11 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය
- මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය
- ඉහත ප්‍රමේයයන් මගින් ගැටලු විසඳීම

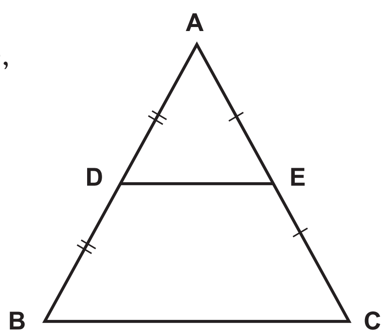
පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබා ගත හැකි වනු ඇත.

ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛා සහ ත්‍රිකෝණයේ පාද අතර සම්බන්ධයක් පවතී. එම සම්බන්ධය හඳුනා ගනිමු.

11.1 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය

ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව ඉතිරි පාදයට සමාන්තර වන අතර, එය දිගින් ඉතිරි පාදයේ දිගෙන් හරි අඩක් වේ.

එනම්,



ABC ත්‍රිකෝණයකි.
D සහ E යනු පිළිවෙළින් AB හා AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

එවිට,

$DE // BC$ සහ $DE = \frac{1}{2} BC$

11.1 ක්‍රියාකාරකම

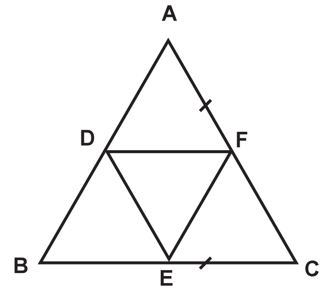
(1) $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm වූ ත්‍රිකෝණය අඳින්න. ඕනෑ ම පාද දෙකක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D සහ E ලකුණු කරන්න. DE යා කරන්න. DE මැනීමෙන් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් DE, ඉතිරි පාදයේ දිග සමග සසඳන්න.

(2) ABCD චතුරස්‍රයක $AB // DC$ සහ $AD // BC$ වේ. ABCD චතුරස්‍රය හඳුන්වන විශේෂිත නම කුමක් ද ?

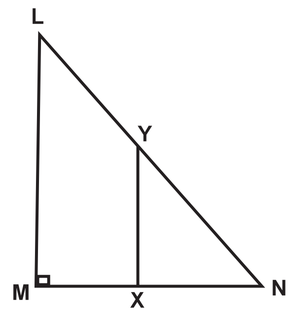
(3) PQRS චතුරස්‍රයේ $PS = QR$ සහ $PS // QR$ වේ. PQRS චතුරස්‍රය හඳුන්වන විශේෂිත නම කුමක් ද ?

11.1 අභ්‍යාසය

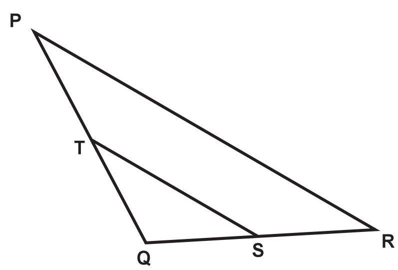
(1)



(i) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = 8 cm, BC = 7 cm සහ AC = 6 cm, AB, BC හා CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E සහ F වේ. DEF ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

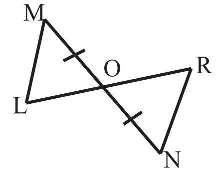


(ii) LMN ත්‍රිකෝණයේ LM = 8 cm, MN = 6 cm සහ $L\hat{M}N = 90^0$ වේ. MN හා LN හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් X හා Y වේ. $Y\hat{X}N$ හි විශාලත්වය සහ YN හි දිග සොයන්න.



(iii) PQR ත්‍රිකෝණයේ, QR හා PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් S සහ T වේ. PR = 24 cm, QR = 13 cm ද, PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 52 cm ද වේ. QT හි හා TS හි දිග සොයන්න.

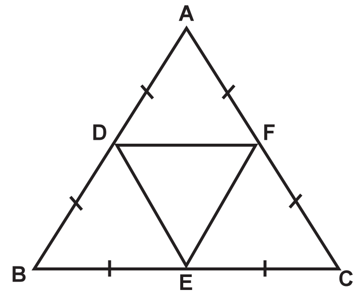
(2)



ඉහත රූපයෙහි LM//NR ද LR හා MN, O හිදී ඡේදනය වන්නේ MO = ON වන ලෙස ය. LMO හා NRO ත්‍රිකෝණ අංගසම බව පෙන්වන්න. එමගින් සමාන වන අනුරූප පාද නම් කරන්න.

නිදසුන 1.

සමපාද ත්‍රිකෝණයක පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යා කිරීමෙන් ලැබෙන ත්‍රිකෝණය ද සමපාද වන බව පෙන්වා දෙන්න.



දත්තය : ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

D, E, F යනු පිළිවෙළින් AB, BC, CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

සා.ක.යු. : DEF Δ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

සාධනය : ABC ත්‍රිකෝණයේ

AD = DB සහ AF = FC (D, F මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore DF = \frac{1}{2} BC$ _ _ _ _ (1) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය - ප්‍රමේයයෙන්)

ABC ත්‍රිකෝණයේ

AD = DB සහ BE = EC (D, E මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore DE = \frac{1}{2} AC$ _ _ _ _ (2) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන්)

ABC ත්‍රිකෝණයේ,

BE = EC සහ AF = FC (E, F මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වන නිසා)

$\therefore EF = \frac{1}{2} AB$ _ _ _ _ (3) (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයෙන්)

නමුත් AB = BC = AC (ABC Δ සමපාද නිසා)

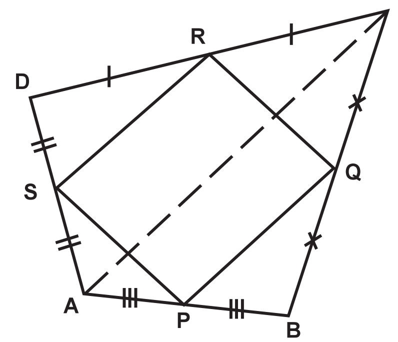
$\therefore$ (1) , (2) සහ (3) න්

DF = DE = EF

$\therefore$ DEF සමපාද ත්‍රිකෝණයකි.

නිදසුන 2.

ABCD චතුරස්‍රයේ AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q, R සහ S වේ. PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



දත්තය : ABCD චතුරස්‍රයේ

AP = PB, CQ = QB

CR = RD සහ AS = SD වේ.

සා.ක.යු. : PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් බව,

නිර්මාණය : A හා C යා කරන්න.

සාධනය : ADC ත්‍රිකෝණයේ ,

AS = SD (S මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

CR = RD (R මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$\therefore SR = \frac{1}{2} AC ---- (1)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

සහ

$SR // AC ---- (2)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

ABC ත්‍රිකෝණයේ

AP = PB (P මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

CQ = QB (Q මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ)

$\therefore PQ = \frac{1}{2} AC ---- (3)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

$\therefore PQ // AC ---- (4)$ (මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය)

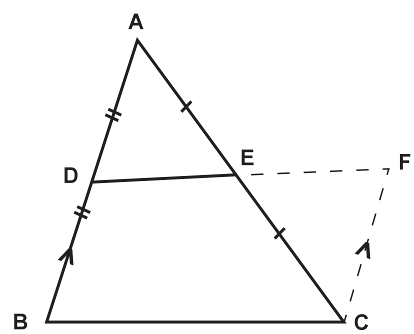
(1) සහ (3) න් , PQ = SR

(2) සහ (4) න් , PQ // SR

∴ PQRS සමාන්තරාස්‍රයක් වේ.

මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය සාධනය

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ
AB හා AC පාදවල
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින්
D සහ E වේ.



සා. ක. යු. : DE // BC සහ

$DE = \frac{1}{2} BC$ බව

නිර්මාණය : දික් කරන ලද DE, F හි දී හමු වන සේ BA ට සමාන්තර ව C හරහා රේඛාවක් අඳින්න.

සාධනය : ADE සහ CEF ත්‍රිකෝණ දෙකේ,

AE = EC (දත්තය)

$A\hat{D}E = E\hat{F}C$ (ඒකාන්තර කෝණ , BA // CF)

$A\hat{E}D = C\hat{E}F$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\therefore ADE\triangle = CFE\triangle$ (කෝ. කෝ. පා.)

$\therefore AD = CF$ සහ $DE = EF$

නමුත් $AD = BD$

$\therefore BD = CF$

BDFC චතුරස්‍රයේ $BD = CF$, $BD // CF$

$\therefore$ BDFC සමාන්තරාස්‍රයකි.

$\therefore DF = BC$ සහ $DF // BC$

නමුත් $DE = EF$ (ඉහත පෙන්වා දී ඇත.)

$$DE = \frac{1}{2} DF$$

$$DE = \frac{1}{2} BC \quad (DF = BC \text{ බව සාධිතය})$$

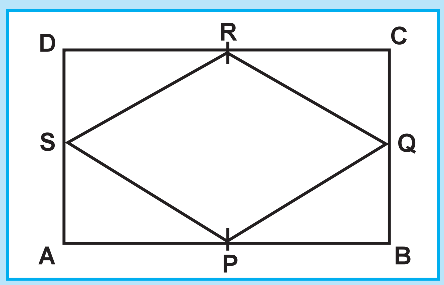
$\therefore DE // BC$ සහ

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

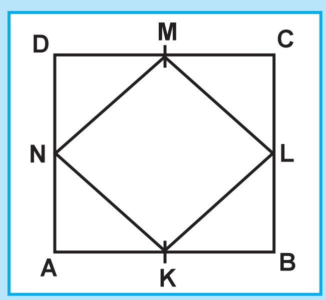
11.2 අභ්‍යාසය

(1) ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයෙහි $AB = BC$ වේ. AB, BC හා CA පාදවල මාධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. PQR$\triangle$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව පෙන්වන්න.

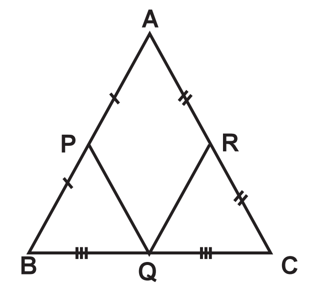
(2) ABCD සෘජුකෝණාස්‍රයකි. P, Q, R, S යනු පිළිවෙළින් AB, BC, CD හා DA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. PQRS රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.



(3) ABCD සමචතුරස්‍රයකි. AB, BC, CD සහ DA පාදයන් හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් K, L, M, N වේ. KLMN සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



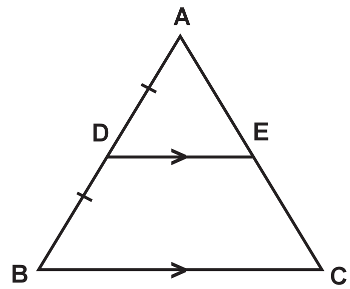
(4) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB = AC වේ. AB, BC සහ CA පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q සහ R වේ. APQR රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න.



11.2 මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තරව අඳින රේඛාවෙන් තුන්වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.
එනම්

ABC ත්‍රිකෝණයේ AD = BD
සහ DE // BC වන විට
AE = EC වේ.

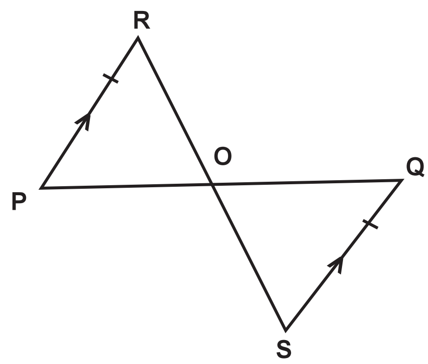


11.2 ක්‍රියාකාරකම

(1) AB = 6 cm , BC = 5 cm , AC = 4 cm වූ ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය D ලකුණු කරන්න. BC ට සමාන්තර ව D හරහා DE රේඛාව අඳින්න. AE හා EC දිග මැන AE හා EC අතර සම්බන්ධය සොයන්න.

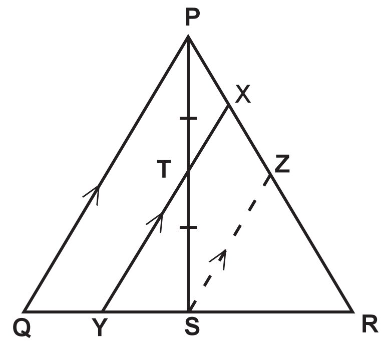
(2) සමාන්තරාස්‍රයක ගුණ සඳහන් කරන්න.

(3) රූපයේ PR // SQ සහ PR = SQ වේ. PQ සහ SR,O හි දී ඡේදනය වේ. POR හා SOQ ත්‍රිකෝණ අංගසම බව පෙන්වන්න. එම ත්‍රිකෝණ දෙකේ අනුරූප පාද යුගල නම් කරන්න.



නිදසුන 3.

PQR ත්‍රිකෝණයේ QR පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය S වේ. PS හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය T වේ. PQ පාදයට සමාන්තර ව T හරහා ඇඳි රේඛාව PR හා QR පාද පිළිවෙළින් X හා Y හි දී ද හමුවේ. $XY = \frac{3}{4}$ PQ බව පෙන්වන්න.



දත්තය : PQR ත්‍රිකෝණයේ

$QS = SR$, $PT = TS$

$QP // YX$,

සා.ක.යු. : $XY = \frac{3}{4}$ PQ බව

නිර්මාණය : QP ට සමාන්තර ව SZ අඳින්න.

සාධනය : PSZ ත්‍රිකෝණයේ

$PT = TS$ සහ

$TX // SZ$ (නිර්මාණය)

$\therefore PX = XZ$ සහ

$TX = \frac{1}{2} SZ$

$TX = a$

එවිට $SZ = 2a$ ---- (1)

PQR ත්‍රිකෝණයේ

$QS = SR$ සහ $QP // SZ$

$\therefore PZ = ZR$ හා $SZ = \frac{1}{2} PQ$

$\therefore SZ = 2a$; $PQ = 4a$ ---- (2)

PQS ත්‍රිකෝණයේ

$PT = TS$ සහ $TY // PQ$

$\therefore QY = YS$ සහ $TY = \frac{1}{2} PQ$

$\therefore PQ = 4a$ $TY = 2a$ ---- (3)

(1) , (2) සහ (3) න්,

$$XY = TX + TY = a + 2a = 3a$$

$$PQ = 4a$$

$$XY = \frac{3}{4} PQ$$

$XY = 3a$
$XY = 3\,\frac{PQ}{4}$
$XY = \frac{3}{4} PQ$

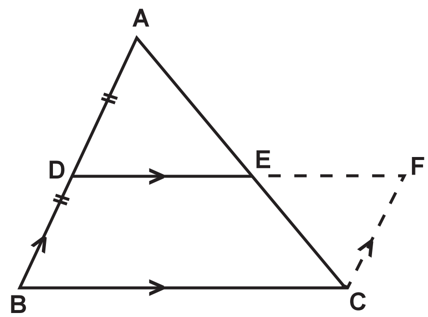
මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයේ විලෝමය සාධනය

ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය හරහා තවත් පාදයකට සමාන්තර ව අඳින රේඛාවෙන් තුන් වැනි පාදය සමච්ඡේද වේ.

දත්තය : ABC ත්‍රිකෝණයේ,

AD = BD සහ

DE // BC



සා.ක.යු. : E යනු AC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය බව (එනම් AE = EC බව,)

නිර්මාණය : දික් කරන ලද DE, F හි දී හමු වන සේ C හරහා BD ට සමාන්තර ව රේඛාවක් අඳින්න.

සාධනය : BCFD චතුරස්‍රයේ ,

BC // DF (දත්තය)

BD // CF (නිර්මාණය)

∴ BCFD සමාන්තරාස්‍රයකි.

BD = CF

නමුත් BD = AD නිසා

∴ AD = CF වේ.

ADE හා CFE ත්‍රිකෝණ දෙකේ

AD = CF

$A\hat{D}E = E\hat{F}C$ (ඒකාන්තර කෝණ AB // CF)

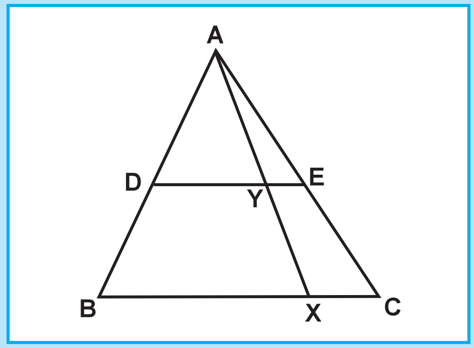
$A\hat{E}D = C\hat{E}F$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

∴ $ADE\triangle = CFE\triangle$ (කෝ. කෝ. පා.)

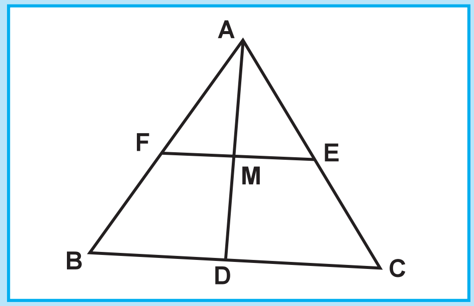
∴ $AE = EC$

11.3 අභ්‍යාසය

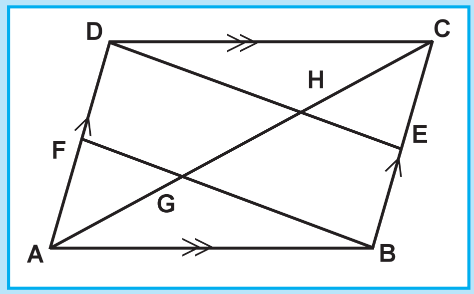
(1) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D සහ E වේ. X යනු BC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AX හා DE, Y හි දී ඡේදනය වේ. AY = YX බව පෙන්වන්න.



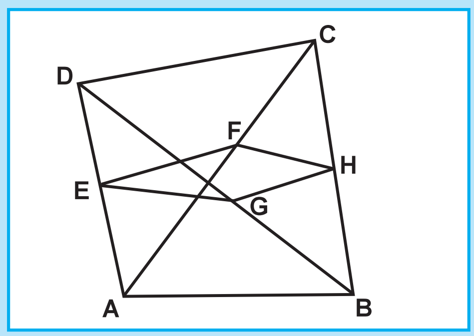
(2) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් D, E සහ F වේ. AD සහ FE, M හි දී ඡේදනය වේ.
   (i) AM = MD බව ද,
   (ii) FM = ME බව ද පෙන්වන්න.



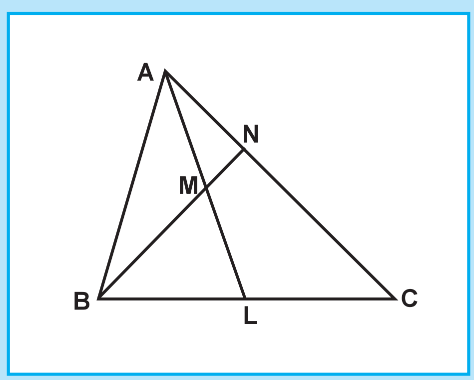
(3) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. BC හා AD පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E සහ F වේ. BF සහ DE රේඛා AC විකර්ණය පිළිවෙළින් G හා H හි දී ඡේදනය කරයි. BF // ED හා AG = GH = HC බව සාධනය කරන්න.



(4) ABCD චතුරස්‍රයේ AB = DC ද AD, AC, BD හා BC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් E, F, G සහ H වේ. EFHG රොම්බසයක් බව සාධනය කරන්න. එ නයින් EH සහ FG එකිනෙකට ලම්බක බව පෙන්වන්න.



(5) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය L වේ. AL පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වේ. දික් කරන ලද BM සහ AC, N හි දී හමු වේ.
$AN = \frac{1}{3} AC$ බව පෙන්වන්න.

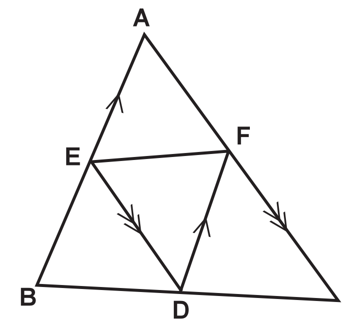


නොමිලේ බෙදා හැරීම පිණිසයි

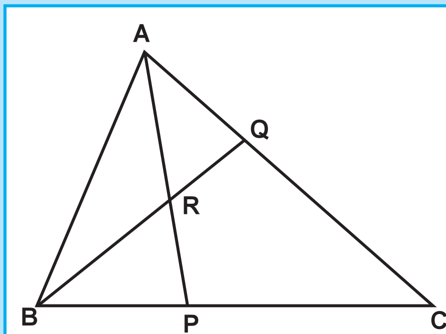
(6) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වේ. BA පාදයට සමාන්තර ව D හරහා අඳින ලද රේඛාවට AC පාදය F හි දී ද, CAට සමාන්තර ව D හරහා අඳින රේඛාවට AB පාදය E හි දී ද හමු වේ.

$EF = \frac{1}{2}$ BC සහ

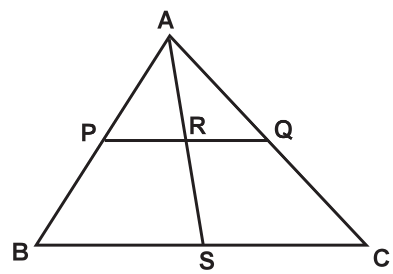
$DE = \frac{1}{2}$ AC බව පෙන්වන්න.



(7) ABC ත්‍රිකෝණයේ BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය P වේ. Q යනු AQ : QC = 1 : 2 වන සේ AC මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. AP සහ BQ, R හි දී හමු වේ. AR = RP බව සහ $RQ = \frac{1}{4}$ BQ බව ද පෙන්වන්න.



(8) ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, AC පාදවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P සහ Q වේ. PQ හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය R වේ. දික් කරන ලද AR ට BC, S හි දී හමු වේ.
BS = SC බව පෙන්වන්න.



(9) ABCD සමාන්තරාස්‍රයකි. CB = BE වන සේ CB පාදය E දක්වා දික් කර ඇත. DE හා AB, G හි දී ඡේදනය වේ. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය G බව සාධනය කරන්න.