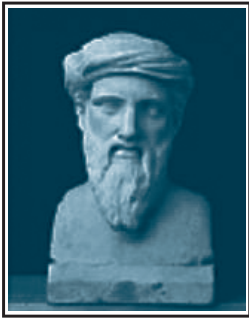


17 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට

- පයිතගරස් සම්බන්ධය භාවිත වන ගැටලු විසඳීම
- පයිතගරස් සම්බන්ධයේ සත්‍යතාව තහවුරු කර ගැනීම පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.



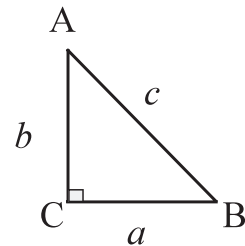
පයිතගරස් ක්‍රි. පූ. 580 ත් 500 ත් අතර ග්‍රීසියේ විසූ ග්‍රීක දාර්ශනිකයෙකි. ඔහු ගණිතඥයෙකි. තාරකා විද්‍යාඥයෙකි. ලොව සියල්ල සංඛ්‍යා තුළින් විග්‍රහ කර දැක්විය හැකිය යන මතය තවත් ඔහුගේ සංකල්පයකි. පයිතගරස් සංඛ්‍යා තුළින් සංගීතයේ ඇති ගණිතමය ස්වභාවය අධ්‍යයනය කිරීමට ද උත්සාහ කළ බව පැවසේ.

පයිතගරස් ඉදිරිපත් කළ සම්බන්ධය ප්‍රමේයයක් ලෙසින් විධිමත් ව සාධනය කළේ ඔහුගෙන් අවුරුදු 300 කට පසු යුක්ලීඩ් නම් ගණිතඥයා විසිනි. මෙම සම්බන්ධය ආදර්ශනය කළ හැකි ක්‍රම 400 කට අධික සංඛ්‍යාවක් ලෝකයේ විවිධ ගණිතඥයන් විසින් ඉදිරිපත් කර ඇත.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය ගණිතයේ යෙදෙන වැදගත් සම්බන්ධතාවකි. පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ මූලධර්ම ගණිතයේ දී පමණක් නො ව සාමාන්‍ය ජීවිතයේ දී විවිධ ක්‍ෂේත්‍රයන්හි භාවිත වේ.

පයිතගරස්ගේ ප්‍රමේයය: සෘජු කෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත අඳිය හැකි සමවතූරප්‍රයේ වර්ගඵලය සෘජු කෝණය අඩංගු පාද දෙක මත අඳිය හැකි සමවතූරප්‍ර දෙකේ වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන ය.

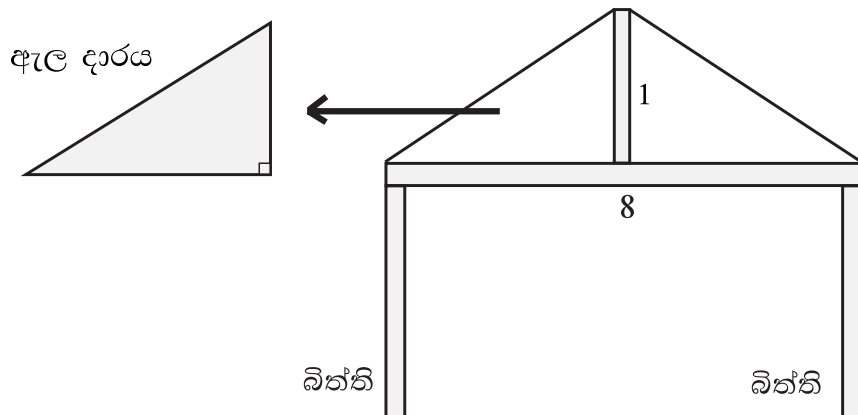
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ වේ.}$$



පයිතගරස් සම්බන්ධයේ මූලධර්මය ගෘහ නිර්මාණ ශිල්පීන්, පෙදරේරුවන්, කාර්මික ශිල්පීන්, මිනින්දෝරු ශිල්පීන් ද විවිධ වෘත්තීන් හි දී ද භාවිතයට ගෙන ඇති බව පෙනේ.

මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී මේ සම්බන්ධය පිළිබඳ ඔබ උගත් කරුණු භාවිත කර මේ ගැටලුව විසඳීමට උත්සාහ කරන්න.

- මීටර 8 ක් පළල ගොඩනැගිල්ලක වහලයේ උස මීටර 1 කි. ඇල දාරයේ දිග සොයන්නට අවශ්‍ය යැයි සිතමු.



මෙහි දී සෑදෙන සෘජු කෝණී ත්‍රිකෝණයක් සලකා බලමු. ආධාරකයේ එහි හරි මැද කුරුපාව සවිකර ඇති තැනට දුර මීටර් 4 කි. ආධාරකයට ලම්බ ව එහි මැද සවිකර ඇති කුරුපාවේ උස මීටර් 1 කි. ඇල දාරය සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයයි.

කර්ණයේ දිග මීටර් x යැයි සලකමු.

පයිතගරස් සම්බන්ධ අනුව,

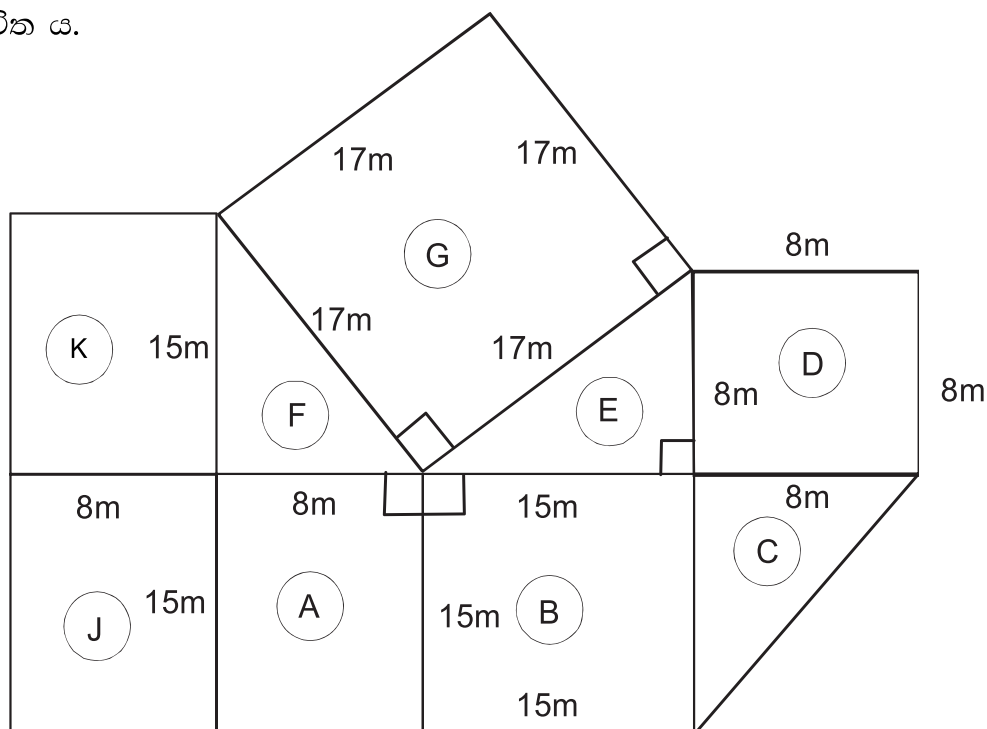
$$x^2 = 4^2 + 1^2 \text{ වේ.}$$

$$\text{එබැවින් } x^2 = 16 + 1$$

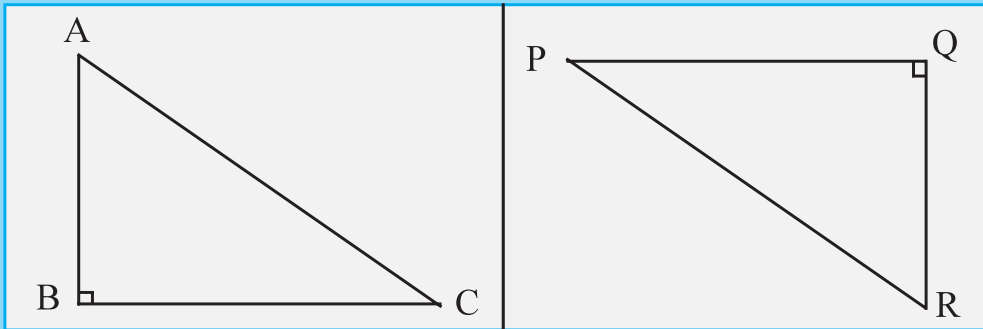
$$x^2 = 17$$

$$x = \sqrt{17} \text{ ඇල දාරයේ දිග මීටර් } \sqrt{17} \text{ වේ.}$$

මෙම රූපය සමචතුරස්‍ර, සෘජුකෝණාස්‍ර හා සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ කීපයකින් සමන්විත ය.



(2) පහත දැක්වෙන එක් එක් සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණය ආශ්‍රිත ව අදාළ ප්‍රකාශනවල හිස් තැන් පුරවන්න.



AB මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = AB^2
 BC මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
 AC මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...

$AC^2 = \dots + \dots$
 (පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව)

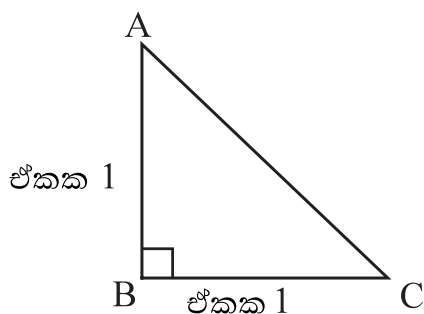
PQ මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
 QR මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...
 PR මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = ...

$PQ^2 + QR^2 = \dots$

17.1 ක්‍රියාකාරකම

අභ්‍යාස පොතේ පිටුවක මැද තරමක් පහතට වන සේ ABC සෘජුකෝණීක ත්‍රිකෝණය අඳින්න. එහි සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙකෙහි දිග සමාන ව ගන්න.

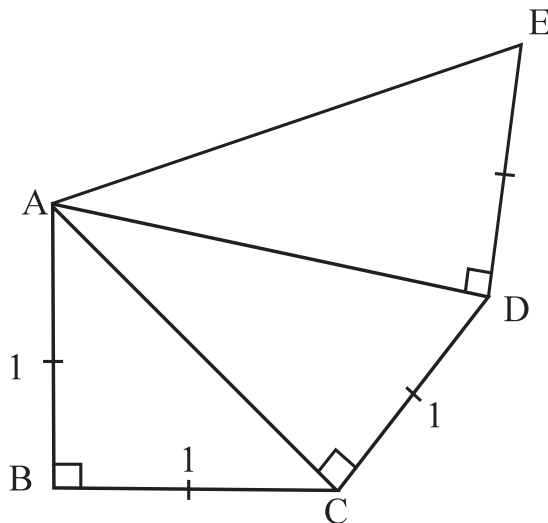
ඒ එක් පාදයක දිග ඒකක 1 නිසා AC දිග = ඒකක $\sqrt{1^2 + 1^2}$ = ඒකක $\sqrt{2}$ වේ.



$$AB = BC = 1$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$AC = \sqrt{2}$$



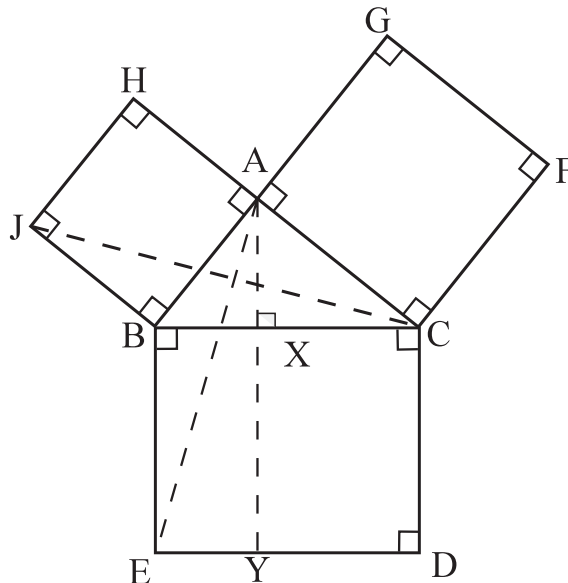
දැන් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි C ලක්ෂ්‍යයේ දී AC ට ලම්බයක් ඇඳ එහි ඒකක 1 ක් දුරින් D ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කරන්න. දැන් AD ගණනය කරන්න.

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \text{ එනම් } AD^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \therefore AD = \sqrt{3}$$

මේ ආකාරයෙන් D ලක්ෂ්‍යයේ දී AD ට ලම්බයක් ඇඳීමෙන් ඉහත ආකාරයට ම E ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කර AE ඇඳ AE හි දිග ලබා ගන්න. මෙම ක්‍රියාවලිය මේ ආකාරයට තව දුරටත් කිරීමෙන්, ලැබෙන සෑම සෘජුකෝණීක ත්‍රිකෝණයක ම කර්ණය ඇඳීමට විවිධ වර්ණ පාට පැන්සල් යොදා ගැනීම සුදුසු ය. ඔබට හැකි තාක් මෙසේ සෘජුකෝණීක ත්‍රිකෝණ ඇඳ C, D, E, පිහිටීම පරීක්ෂා කරන්න. මෙය ආකිමිඩීස් සර්පිලය නමින් හැඳින්වේ. AC, AD, AE..... එනම් එක් එක් සෘජුකෝණීක ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය මගින් 2 සිට ගණිත සංඛ්‍යාවල වර්ගමූල දැක්වෙන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

17.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයය සාධනය

පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ විධිමත් සාධනය පයිතගරස් ගණිතඥයාගෙන් අවුරුදු 300 කට පමණ පසු යුක්ලීඩ් ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කළ බව පෙර සඳහන් කළෙමු. එය සාධනය කළ හැකි ක්‍රම සලකා බලමු.



දත්තය :- ABC ත්‍රිකෝණයේ A කෝණය සෘජු කෝණයකි.
BC මත සමචතුරස්‍රය BCDE ද, AC මත සමචතුරස්‍රය ACFG ද,
AB මත සමචතුරස්‍රය ABJH ද වේ.

සා.ක.යු. :- BCDE වර්ගඵලය = ACFG වර්ගඵලය + ABJH වර්ගඵලය

නිර්මාණය :- BC රේඛාව X හි ද ED රේඛාව Y හි දී ද හමුවන සේ BC ට ලම්බක ව AXY අඳින්න. AE හා JC යා කරන්න.

සාධනය :- $\hat{JBA} = \hat{CBE} = 90^\circ$ (දත්තය)

$\hat{ABC}$ දෙපසට ම එකතු කළ විට

$$\hat{JBC} = \hat{ABE}$$

$JBC \Delta$ හා $ABE \Delta$ සැලකූ විට

$BJ = AB$ (සමචතුරස්‍රයේ පාද)

$BC = BE$ (සමචතුරස්‍රයේ පාද)

$JCB \Delta \equiv ABE \Delta$ (පා.කෝ.පා)

$JCB \Delta$ වර්ගඵලය = $ABE \Delta$ වර්ගඵලය

HAC සරල රේඛාවකි. (සමචතුරස්‍ර දෙකේ කෝණ එකතුව 180° නිසා) $JBC \Delta$ හා $JBAH$ සමචතුරස්‍රය JB ආධාරකයේ පිහිටා JB හා HAC සමාන්තර රේඛා අතර පිහිටා ඇත.

$$JBC \Delta \text{ වර්ගඵලය} = \frac{JBAH \text{ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය}}{2}$$

එසේම $ABE \Delta$ හා $BEYX$ සෘජුකෝණාස්‍රය BE ආධාරකයෙහි පිහිටා BE හා AXY සමාන්තර රේඛා අතර නිසා.

$$ABE \Delta \text{ වර්ගඵලය} = \frac{BEYX \text{ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය}}{2}$$

$JBC \Delta$, $ABE \Delta$ වර්ගඵලයන් සමාන වේ.

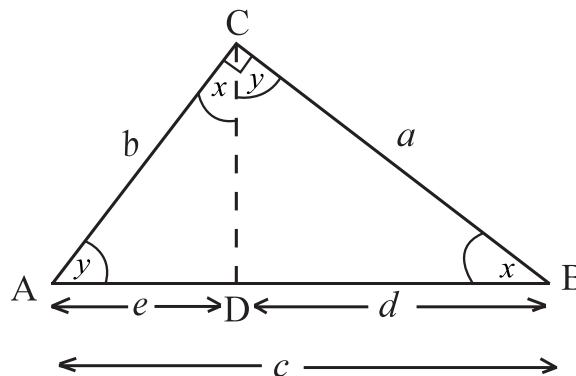
$JBAH$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = $BEYX$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලය.

මේ ආකාරයටම AD හා BF යා කිරීමෙන් CFGA සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $CDYX$ සෘජුකෝණාස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන බව දැක්විය හැකි ය.

$$\therefore CDYX + BEYX = JBAH + CFGA \text{ වර්ගඵලය}$$

$$BEDC = JBAH + CFGA \text{ වර්ගඵලය}$$

11 ක්‍රමය



දත්තය :- $ABC \Delta C$ කෝණය සෘජුකෝණයකි. C සිට AB ට ලම්බව CD ඇඳ තිබේ.

AB දිග c ද, $AC = b$ ද

BC දිග a ලෙස නම් කර ඇත.

සා.ක.යු. :- $a^2 + b^2 = c^2$ බව

සාධනය :- $ABC \Delta$ හා $ACD \Delta$ සමරූපී වේ.

(එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන 90° , x හා y)

$\frac{c}{b} = \frac{b}{e}$ (සමරූපී ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.)

එවිට $b^2 = ce$ වේ. $\longrightarrow$ (1)

$ABC \Delta$ හා $BCD \Delta$ සමරූපී නිසා

$\frac{c}{a} = \frac{a}{d}$ (සමරූපී ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.)

$a^2 = cd \longrightarrow$ (2)

(1) + (2) $a^2 + b^2 = ce + cd$

$a^2 + b^2 = c(e + d)$

නමුත් $(e + d) = c$

$\therefore a^2 + b^2 = c \times c$

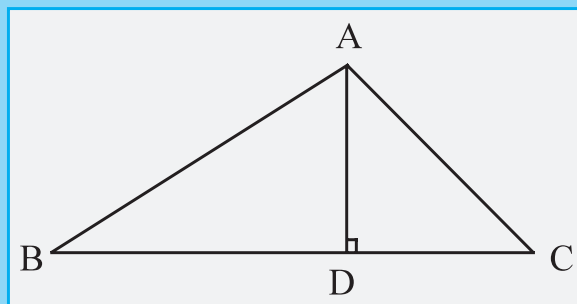
$a^2 + b^2 = c^2$

17.2 අභ්‍යාසය

- (1) සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇති ඉණිමගක් බිත්තිය පාමුල සිට 4 m ක් උසින් ද පහළ කෙළවර බිත්තියේ පාමුල සිට 3 m ඇතින් ද පිහිටයි. ඉණිමගේ දිග සොයන්න.
- (2) සිරස් විදුලි රැහැන් කණුවක උස 10 m කි. එහි මුදුනට 2 m පහළින් රුකුල් කම්බියක් සවිකර ඇත. රුකුල් කම්බිය කණුවේ පාමුල සිට සම මට්ටමේ 6 m ඇතින් කුඳ්ඳයකට සවිකර ඇත. කම්බියේ දිග සොයන්න. (ගැට ගැසීමට වැය වන කොටස නොසලකන්න)
- (3) රොම්බසයක විකර්ණ 24 cm හා 10 cm වේ. රොම්බසයේ පාදයක දිග සොයන්න.
- (4) ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = AC = 17$ cm වේ. A වල සිට BC ට ඇඳි ලම්බකයේ දිග 15 cm වේ. ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

- (5) ABCD චතුරස්‍රයේ $\angle ABC = 90^\circ$ $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm, $CD = 8$ cm, $AD = 17$ cm, $\angle ACD = 90^\circ$ බව පෙන්වන්න.
- (6) AOB ත්‍රිකෝණයේ $AO = OB$, $\angle AOB = 90^\circ$. කර්ණය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය මෙන් 4 ගුණයක් බව පෙන්වන්න.
- (7) ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB > AC$ වේ. A සිට BC ට ලම්භව AX ඇඳ ඇත.
 $AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ බව පෙන්වන්න.
- (8) සමචතුරස්‍රයක විකර්ණය මත අඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය පළමු චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය මෙන් දෙගුණයක් බව පෙන්වන්න.
- (9) XYZ සමපාද ත්‍රිකෝණයේ YZ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය O වේ. $3YZ^2 = 4OX^2$ බව පෙන්වන්න.
- (10) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රය තුළ ඕනෑම තැනක X ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත.
 $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$ බව පෙන්වන්න.
- (11) PQRS චතුරස්‍රයේ විකර්ණ එකිනෙක සෘජුකෝණී ව ජේදනය වේ.
 $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ බව පෙන්වන්න.
- (12) PQR ත්‍රිකෝණයේ $\angle PQR = 90^\circ$ ක් වේ. QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය X වන අතර PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය Y වේ. $4(PX^2 + RY^2) = 5PR^2$ බව පෙන්වන්න.
- (13) ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ BC පාදය මත P පිහිටා ඇත්තේ $BP = \frac{1}{3} BC$ වන සේ ය. $9AP^2 = 7AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

(14)



ABC ත්‍රිකෝණයේ $AD \perp BC$

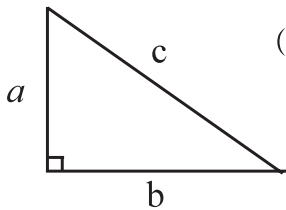
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ බව සාධනය කරන්න.

පයිතගරස් ත්‍රිත්ව

ඕනෑ ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක සෘජු කෝණය අඩංගු පාද දෙක a හා b ද කර්ණය c ලෙස ද නම් කර ඇති විට $a^2 + b^2 = c^2$ තෘප්ත වන a , b හා c අගයයන් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව යනුවෙන් හඳුන්වනු ලැබේ.

- පූර්ණ සංඛ්‍යාමය වූ සරල ම පයිතගරස් ත්‍රිත්වය (3, 4, 5) වේ. එහි ගුණාකාර (6, 8, 10), (9, 12, 15), (30, 40, 50) වැනි ත්‍රිත්වය ද පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ. (8, 15, 17) (7, 24, 25), (9, 40, 41) යනු තවත් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව කීපයකි.
- මූලින් සඳහන් කළ ගුණාකාර වන ත්‍රිත්වවල හැර අනෙක් ත්‍රිත්වවල එක් සංඛ්‍යාවක් ඉරට්ට වන අතර ඉතිරි දෙක ම ඔත්තේ බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ලබාගැනීම සඳහා යොදාගත හැකි සමීකරණ තුනක් යුක්ලීඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කර ඇත. පළමු සඳහන් කළ ආකාරයට සෘජුකෝණය අඩංගු පාද a හා b ද කර්ණය c ද ලෙස ගත් විට එම සමීකරණ තුන නම්



$$(1) a = x^2 - y^2 \quad (2) b = 2xy \quad (3) c = x^2 + y^2$$

පහත දැක්වෙන x හා y අගයයන් අනුව a හා b හා c හි අගය සොයා ඒවා පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක් වන්නේ දැයි බලන්න.

x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$
2	1	3	4	5
3	2			
3	1			
4	1			
4	3			
5	4			
5	2			
6	1			
6	5			
7	2			

x හා y හි තවත් කවර අගයයන් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව සාදන්නේ දැයි සොයන්න.