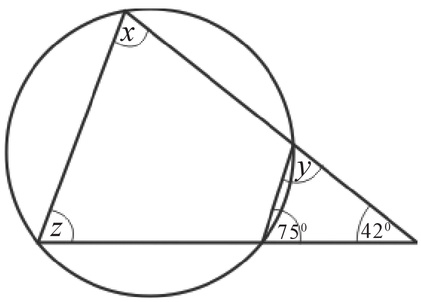
$\therefore D\hat{C}E = B\hat{A}D$

> ත්‍රිකෝණයක කෝණ සහ වෘත්තයක කෝණ පිළිබඳ ප්‍රමේයයන් භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කළ හැක.
>
> 
>
>
> $a = y$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)
>
> $b = z$ (එක ම ඛණ්ඩයේ කෝණ)
>
> $\therefore a + b = y + z$
>
> නමුත් $y + z = x$ (ත්‍රිකෝණයක බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර ප්‍රතිවිරුද්ධ කෝණ දෙකේ ඓක්‍යයට සමාන නිසා)
>
> $\therefore a + b = x$
>
> $x \quad = a + b$
>
> $\therefore D\hat{C}E = B\hat{A}D$

මෙම ප්‍රමේයයේ ද විලෝමය ප්‍රමේයයක් ලෙස භාවිත කළ හැක. ඒ අනුව චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කළ විට සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නම් එය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

නිදසුන 3.

රූපයේ x, y හා z හි අගය සොයන්න.



$$\underline{\underline{x = 75^0}}$$

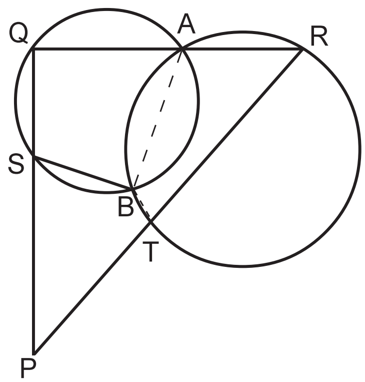
$$y = 180^0 - (75^0 + 42^0)$$

$$y = 180^0 - 117^0$$

$$\underline{\underline{y = 63^0}}$$

$$\underline{\underline{z = 63^0}}$$

නිදසුන 4.



රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A සහ B හි දී එකිනෙක හරහා යයි. PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදය A හරහා වැටී ඇත. PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

දත්තය :- රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A සහ B හි දී එකිනෙක හරහා යයි.
PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදය A හරහා වැටී ඇත.

සා.ක.යු. :-- PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව

නිර්මාණය :-- AB යා කිරීම .

සාධනය :-- ABSQ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ

$R\hat{A}B = B\hat{S}Q$ (බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

ABTR වෘත්ත චතුරස්‍රයේ

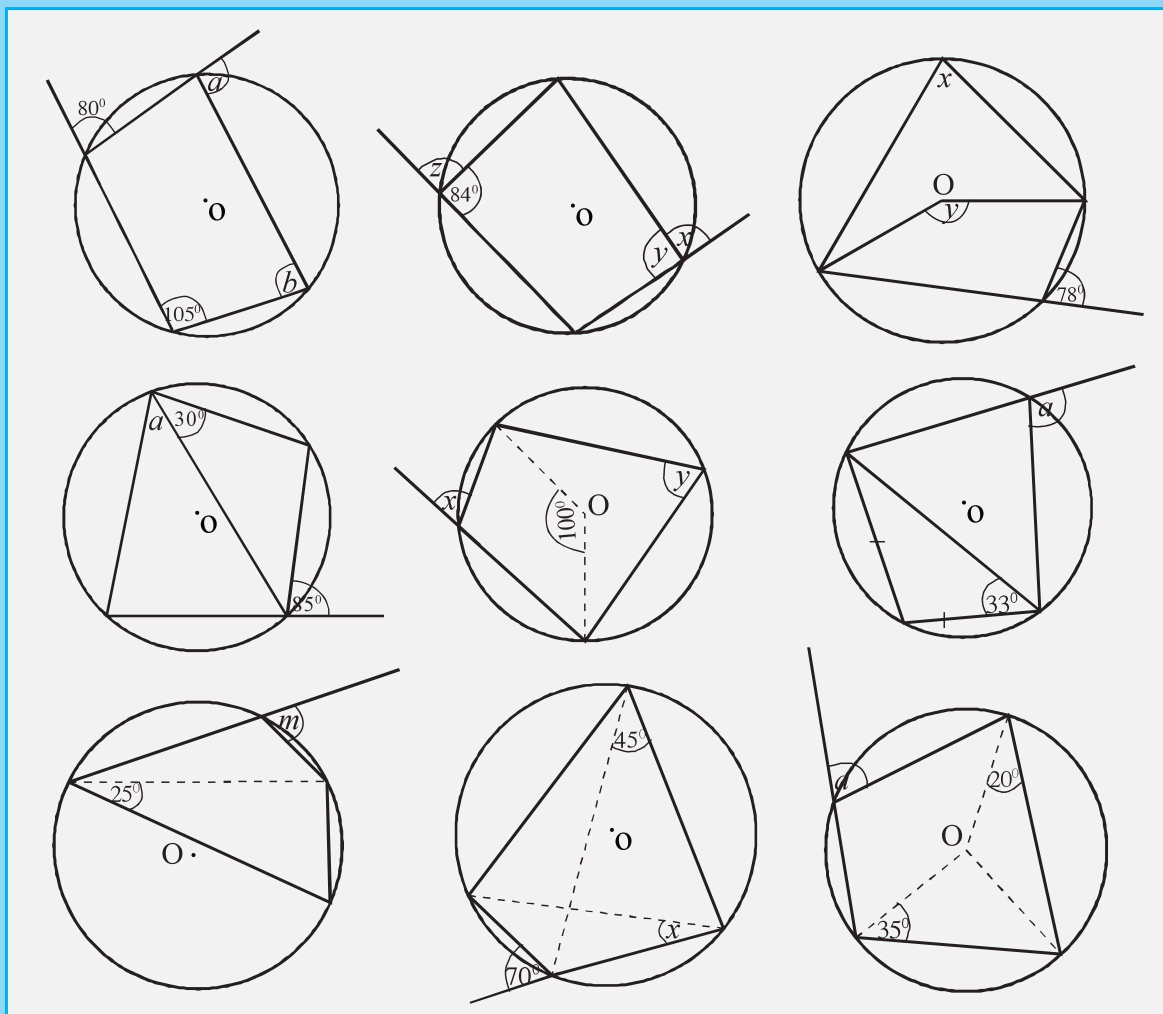
$R\hat{A}B = B\hat{T}P$ (බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

$\therefore B\hat{S}Q = B\hat{T}P$

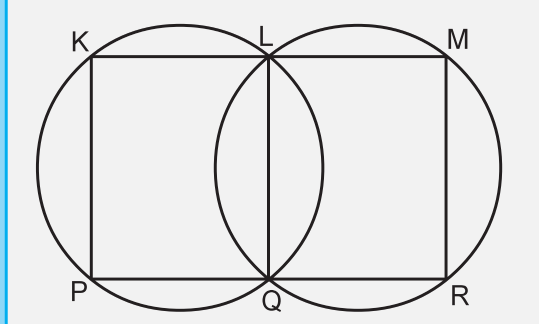
$\therefore$ PSBT වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

21.3 අභ්‍යාසය

(1) මෙම රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාළ වෘත්තවල කේන්ද්‍රයන් ය. එක් එක් වෘත්තයේ සංකේතවලින් දක්වා ඇති කෝණවල විශාලත්වය සොයන්න.



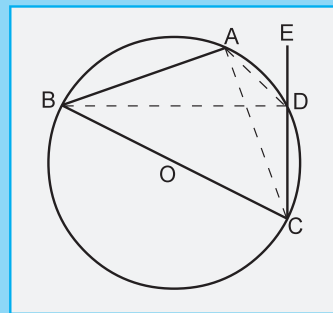
(2) රූපයේ වෘත්ත දෙක L හා Q හි දී එකිනෙක හරහා යයි. KLM හා PQR සරල රේඛා දෙකකි.



(i) $K\hat{L}Q$ ට සමාන වන කෝණයක් නම් කරන්න.

(ii) $K\hat{L}Q$ ට පරිපූරක වන කෝණයක් නම් කරන්න.

(3) BC යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ CD පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත මෙම රූපය අනුව,



(i) සෘජු කෝණයක් නම් කර හේතු දක්වන්න.

(ii) $A\hat{D}E$ හා $A\hat{B}C$ අතර සම්බන්ධය ලියා හේතු දක්වන්න.

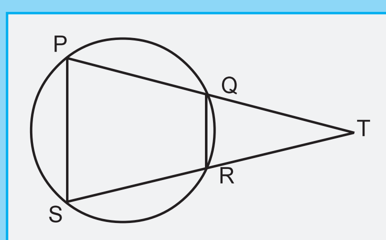
(iii) $A\hat{D}E = 75^0$ ද $C\hat{A}D = 20^0$ ද නම්

(a) $A\hat{B}D$ හි විශාලත්වය සොයන්න.

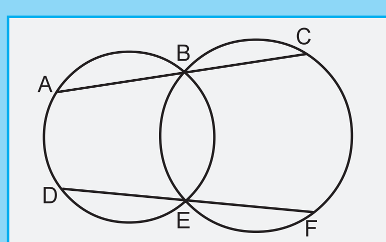
(4) PQRS වෘත්ත චතුරස්‍රයේ PQ හා SR පාද දික් කළ විට T හි දී හමු වේ. PT = ST වේ.

(i) QRT සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව සාධනය කරන්න.

(ii) PS // QR බව සාධනය කරන්න.



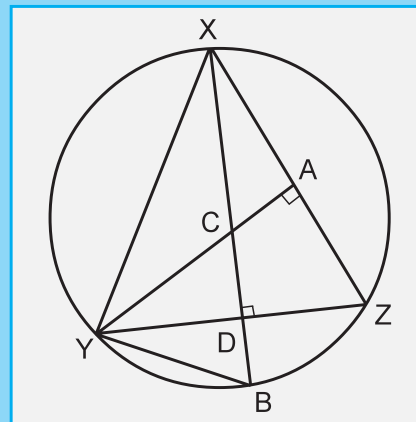
(5) රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක B සහ E හි දී ඡේදනය වේ. ABC හා DEF සරල රේඛා දෙකකි. AD // CF බව සාධනය කරන්න.



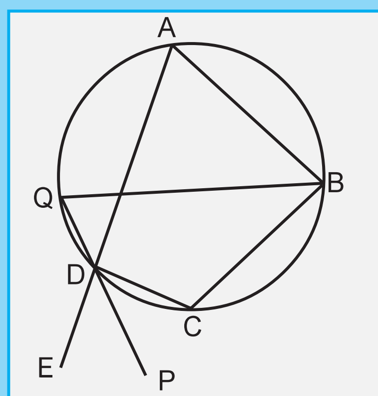
(6) XYZ යනු වෘත්තයක අන්තර්ගත ත්‍රිකෝණයකි. Y සිට XZ ට ඇඳි ලම්බය YA වේ. X සිට YZ ට ලම්බ ව ඇඳි රේඛාවට C හි දී YA ද, D හි දී YZ ද, B හි දී වෘත්තය ද හමුවේ.

(i) ACDZ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.

(ii) $Y\hat{C}B = Y\hat{B}C$ බව සාධනය කරන්න.



(7) ABCD වෘත්ත චතුරස්‍රයේ AD පාදය E තෙක් දිගු කර ඇත. CDE කෝණයෙහි සමච්ඡේදකය වන PD රේඛාව දික් කළ විට Q හි දී නැවත වෘත්තය හමු වේ. QB රේඛාවෙන් ABC කෝණය සමච්ඡේදනය වන බව සාධනය කරන්න.



(8) KLMN යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. KL හා NM දික් කළ විට A හි දී හමු වේ. KN හා LM දික් කළ විට B හි දී හමු වේ. ABNL වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නම් AB රේඛාව A,B,N හා L හරහා යන වෘත්තයේ විෂ්කම්භයක් බව සාධනය කරන්න.