16 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි සංකල්පය
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය සෙවීම
- ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද nවල ඓක්‍යය සෙවීම
- ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය සෙවීම

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

16.1 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි හැඳින්වීම

අනුක්‍රමයක් යනු යම්කිසි නිශ්චිත පිළිවෙළකට සකස් කරන ලද සංඛ්‍යා කුලකයකි. මෙම සංඛ්‍යාවලට අනුක්‍රමයේ පද යයි කියනු ලබන අතර එක් පදයකට පසුව ඊළඟ පදය ලැබෙන්නේ යම් රීතියකට අනුවයි.

නිදසුන 1.

3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96 ... යන සංඛ්‍යා අනුක්‍රමය සලකන්න.
මෙය පද හයකින් සමන්විත වේ. මුල් පදය 3 වන අතර හයවැනි පදය 96 වේ. තව ද සෑම පදයක් ම ඊට පෙර පදය 2 න් ගුණකිරීමෙන් ලැබෙන බව පැහැදිලි ය. එනම් අනුක්‍රමයේ සෑම පදයක් ම ඊට පෙර පදයෙන් බෙදීමෙන් 2 ලැබේ.

පහත සඳහන් සංඛ්‍යා අනුක්‍රම සලකන්න.

(i) 2, 4, 8, 16, ...
(ii) 1 , 3 , 9 , 27 , 81 , ...
(iii) 64 , 32 , 16 , 8 , 4 , ...
(iv) 100 , 10 , 1 , 0.1 , 0.01 , 0.001 , ...
(v) 81 , -27 , 9 , -3 , 1 , ...

අනුක්‍රමය	මුල් පදය	ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදීමෙන් ලැබෙන නියත අගය
(i)	2	$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=2$
(ii)	1	$\frac{3}{1}=\frac{27}{9}=3$
(iii)	64	$\frac{32}{64}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$
(iv)	100	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0.1$
(v)	81	$\frac{-27}{81}=\frac{9}{-27}=-\frac{1}{3}$

සංඛ්‍යා අනුක්‍රමයක ඕනෑ ම පදයක් ඊට පෙර පදයෙන් බෙදූ විට නියත අගයක් ලැබේ නම් එවැනි අනුක්‍රමයකට **ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක්** යැයි කියනු ලැබේ. මෙම නියත අගයට ශ්‍රේඪියේ **පොදු අනුපාතය** යයි කියනු ලැබේ.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය " a " ද පොදු අනුපාතය " r " ද ලෙස දැක්වේ.

> මුල් පදය a ද, පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක්
>
> $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$ ලෙස ලියා දැක්විය හැකි ය.

නිදසුන 2.

පහත දැක්වෙන එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) 4 , 8 , 16 , 32 ,.....

(ii) 64 , 32 , 16 , 8,.....

(iii) 3 , -9 , 27 , -81,.....

(iv) $\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{18},\frac{1}{54},\ldots\ldots$

විසඳුම

(i) $r=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=2$

(iii) $r=\frac{-9}{3}=\frac{27}{-9}=-3$

(ii) $r=\frac{32}{64}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

(iv) $r=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{18}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

16.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) $4, 12, 36, 108, \ldots$

(ii) $-3, -9, -27, -81, \ldots$

(iii) $27, -18, 12, -8, \ldots$

(iv) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

(v) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \ldots$

(vi) $x^2, -x, 1, -\frac{1}{x}, \ldots$

(vii) $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$

(viii) $b^2c^3, b^3c^2, b^4c, b^5, \ldots$

(2) එක් එක් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියන්න.

(i) $a=2$, $r=7$

(ii) $a=7$, $r=2$

(iii) $a=16$, $r=\frac{1}{2}$

(iv) $a=s$, $r=s$

16.2 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය T_n මඟින් අංකනය කරමු.

3 , 6 , 12 , 24 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය නිරීක්ෂණය කරන්න.

ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 2 ද මුල් පදය 3 ද වේ. එනම් $r = 2$ ද $a = 3$ ද වේ.

පළමු පදය	=	$T_1 = 3 = 3\times1$	$= 3\times2^0$
දෙවැනි පදය	=	$T_2 = 6 = 3\times2$	$= 3\times2^1$
තුන්වැනි පදය	=	$T_3 = 12 = 3\times4$	$= 3\times2^2$
හතරවැනි පදය	=	$T_4 = 24 = 3\times8$	$= 3\times2^3$

මේ අනුව පළමු පදය a හා පොදු අනුපාතය r වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සැලකූ විට,

$T_1 = a = ar^0 = ar^{1-1}$

$T_2 = ar = ar^1 = ar^{2-1}$

$T_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

....

....

....

....

....

$T_{10} = ar^9 = ar^{10-1}$

ඉහත පැහැදිලි කිරීමට අනුව ශ්‍රේඪියේ n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ බව පෙනේ.

> මුල් පදය a ද, පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වන පදය $T_n = ar^{n-1}$ වේ.

නිදසුන 3.

පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ 8 වැනි පදය සොයන්න.

(i) 3 , 6 , 12 , 24 , ...

(ii) 8 , 4 , 2 , 1 , ...

විසඳුම

(i) ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය $a = 3$ ද , පොදු අනුපාතය $r = \frac{6}{3} = 2$ ද වේ.

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ n වැනි පදය $T_n = ar^{n-1}$ වේ.

$\therefore T_8 = 3\times 2^{8-1} = 3\times 2^7 = 3\times 128 = 384$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ අට වැනි පදය $\underline{\underline{384}}$ වේ.

(ii) පළමු පදය $a = 8$, පොදු අනුපාතය $r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ වේ.

ශ්‍රේඪියේ n වන පදය, $T_n = ar^{n-1}$ නිසා

$$T_8 = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$

$$= 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$

$$= 8\times\frac{1}{128} = \frac{1}{16}$$

ශ්‍රේඪියේ අටවැනි පදය $\frac{1}{16}$ වේ.

නිදසුන 4.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 3 ද හතරවන පදය 81 ද නම් පොදු අනුපාතය සොයන්න.

$a = 3,\ T_4 = 81$

$T_4 = ar^3$

අගය ආදේශයෙන්

$81 = 3\times r^3$

එනම් $r^3 = \frac{81}{3} = 27$

$r^3 = 3^3$

$\therefore r = 3$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 3 වේ.

නිදසුන 5.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 3 වන පදය 360 ද 6 වන පදය 1215 ද නම් ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය ද මුල්පදය ද සොයන්න.

$$T_3 = ar^2 = 360 \text{———} (1)$$

$$T_6 = ar^5 = 1215 \text{———} (2)$$

$\dfrac{(2)}{(1)}$ න් $\dfrac{ar^5}{ar^2} = \dfrac{1215}{360}$ ලැබේ.

$$r^3 = \frac{27}{8}$$

$$r^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$\underline{\underline{r = \dfrac{3}{2}}}$ වේ.

r හි අගය (1) සමීකරණයේ ආදේශයෙන්,

$$a\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 360$$

$$a \times \frac{3^2}{2^2} = 360$$

$$a \times \frac{9}{4} = 360$$

$$\therefore a = \frac{360 \times 4}{9}$$

$$\underline{\underline{a = 160}}$$

$\therefore$ ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය 160 ද පොදු අනුපාතය $\dfrac{3}{2}$ ද වේ.

නිදසුන 6.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 4 ද මුල් පද තුනෙහි ඓක්‍යය 28 ක් ද නම් ශ්‍රේඪියේ මුල් පද තුන ලියන්න.

මෙම ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද නම්

$$a = 4 \text{———} (1)$$

$$a + ar + ar^2 = 28 \text{———} (2)$$

(2) න් $a(1 + r + r^2) = 28$

(1) න් a හි අගය ආදේශයෙන්

$$4(1 + r + r^2) = 28$$

$$1 + r + r^2 = \frac{28}{4}$$

$$1 + r + r^2 = 7$$

$$\therefore r^2 + r + 1 - 7 = 0$$

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$(r + 3)(r - 2) = 0$$

$\therefore r = -3$ හෝ $r = 2$ වේ.

r සඳහා අගය දෙකක් ලැබෙන නිසා අපට ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

$a = 4$ හා $r = -3$ විට ශ්‍රේඪිය මෙසේ ය.

$$\underline{\underline{4, -12, 36, \ldots}}$$

$a = 4$ හා $r = 2$ විට ශ්‍රේඪිය මෙසේ ය.

$$\underline{\underline{4, 8, 16, \ldots}}$$

16.2 අභ්‍යාසය

(1) පහත සඳහන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි නිරීක්ෂණය කර දී ඇති වගුව පිටපත් කර සම්පූර්ණ කරන්න.

(i). 5, 15 , 45, 135, 405, 1215, 3645

(ii) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192

(iii) 96, 48, 24, 12, 6, 3, 1.5

(iv) 1000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001

(v) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \frac{64}{729}$

ශ්‍රේඪිය	a	r	T_1	n	l	T_5
(i)						
(ii)						
(iii)						
(iv)						
(v)						

මෙහි n සහ l මගින් පිළිවෙළින් පද ගණන සහ අවසාන පදය නිරූපණය වේ.

(2) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ සඳහන් කර ඇති පදය සොයන්න.

(i) 12, 6, 3, ... ශ්‍රේඪියේ T_5

(ii) 1, 2, 4, 8, ... ශ්‍රේඪියේ T_7

(iii) 9, 3, 1, ... ශ්‍රේඪියේ T_6

(iv) 27, 18, 12, ... ශ්‍රේඪියේ T_6

(v) 4, -12, 36, ... ශ්‍රේඪියේ T_7

(3) පහත සඳහන් එක් එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(i) $T_2 = 4$, $T_5 = 108$

(ii) $T_3 = 6$, $T_7 = 96$

(iii) $T_6 = 8$, $T_9 = 64$

(iv) $T_2 = 6$, $T_5 = 48$

(v) $T_3 = 40$, $T_6 = 625$

(4) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමුවැනි හා දෙවැනි පදවල ඓක්‍යය $\frac{3}{4}$ ද, තුන්වැනි පදය හා හතරවැනි පදවල ඓක්‍යය $\frac{3}{16}$ ද වේ. පොදු අනුපාතය සොයන්න. මෙවැනි ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා පොදු අනුපාතය ධන වන ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියන්න.

(5) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු වැනි පදයේ හා තුන්වැනි පදයේ ඓක්‍යය 20 කි.දෙවන පදය පළමුවැනි පදයට වඩා 4 කින් විශාල වේ.ශ්‍රේඪියේ මුල් පද හතර ලියා දක්වන්න.

(6) පද 4 කින් සමන්විත ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද දෙකේ ඓක්‍යය 8 ද ඉතිරි පද දෙකේ ඓක්‍යය 72 වේ. මේ ආකාරයේ ශ්‍රේඪි දෙකක් ඇති බව පෙන්වා එම ශ්‍රේඪි දෙක ලියා දක්වන්න.

(7) n වන පදය හා (n - 1) වන පදය පිළිවෙළින් 640 සහ 320 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පදය 10 වේ නම් n හි අගය සොයන්න.

16.3 ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය

ධන සංඛ්‍යා දෙකක ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය අපට මෙසේ අර්ථ දැක්විය හැකිය a, b යනු ඕනෑ ම ධන සංඛ්‍යා දෙකක් යැයි සලකමු. එවිට a හා b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $\sqrt{ab}$

නිදසුන 7.

3 , 6 , 12 , 24 , 48 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකමු.

ඉහත අර්ථ දැක්වීමට අනුව 3 සහ 12 යන ධන සංඛ්‍යා අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $\sqrt{3\times12}$ වේ.

එනම්,

3 හා 12 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $=\sqrt{3\times12}$

$$=\sqrt{36}$$

$$=6$$

ඉහත ශ්‍රේඪිය නිරීක්ෂණය කිරීමේදී 6 , 3 සහ 12 අතර පිහිටන බව පැහැදිලි වනු ඇත. එනම් සලකන සංඛ්‍යා දෙක ද , ඒවායෙහි ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය ද , ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි.

a හා b ඕනෑම ධන සංඛ්‍යා දෙකක්ද c යනු a හා b අතර වූ ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය ද නම් a, c හා b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටයි.

125 , 25 , 5 , 1 යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකමු.

125 සහ 5 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $=\sqrt{125\times 5}$

$$=\sqrt{625}$$
$$=\sqrt{25^2}$$
$$=25$$

තවද 125 , 25 හා 5 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ අනුයාත පද තුනකි.

$12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪිය සලකමු.

6 සහ $\frac{3}{2}$ අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $=\sqrt{6\times\frac{3}{2}}$

$$=\sqrt{3\times 3}$$
$$=\sqrt{9}$$
$$=3$$

තවද 6 , 3 හා $\frac{3}{2}$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ අනුයාත පද තුනකි.

දැන් a හා b යනු ඕනෑ ම දී ඇති සංඛ්‍යා දෙකක් වන විට a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටන පරිදි x ට ගැළපෙන අගයයන් සොයමු.

a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද නම් පොදු අනුපාතය සැලකීමෙන් ,

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$$

එනම් $x^2=ab$

$$x=\pm\sqrt{ab}$$

$\therefore$ x හි අගයයන් වනුයේ $+\sqrt{ab}$ හා $-\sqrt{ab}$

$a, \sqrt{ab}, b, \ldots$ ආකාර එක් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ද

$a, -\sqrt{ab}, b, \ldots$ ආකාර තවත් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ද යනුවෙන් අපට ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

සැලකිය යුතුයි.

$\sqrt{ab}$ සෙවීමේ දී, වර්ගමූල ලකුණ තුළ වූ සංඛ්‍යාව ධන සංඛ්‍යාවක් වීම අනිවාර්ය වේ. මේ සඳහා a සහ b සංඛ්‍යා දෙක ම ධන සංඛ්‍යා හෝ එසේ නැතිනම් දෙක ම ඍණ සංඛ්‍යා හෝ විය යුතු ය.

නිදසුන 8.

4, x, 16 යන පද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද ලෙස පිහිටන පරිදි x හි අගය විය හැකි අගයයන් ලබා ගන්න.

ඒ අනුව $\frac{x}{4} = \frac{16}{x}$ වේ.

$$x^2 = 64$$

$$x^2 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

$\therefore$ x හි අගය විය හැකි අගයයන් වනුයේ $+8$ හෝ -8 වේ.

මේ අනුව

4 , 8 , 16 , ... හා $4, -8, 16, \ldots$ ලෙස ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි දෙකක් ලැබේ.

නිදසුන 9.

2 හා 8 යන සංඛ්‍යා දෙක අතරට සංඛ්‍යාවක් යෙදීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද තුනක් ලබා ගන්න.

එම සංඛ්‍යාව x යයි සිතමු එවිට 2, x, 8 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද නිසා ,

$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$ වේ.

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$\therefore$ එම සංඛ්‍යාව ± 4 වේ.

$\therefore$ ශ්‍රේඪිය 2, 4, 8, හෝ 2, -4, 8 වේ.

නිදසුන 10.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද පහක් වන සේ 2, 32 අතර සංඛ්‍යා 3 ක් ලබා ගන්න.

$2, \text{—}, \text{—}, \text{—}, 32$ වේ.

$\therefore T_1 = a = 2 \qquad T_5 = ar^4 = 32$

$$\frac{ar^4}{a} = \frac{32}{2} = 16$$

$$r^4 = 16$$

$$r = \pm 2$$

$\therefore r = +2$ හා $r = -2$ යනුවෙන් පොදු අනුපාතය සඳහා අගයයන් දෙකක් ඇත.

$\therefore r = 2$ විට අදාළ සංඛ්‍යා තුන 4, 8, 16, ... ද

$r = -2$ විට අදාළ සංඛ්‍යා තුන -4, 8, -16, ... ද වේ.

නිදසුන 11.

$-\frac{1}{4}$ සහ 2 සමඟ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සෑදෙන සේ ඒවා අතර සංඛ්‍යා දෙකක් සොයන්න.

මෙහි දී $-\frac{1}{4}, \ldots, \ldots, 2$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් වන සේ හිස්තැනට අදළ සංඛ්‍යා සෙවිය යුතු ය.

$$T_1 = a = -\frac{1}{4} \text{———} (1)$$

$$T_4 = ar^3 = 2 \text{———} (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \text{ න් } \frac{ar^3}{a} = \frac{2}{(-\frac{1}{4})}$$

$$r^3 = 2 \div \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 \times (-4)$$

$$r^3 = -8$$

$$\therefore r^3 = (-2)^3$$

$$r = -2$$

$$\therefore T_2 = ar = -\frac{1}{4}\times(-2) = \frac{1}{2}$$

$$T_3 = ar^2 = -\frac{1}{4}\times(-2)^2 = -\frac{1}{4}\times 4$$

$$= -1$$

$\therefore$ අදාළ සංඛ්‍යා දෙක $\frac{1}{2}$ හා -1 වන අතර එවිට ශ්‍රේඪිය

$-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$ වේ.

16.3 අභ්‍යාසය

(1) 1 හා 64 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යයක් සොයන්න.

(2) $\frac{1}{x^2y^2}$ හා x^2y^2 අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යයක් සොයන්න.

(3) $\frac{1}{8}$ හා 128 අතර පද හතරක් ඇතුළත් කිරීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ලැබේ නම් එම පද හතර සොයන්න.

(4) සංඛ්‍යා දෙකක ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය 12 වේ. එක් සංඛ්‍යාවක් 6 නම් අනිත් සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(5) 0.3 සහ 8.1 අතරට තවත් පද දෙකක් ඇතුළත් කිරීමෙන් ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් ලැබේනම් එම පද දෙක සොයන්න.

(6) $3\frac{3}{4}$ හා 60 අතර පිහිටියාවූ ද එම සංඛ්‍යා දෙක සමඟ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සාදන්නාවූ සංඛ්‍යා තුනක් සොයන්න.

a සහ b ධන සංඛ්‍යා දෙකක් විට a සහ b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය $\sqrt{ab}$ වේ. තව ද a, x, b ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද වන පරිදි x ට ගත හැකි අගයයන් වනුයේ $-\sqrt{ab}$ හා $\sqrt{ab}$ වේ. **මෙම අගයයන් දෙකෙන් $\sqrt{ab}$ a හා b අතර ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යය වේ.**

16.4 ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය (S_n)

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n මගින් දක්වමු.

නිදසුන 12.
පළමු පදය 2 සහ පොදු අනුපාතය 3 වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක

(i) පළමු පද 3 හි ඓක්‍යය සොයන්න.
(ii) පළමු පද 5 හි ඓක්‍යය සොයන්න.
(iii) පළමු පද 8 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

එ නයින් ශ්‍රේඪියේ පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n සඳහා සූත්‍රයක් ගොඩනගන්න.

මෙම ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පද දර්ශක ආකාරයට ලියා දක්වමු.

$2, 2\times3, 2\times3^2, \ 2\times3^3 \ \ldots$

(i) ශ්‍රේඪියේ පළමු පද තුනෙහි ඓක්‍යය S_3 නිසා

$$S_3 = 2 + 2(3) + 2(3^2) \text{———} (1)$$

(1) සමීකරණය පොදු අනුපාතයෙන් එනම් 3 න් ගුණ කරමු.

$$3S_3 = 2(3) + 2(3^2) + 2(3^3) \text{———} (2)$$ ලැබේ.

(2) - (1)

$$3S_3 - S_3 = 2(3^3) - 2 \text{———} (3)$$

(මෙහි දී ශ්‍රේඪියේ මුල් පදය සහ අවසාන පදය පමණක් ඉතිරි වී ඇති බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.)

(3)න්

$$(3-1)S_3 = 2[(3)^3 - 1] = 2(3^3 - 1)$$

$$S_3 = \frac{2(3^3-1)}{(3-1)} \text{———} (A)$$

$$S_3 = 26$$

(ii) මෙසේ ම $S_5 = 2 + 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + (3)^4 \text{———} (1)$

$(1)\times3$ න්

$$3S_5 = 2(3) + 2(3)^2 + 2(3)^3 + 2(3)^4 + 2(3)^5 \text{———} (2)$$

$(2)-(1)$ න්

$3S_5 - S_5 = 2(3)^5 - 2$ ලැබේ.

$S_5(3-1) = 2\left[(3^5)-1\right]$

$\therefore S_5 = \dfrac{2(3^5-1)}{(3-1)}$ ———(B)

$S_5 = \underline{\underline{242}}$

(iii) මෙසේ ම $S_8 = 2+2(3)+2(3)^2+2(3)^3+2(3)^4+2(3)^5+2(3)^6+2(3)^7$

$3S_8 = 2(3)+2(3)^2+2(3)^3+2(3)^4+2(3)^5+2(3)^6+2(3)^7+2(3)^8$

$S_8 = \dfrac{2(3^8-1)}{(3-1)}$ ———(C)

$S_8 = \underline{\underline{6560}}$

ඉහත (A), (B) හා (C) සඳහා ලබාගත් ප්‍රතිඵලවල රටාව අනුව ශ්‍රේඪියේ පළමු n පදවල ඓක්‍යය,

$S_n = \dfrac{2(3^n-1)}{3-1}$ ආකාරයට ලියා දැක්විය හැකි ය.

දැන් අපි සාධාරණ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක් සලකමු.

මුල් පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු n පදවල ඓක්‍යය S_n නම්

$S_n = a + ar + ar^2 + - - - - + ar^{n-1}$ ———(1)

$(1)\times r$,

$rS_n = ar + ar^2 + - - - - ar^{n-1} + ar^n$ ———(2)

(2)-(1) න්

$rs_n - s_n = ar^n - a$ බව ලැබේ.

$S_n(r-1) = a(r^n-1)$

$\therefore S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

පළමු පදය a ද පොදු අනුපාතය r ද වූ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද n හි ඓක්‍යය S_n නම්

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$$

$r > 1$ වන විට $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ ලෙස ද,

$r < 1$ වන විට $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{(1-r)}$ ලෙස ද භාවිත කිරීම ගණනය කිරීම සඳහා පහසු වේ.

නිදසුන 13.

3, 6, 12, ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පළමු පද 6 හි ඓක්‍යය සොයන්න

$$a = 3 \ , \ r = \frac{6}{3} = 2 \ , \ n = 6$$

$r > 1$ නිසා ඓක්‍යය සෙවීම සඳහා

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ භාවිත කරමු.

$$\therefore S_6 = \frac{3(2^6 - 1)}{2-1} = 3(64-1)$$

$$= 3 \times 63$$

$$= \underline{\underline{189}}$$

නිදසුන 14.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක n වෙනි පදය $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ වේ. මෙම ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය හා පළමු පද 8 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

$$T_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$n = 1$ විට ශ්‍රේඪියේ පළමු පදය ලැබේ.

$$\therefore T_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

මෙසේ ම $n = 2$ විට දෙවැනි පදය ලැබේ.

$$T_2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{-2}{1} = -\frac{1}{2}$$

දැන් එකාපය සෙවීම සඳහා

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ භාවිත කරමු. $r < 1$

$$S_8 = \frac{(-\frac{1}{2})\left[1-(-\frac{1}{2})^8\right]}{\left[1-(-\frac{1}{2})\right]}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left[1-(\frac{1}{256})\right]}{(\frac{3}{2})} \qquad = \frac{-\frac{1}{2}\left[\frac{256\text{-}1}{256}\right]}{(\frac{3}{2})}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[\frac{255}{256}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{255}{256}\right) \qquad = -\frac{85}{256}$$

නිදසුන 15.

5, 20, 80 ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ එකාපය 6825 වීමට ගත යුතු පද ගණන සොයන්න

$$a = 5 \text{, } r = 4 \quad S_n = 6825$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \quad , \; r > 1$$

$$6825 = \frac{5(4^n - 1)}{4-1}$$

$$6825 = \frac{5(4^n - 1)}{3}$$

$$\frac{6825}{5} \times 3 = 4^n - 1$$

$$4^n = 4096 = 4^6$$

$$\therefore n = 6$$

16.4 අභ්‍යාසය

(1) $2, 6, 18, 54, \ldots$ යන ශ්‍රේඪියේ පදවල ඓක්‍යය 728 ක් නම් එහි පද ගණන සොයන්න.

(2) 4, 8 , 16 , ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ
   (i) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
   (ii) අට වැනි පදය සොයන්න.
   (iii) පළමු පද අටෙහි ඓක්‍යය සොයන්න.

(3) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද දෙකෙහි ඓක්‍යය 15 වේ. එම ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය 2 වේ. එහි
   (i) පළමු පදය සොයන්න
   (ii) හත් වැනි පදය සොයන්න
   (iii) පළමු පද හතේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(4) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පදය 5 වේ. පොදු අනුපාතය 2 වේ. පළමු පද අටේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(5) 2 , 4 , 8 ... යන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පදවල ඓක්‍යය 1022 නම් එම ශ්‍රේඪියේ පද ගණන සොයන්න.

(6) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක 5 වැනි පදය 8 වේ. 3 වැනි පදය 4 වේ. පළමු පද දහයේ ඓක්‍යය ධන සංඛ්‍යාවක් වේ. මෙම ශ්‍රේඪියේ
   (i) පළමු පදය සොයන්න.
   (ii) පොදු අනුපාතය සොයන්න.
   (iii) පළමු පද දහයේ ඓක්‍යය සොයන්න.

(7) $(x+1), (x+3), (x+7) \ldots$ මෙය ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක අනුයාත පද තුනක් නම් x හි අගය සොයන්න.

(8) සමාන්තර ශ්‍රේඪියක 2 වැනි , 4 වැනි හා 8 වැනි පද තුන ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පළමු පද තුන ලෙස පිහිටයි. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියේ පොදු අනුපාතය සොයන්න.

(9) $(n-6), n, (n+9)$ ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද තුන වේ. n හි අගය සොයා ශ්‍රේඪියේ මුල් පද 7 හි ඓක්‍යය සොයන්න.

(10) යන්ත්‍රයක වටිනාකම වසරකට 10% බැගින් ක්ෂය වෙයි. එහි මුල් වටිනාකම රු.3000 කි. අවුරුදු 6 කට පසු එහි වටිනාකම ආසන්න රුපියලට සොයන්න.

(11) ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද n වල ඓක්‍යය n හි සෑම අගයන්ට ම $3^n - 1$ වේ. ශ්‍රේඪියේ පළමු පද තුන සොයන්න.

(12) පළමුවැනි පදය 81 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{2}{3}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 5 හි එකතුව සොයන්න.

(13) පළමුවැනි පදය 36 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{5}{6}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පද 20 ක එකතුව ලඝු ගණක භාවිතයෙන් සොයන්න.

(14) පළමුවැනි පදය 16 වූ ද පොදු අනුපාතය $\frac{4}{3}$ වූ ද ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක මුල් පද 10 හි එකතුව $16x$ බව පෙන්වන්න. මෙහි x යනු $\frac{4^{10}-3^{10}}{3^9}$ වේ.

ශූන්‍යය, ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪියක පදයක් ලෙස අන්තර්ගත විය හැකි ද?