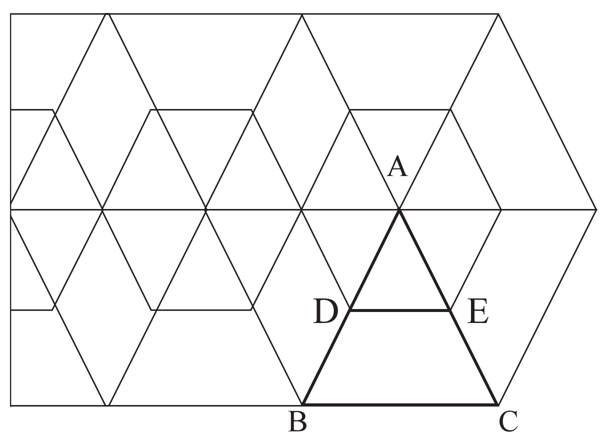
12 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- ත්‍රිකෝණයක පාදයකට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය භාවිතය
- සමකෝණික ත්‍රිකෝණවල අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය භාවිතය

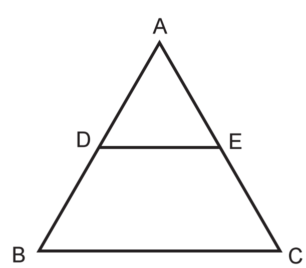
පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි ය.

12.1 ත්‍රිකෝණයක පාද සමානුපාතිකව බෙදීම



ඉහත රූපයේ දක්වා ඇත්තේ ගේට්ටුවකට යොදා ඇති රටාවක කොටසකි. එහි විවිධ තල රූප දක්නට ඇත. මෙම කොටස සඳහා යොදා ගෙන ඇති කම්බි ප්‍රමාණයේ මුළු දිග සෙවීමට අවශ්‍ය යැයි සිතමු. ඒ සඳහා රටාව හොඳින් නිරීක්ෂණය කරන්න.

තද පාටින් ඇඳ ඇති ත්‍රිකෝණය වෙන් කර ඇඳගනිමු.
ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් වන අතර D හා E , පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.



ඔබ මීට ඉහත පාඩමේ දී උගත් ප්‍රමේයය අනුව BC හා DE රේඛා ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

$DE // BC$ හා $DE = \frac{1}{2} BC$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ප්‍රමේයය)

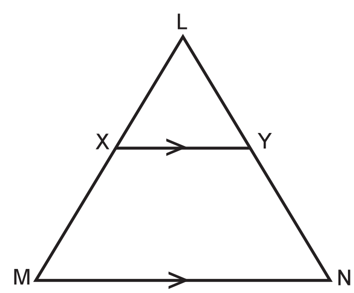
තව ද $\frac{AD}{DB} = 1$ හා $\frac{AE}{EC} = 1$ ද වේ.

එනම් $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

> **ප්‍රමේයය : ත්‍රිකෝණයක පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද සරල රේඛාවකින්, එහි ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ.**

එනම් LMN ත්‍රිකෝණයේ LM මත X ද, LN මත Y ද පිහිටි අතර XY // MN.

$\frac{LX}{XM} = \frac{LY}{YN}$ වේ.



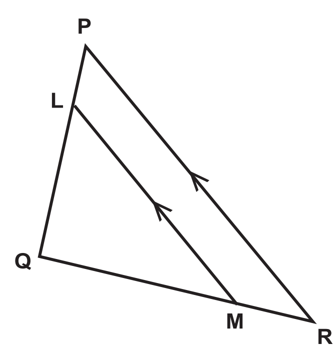
12.1 ක්‍රියාකාරකම

ඉහත ප්‍රමේයය සත්‍යාපනය කිරීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙ හි යෙදෙන්න.

PQR ත්‍රිකෝණය අභ්‍යාස පොතේ තරමක් විශාල ව ඇඳගන්න. PQ මත L ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර L හරහා PR ට සමාන්තර ව LM අඳින්න.

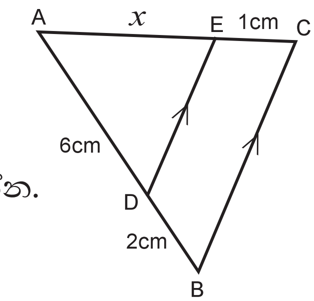
$Q\hat{L}M$ හා $L\hat{P}R$ කෝණ මැනීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් PR හා LM සමාන්තර බව තහවුරු කරගන්න.
දැන් QL , LP , QM හා MR මැනීමෙන්

$\frac{QL}{LP}$ හා $\frac{QM}{MR}$ හි අගයයන් ලබා ගන්න.



මේ ආකාරයට තවත් හැකි පමණ මහා කෝණී සෘජු කෝණී හා සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණ ඇඳ එම ත්‍රිකෝණ සඳහා ප්‍රමේයය සත්‍ය බව පෙන්වන්න.

දැන් මෙම නිදසුන් හොඳින් අධ්‍යයනය කරන්න.



නිදසුන 1.

රූපයේ DE // BC නම් x හි අගය සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ BC // DE

ත්‍රිකෝණයක පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් ඉතිරි පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ යන ප්‍රමේයයට අනුව $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

$$\frac{6}{2} = \frac{x}{1}$$

$$\underline{\underline{x = 3 \text{ cm}}}$$

නිදසුන 2.

රූපයේ AB // QR වේ. x හි අගය සොයන්න.

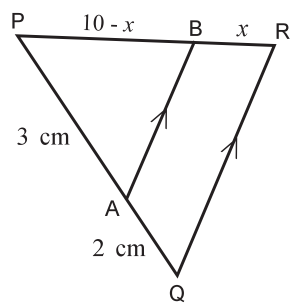
$$\frac{3}{2} = \frac{10 - x}{x}$$

$$3x = 2\,(10 - x)$$

$$3x = 20 - 2x$$

$$5x = 20$$

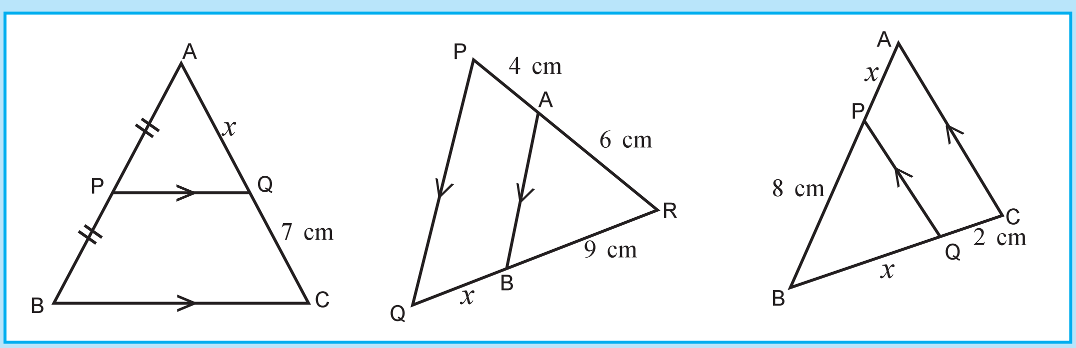
$$\underline{\underline{x = 4 \text{ cm}}}$$

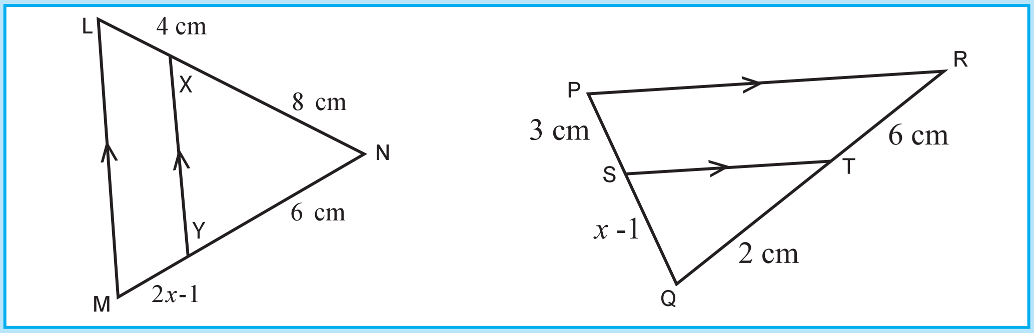


මෙම ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් පහත අභ්‍යාසයන්හි යෙදෙන්න.

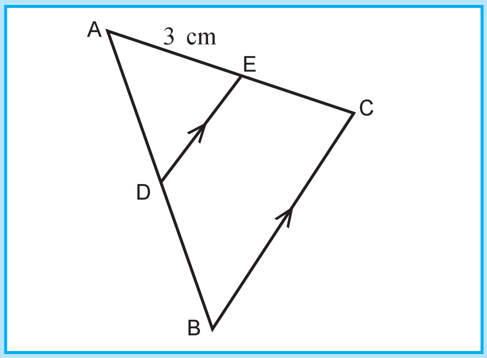
12.1 අභ්‍යාසය

(1) පහත එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ x මගින් දක්වා ඇති රේඛා ඛණ්ඩයේ දිග සොයන්න.

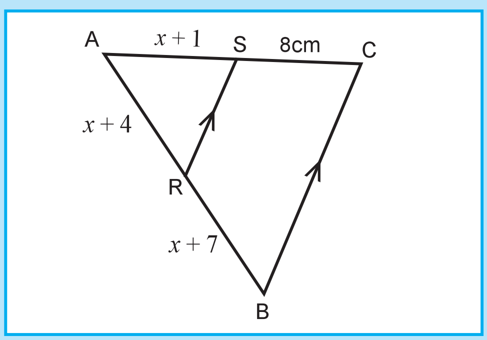




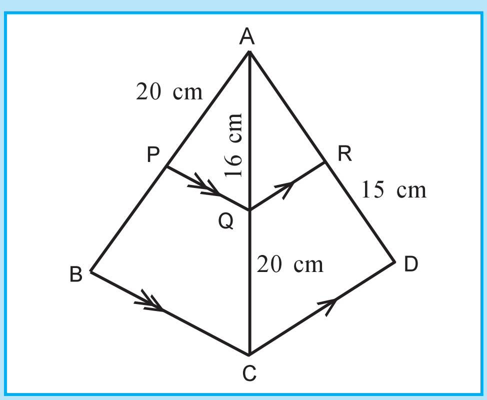
(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = 12 cm , AE = 3 cm, AC = 8 cm වේ. AD සොයන්න.



(3) ABC ත්‍රිකෝණයේ RS//BC වේ. x සඳහා එක ම එක අගයක් පමණක් පැවතිය හැකි බව පෙන්වා එය සොයන්න.

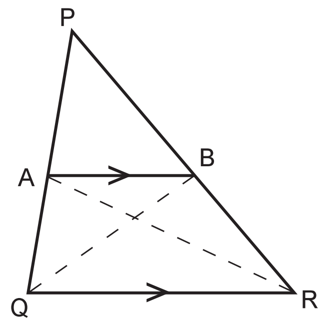


(4) රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව PB සහ AR සොයන්න.



ප්‍රමේයය සාධනය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින ලද රේඛාවෙන් අනෙක් පාද දෙක සමානුපාතික ව බෙදේ.



දත්තය : PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ මත A ලක්ෂ්‍යය ද PR මත B ලක්ෂ්‍යය ද ඇත.
AB//QR

සා.ක.යු. : $\frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BR}$ බව

නිර්මාණය : AR සහ BQ යා කරන්න.

සාධනය : PAB Δ හා ABQ Δ එකම උච්චයක් සහිත බැවින්

$$\frac{PAB\,\Delta}{ABQ\,\Delta} = \frac{PA}{AQ}$$

එසේම PBA $\triangle$ හා BRA $\triangle$ එක ම උච්චයක් සහිත බැවින්,

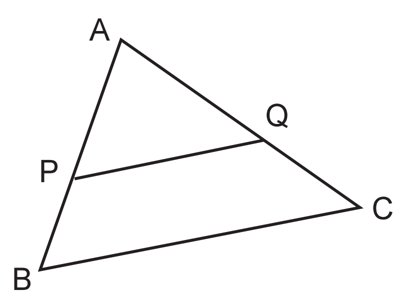
$$\frac{PBA\,\Delta}{BRA\,\Delta} = \frac{PB}{BR}$$

නමුත් ABQ $\triangle$ = BRA Δ (AB ආධාරකය හා AB// QR බැවින්)

$$\therefore\ \frac{PAB\,\Delta}{ABQ\,\Delta} = \frac{PAB\,\Delta}{BRA\,\Delta}$$

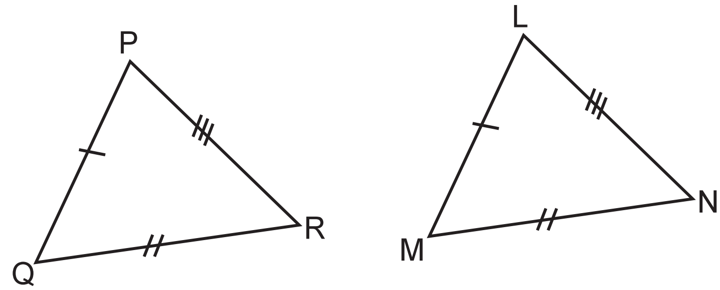
$$\therefore\ \frac{PA}{AQ} = \frac{PB}{BR}$$

ප්‍රමේයයේ විලෝමය : සරල රේඛාවක් ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක් සමානුපාතික ලෙස බෙදයි නම් එම සරල රේඛාව තුන්වැනි පාදයට සමාන්තර වේ.



$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ වේ නම් PQ//BC වේ.

12.2 සමකෝණික ත්‍රිකෝණ



PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ දෙක බලන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙක අංග සම වේ.

∴ PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$$\hat{P} = \hat{L}$$

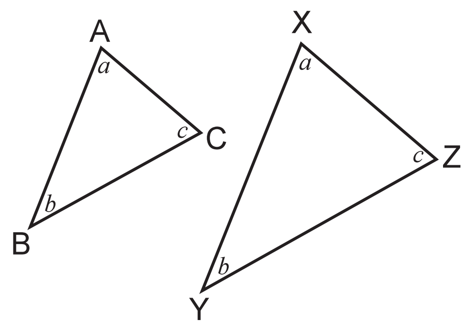
$$\hat{Q} = \widehat{M}$$

$$\hat{R} = \widehat{N}$$ ද වේ.

එක් ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුන තවත් ත්‍රිකෝණයක කෝණ තුනට සමාන නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

PQR හා LMN ත්‍රිකෝණ අංගසම වන අතර ඒවා සමකෝණික ද වේ.
මේ අනුව

අංගසම ත්‍රිකෝණ සැමවිට ම සමකෝණික ද වේ.



ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ දෙක බලන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$$\hat{A} = \hat{X}$$

$$\hat{B} = \hat{Y}$$

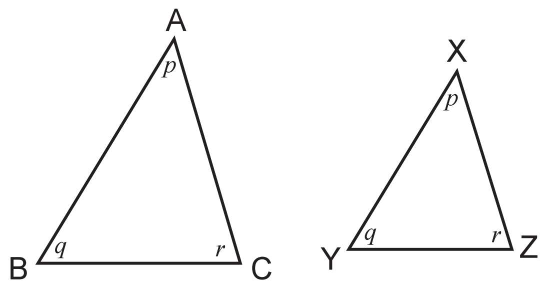
$$\hat{C} = \hat{Z}$$ වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුන XYZ ත්‍රිකෝණයේ කෝණ තුනට සමාන ය.
මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම ද? එසේ නැති බව ඔබට පෙනෙනු ඇත.

එහෙත් මෙම ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ. ඒවා හැඩයෙන් සමාන නමුත් අංගසම නැත.

සමකෝණික ත්‍රිකෝණ සෑම විට ම අංගසම වන්නේ නැත.

ප්‍රමේයය.
සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ.

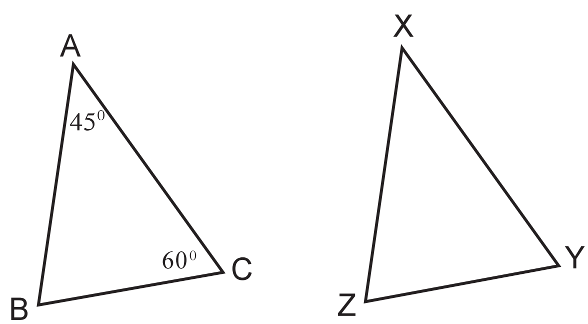


ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ සමකෝණී වේ.

$$\frac{AB}{XY}=\frac{BC}{YZ}=\frac{AC}{XZ}$$

12.2 ක්‍රියාකාරකම

"සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ." යන්න සත්‍යාපනය සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙ හි යෙදෙන්න.



දී ඇති කෝණ දෙකේ විශාලත්ව සහිත ව AC = 4 cm වන ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න.

YZ = 8 cm හා $\hat{Y}=\hat{C}=60^0$ ද $\hat{Z}=\hat{A}=45^0$ ද වනසේ XYZ ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න. ත්‍රිකෝණ එක එකේ ඉතිරි කෝණය මැනීමෙන් ABC හා XYZ ත්‍රිකෝණ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ බව තහවුරු කරගන්න.
දැන් AB , BC පාද ද, XY ද, XZ පාද ද මනින්න.

$\frac{AC}{YZ} = \frac{4}{8}$ බව නිර්මාණයේ දී අපි දනිමු.

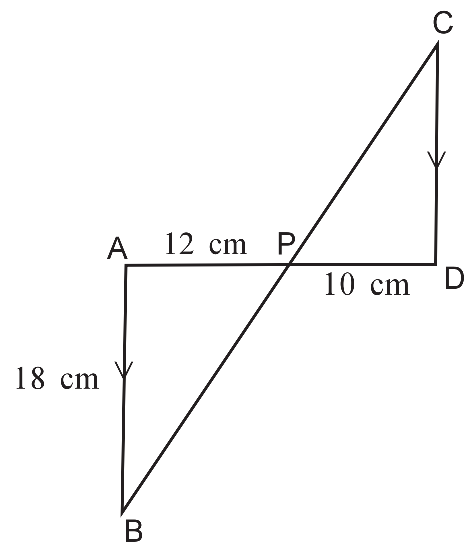
දැන් $\frac{AB}{XZ}$ ද $\frac{BC}{XY}$ ද අගය සෙවීමෙන්

ඉහත ප්‍රමේයයෙන් කියවෙන කරුණු සත්‍ය දැයි පරීක්ෂා කරන්න. විවිධ ආකාරයේ වූ සමකෝණික ත්‍රිකෝණ ඇඳීමෙන් මෙම ප්‍රමේයය තවදුරටත් සත්‍යාපනය කිරීමට උත්සාහ ගන්න.

ප්‍රමේයයේ විලෝමය

ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික නම් ත්‍රිකෝණ දෙක සමකෝණික වේ.

නිදසුන 3.



රූපයේ AB//CD වේ. CD හි දිග සොයන්න.

APB හා PDC $\triangle$ දෙකේ

$A\hat{P}B = C\hat{P}D$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$A\hat{B}P = P\hat{C}D$ (ඒකාන්තර කෝණ AB//CD)

$\therefore B\hat{A}P = P\hat{D}C$ (ත්‍රිකෝණවල ඉතිරි කෝණ)

$\therefore$ APB $\triangle$ හා PDC $\triangle$ සමකෝණික වේ.

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{BP}{PC}$$

AP = 12 cm , PD = 10 cm , AB = 18 cm බැවින්

$$\frac{12}{10} = \frac{18}{CD}$$

$$\therefore CD = \frac{18 \times 10}{12}$$

$$= \underline{\underline{15 \text{ cm}}}$$

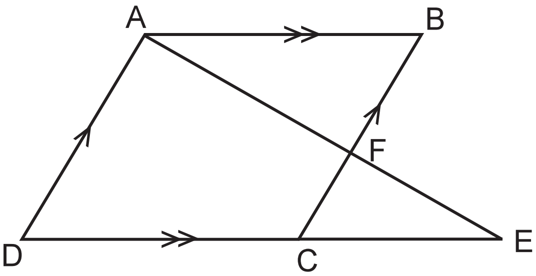
නිදසුන 4.

F යනු ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. දික් කරන ලද AF සහ DC රේඛා E හි දී හමු වේ.

(i) ECF හා ABF ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.

(ii) EC : AB = FC : BF බව පෙන්වන්න.

පළමුව මෙම දත්ත දක්වෙන සේ රූපසටහනක් ඇඳ ගනිමු



දැන් ABF හා ECF ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$A\hat{F}B = C\hat{F}E$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$A\hat{B}F = F\hat{C}E$ (ඒකාන්තර කෝණ, AB//DC)

$B\hat{A}F = F\hat{E}C$ (ඒකාන්තර කෝණ, AB//DC)

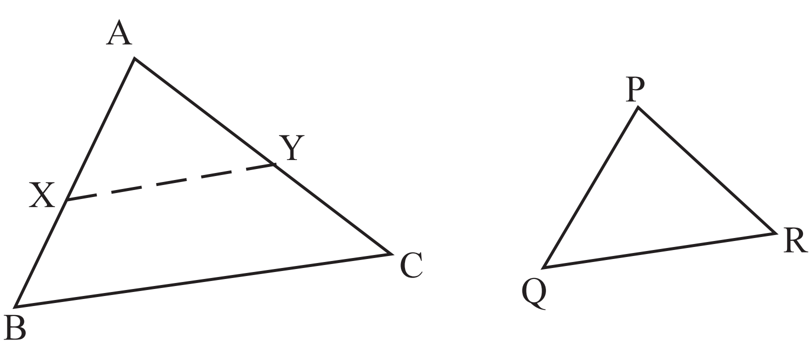
$\therefore$ ABF $\triangle$ හා ECF $\triangle$ සමකෝණික වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයට අනුව

$$\frac{AB}{EC} = \frac{BF}{FC} = \frac{AF}{FE}$$

$\therefore$ EC : AB = FC : BF

සමකෝණික ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමානුපාතික වේ යන ප්‍රමේයය සාධනය කරමු.



දත්තය : ABC , PQR ත්‍රිකෝණ දෙකකි.

$\hat{A} = \hat{P}$ ද $\hat{B} = \hat{Q}$ ද $\hat{C} = \hat{R}$ ද වේ.

සා.ක.යු. : AB: PQ = BC : QR = CA : RP

නිර්මාණය : AX = PQ වන සේ AB මත X ලක්ෂ්‍යය ද
AY = PR වනසේ AC මත Y ලක්ෂ්‍යය ද ලකුණු කරන්න.
XY යා කරන්න.

සාධනය : AXY හා PQR ත්‍රිකෝණ දෙකේ

$\hat{A} = \hat{P}$ (දත්තය)

AX = PQ (නිර්මාණය)

AY = PR (නිර්මාණය)

$\therefore AXY\triangle = PQR\triangle$ (පා.කෝ.පා.)

එබැවින් $A\hat{X}Y = P\hat{Q}R$

එහෙත් $P\hat{Q}R = A\hat{B}C$ (දත්තය)

$\therefore A\hat{X}Y = A\hat{B}C$

මේවා අනුරූප කෝණ බැවින් XY//BC වේ.

$$\therefore \frac{BX}{XA} = \frac{CY}{YA}$$

$$\frac{BX}{XA} + 1 = \frac{CY}{YA} + 1$$ (දෙපසට ම 1 බැගින් එකතු කිරීමෙන්)

$$\frac{BX + XA}{XA} = \frac{CY + YA}{YA}$$

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$$

එහෙත් AX = PQ (නිර්මාණය)

AY = PR (නිර්මාණය)

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

එසේම $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

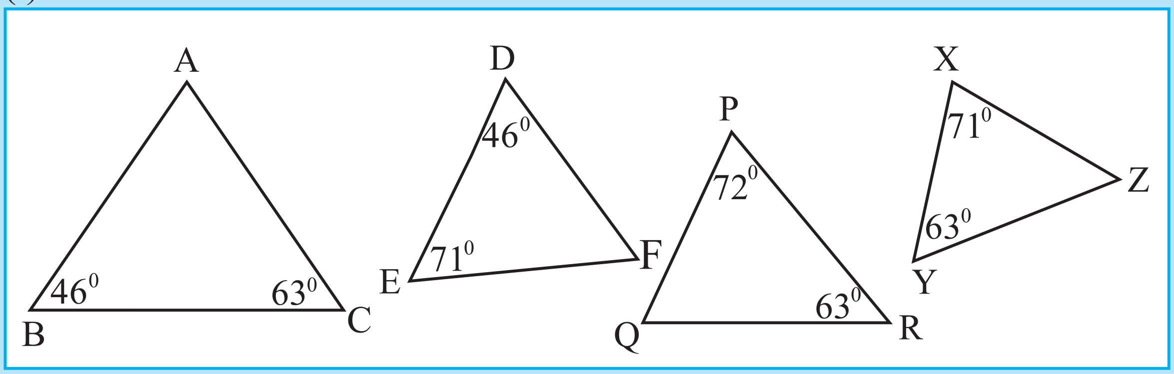
$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

$\therefore$ AB : PQ = BC :QR = CA : RP

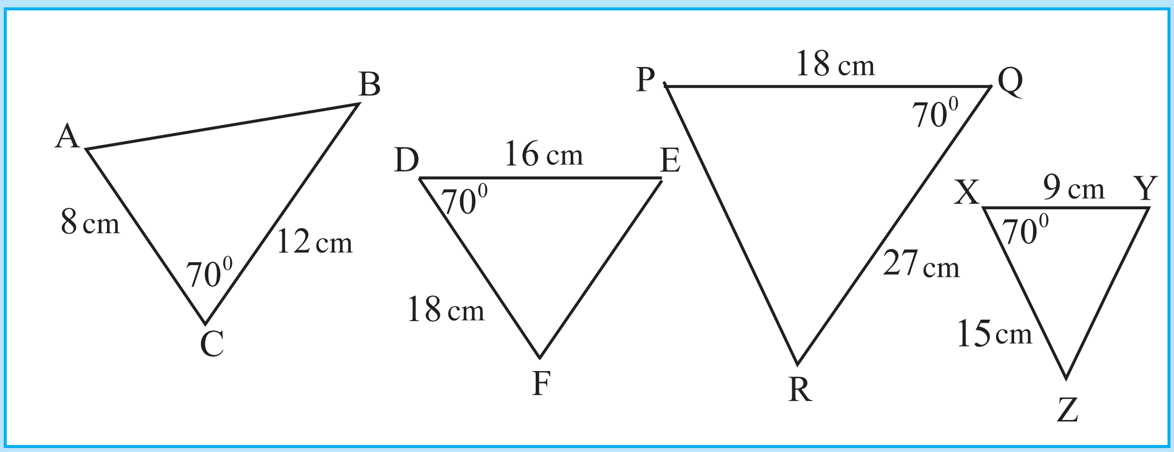
12.3 අභ්‍යාසය

(1) පහත ත්‍රිකෝණ කට්ටල අතුරෙන් සමකෝණික ත්‍රිකෝණ තෝරන්න. ඒවා සමකෝණික බවට හේතු දක්වන්න.

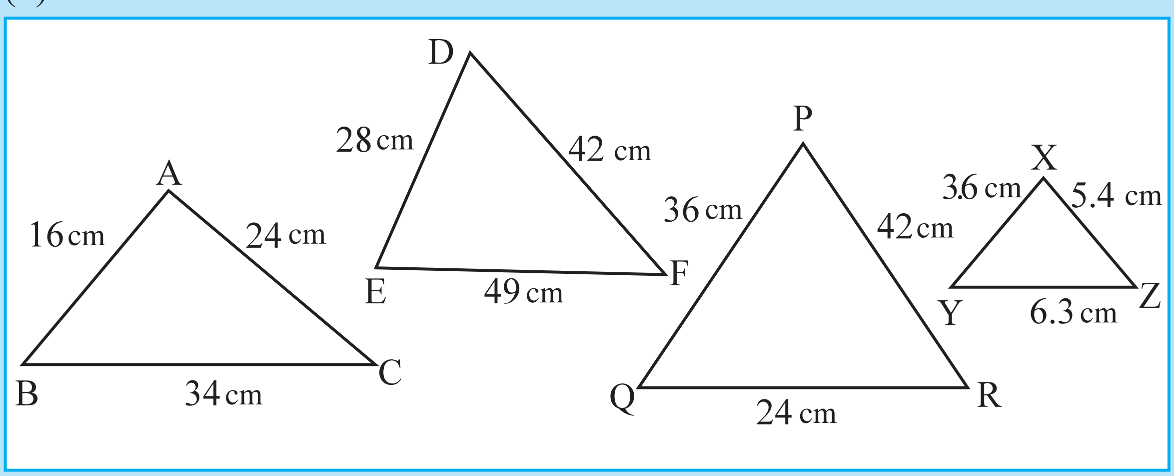
(i)



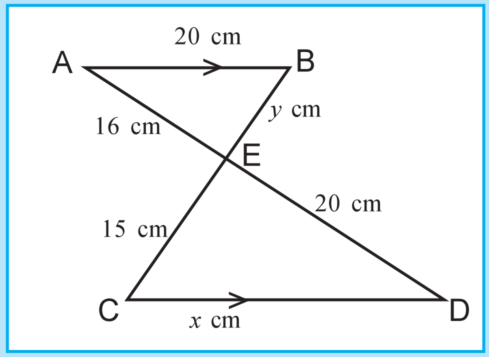
(ii)



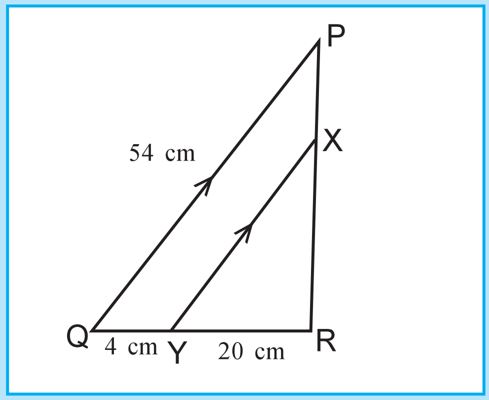
(iii)



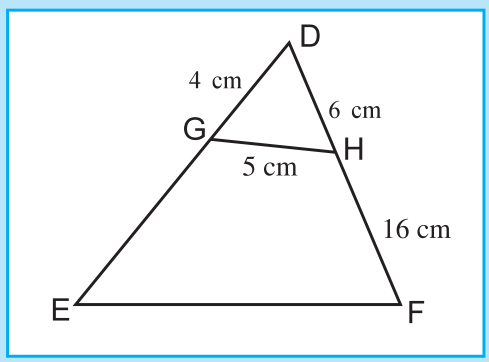
(2) මෙහි AB//CD වේ. AEB හා EDC △ සමකෝණික බව පෙන්වා CD සහ BE සොයන්න.



(3) PQR ත්‍රිකෝණයේ PR = 36 cm වේ. PQ//XY වේ. XY සහ RX සොයන්න.

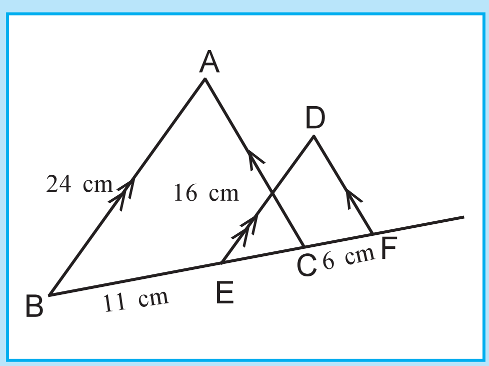


(4) රූපයේ $D\hat{G}H = E\hat{F}D$, නම් DGH හා DFE ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න. GE සහ EF සොයන්න.

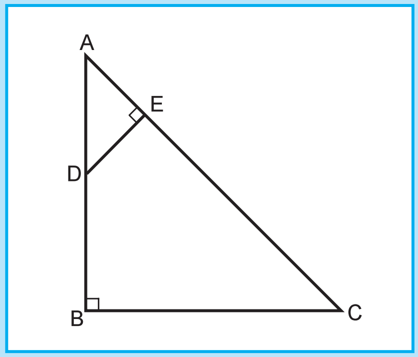


(5) රූපයේ AB//DE , AC//DF වේ.
ABC හා DEF ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව පෙන්වන්න.
EC දිග සොයන්න.

CF = 6 cm BE = 11 cm
AB = 24 cm DE = 16 cm



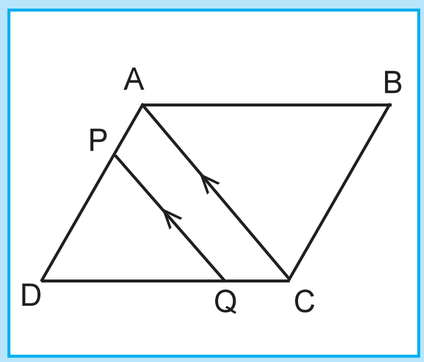
(6) රූපයේ $A\hat{B}C = A\hat{E}D = 90^0$ වේ. AED හා ABC ත්‍රිකෝණ සමකෝණික බව සාධනය කරන්න.
AE : AB = DE : BC බව පෙන්වන්න.



(7) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයේ BD විකර්ණයට A සිට ඇඳි ලම්බය AE වේ.
AD : BD = ED : BC බව සාධනය කරන්න.

(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{A}$ සෘජුකෝණයකි. A සිට BC ට ඇඳි ලම්බය AD වේ.
$AB^2 = BD.BC$ බව සාධනය කරන්න.

(9) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි
AC//PQ වේ.
AB . PQ = AC . DQ බව සාධනය කරන්න.



(10) රූපයේ ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = BC වේ. P හා Q යනු AC මත ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. P හරහා AB ට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාව S හි දී BC හමුවෙයි. Q හරහා CB ට සමාන්තර ව ඇඳි රේඛාවR හි දී PS හමුවෙයි.
AB : AC = PR : PQ බව සාධනය කරන්න.