02 දර්ශක හා ලඝුගණක I

මෙම පාඩම උගනීමෙන් ඔබට

- පරිමේය දර්ශක සහිත බල සුළු කිරීම.
- ලඝුගණක නීති (බල හා මූල ඇතුළත් ප්‍රකාශන)
- බල හා මූල ආශ්‍රිත ප්‍රකාශන
- බල හා මූල ඇතුළත් සමීකරණ විසඳීම (ලඝුගණක වගු භාවිත නොකර)

පිළිබඳ මනා අවබෝධයක් ලබාගත හැකි වනු ඇත.

දර්ශක සහිත බල ගුණකිරීම හා බෙදීම පිළිබඳ මීට පෙර උගත් කරුණු මතක් කර ගැනීම සඳහා පහත අභ්‍යාසයට පිළිතුරු සපයන්න.

2.1 අභ්‍යාසය

සුළු කරන්න

(1) $x^3 \times x^2 \times x$

(2) $x^4 \times x^2$

(3) $(x^4)^2$

(4) $a^0 \times a \times a^2$

(5) $(ab)^2 \times a^2 \times b^2$

(6) $\dfrac{(3a^2)^3 \times (a^2)^3}{a^5}$

(7) $(p^3q^3)^2 \times p^2 \times q^3$

(8) $(3a^2)^3 \div a^5$

(9) $\dfrac{p^6}{(p^2)^2}$

(10) $\dfrac{2x^2 \times 3x^3}{3x^2 \times 2x^3}$

(11) $\dfrac{x^3 \times x^2}{x^8}$

(12) $\dfrac{2a^0 \times 3a^5}{(2a^3)^2}$

a^0, $(a^0)^1$, $(a^1)^0$ යන ප්‍රකාශ තුනෙහි ම අගය සමාන බව නිමල් පවසයි. ඊට එකඟ වන්නෙහි ද? නැද් ද? යන්න හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

2.1 භාගමය දර්ශක

$$a^8 = a^4 \times a^4 = a^5 \times a^3 = a^6 \times a^2$$
$$a^6 = a^3 \times a^3 = a^4 \times a^2 = a^5 \times a^1$$
$$a^4 = a^2 \times a^2 = a^3 \times a^1$$
$$a^2 = a^1 \times a^1$$

ඉහත බල සාධක දෙකකට වෙන් කර ඇති ආකාරය සලකා බලන්න. එහි වම් පස බලයේ ඇති දර්ශකය සමාන සංඛ්‍යා දෙකකට වෙන් වන සේ දකුණු පස බල දෙකක ගුණිතයක් ලෙස ලියා ඇත.

දර්ශක සඳහා මීට පෙර උගත් සියලු ම නීති, භාගමය දර්ශක සඳහා ද සත්‍ය වේ. එනම්,

m හා n පරිමේය සංඛ්‍යා විට $a^m \times a^n = a^{m+n}$ වේ.

m හා n පරිමේය සංඛ්‍යා විට $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ වේ.

ඉහත පලමු රටාව අනුව පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශනයේ හිස් කොටු තුළ ලිවිය යුතු සංඛ්‍යා මොනවා ද ?

$$a^1 = a^{\square} \times a^{\square}$$

එම කොටු තුළ සමාන භාග ලිවිය හැකි ය. ඉහත පලමු නීතිය අනුව එම භාග දෙකෙහි එකතුව 1 විය යුතු ය.

එවිට $a^1 = a^{\boxed{\frac{1}{2}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{2}}}$

$a = a^{\boxed{\frac{1}{2}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{2}}}$ වෙයි.

එසේ ම මෙය, $a^1 = a^{\boxed{\frac{2}{3}}} \times a^{\boxed{\frac{1}{3}}}$ ලෙස ද ලිවිය හැකි ය.

$$x = x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{7}} \times x^{\frac{4}{7}} \times x^{\frac{2}{7}}$$

2.1 ක්‍රියාකාරකම

ඉහත ආකාරයටම හිස් කොටු තුළ අදාළ භාග හෝ සංඛ්‍යා ලියන්න.

(a) $\mathbf{5 = 5^{\square} \times 5^{\square} = 5^{\square} \times 5^{\square} \times 5^{\square}}$

(b) $\mathbf{2 = 2^{\square} \times 2^{\square} = 2^{\square} \times 2^{\square} \times 2^{\square}}$

(c) $p = p^{\square} \times p^{\square} = p^{\square} \times p^{\square} \times p^{\square}$

(d) $q = q^{\square} \times q^{\square} = q^{\square} \times q^{\square} \times q^{\square}$

2.2 සෘණ දර්ශක ධන දර්ශක බවට පත් කිරීම

$\frac{a^2}{a^5}$ සුළු කරන්න.

මෙය $\frac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a}$ ආකාරයට විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

එවිට $\frac{\cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a \times a} = \frac{1}{a^3}$ පිළිතුර ලෙස ලැබේ.

මෙය $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$ ලෙස දර්ශක නීතිය අනුව සුළු කළ හැකි ය.

එබැවින් $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ වේ.

ඒ අනුව a^{-3} යන්න $\frac{1}{a^3}$ ලෙස ධන දර්ශකයක් සහිත ව ලිවිය හැකි ය.

යම් බලයක පරස්පරය ගත් විට දර්ශකයේ ලකුණ මාරු වේ.
ඒ අනුව

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$ හා $$\frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

නිදසුන 1.

$\sqrt{25^3}$ අගය සොයන්න.

$$\sqrt{25^3} = (25^3)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = (25^{\frac{1}{2}})^3 = (5^{2\times\frac{1}{2}})^3 = 5^3 = \underline{\underline{125}}$$

නිදසුන 2.

$(25)^{0.5}$ අගය සොයන්න.

$$(25)^{0.5} = (25)^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2\times\frac{1}{2}} = \underline{\underline{5}}$$

නිදසුන 3. සුළු කරන්න.

(i) $8^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(16p^4)^{\frac{1}{4}}$ (iii) $(0.027)^{\frac{1}{3}}$

(i) $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}} = \underline{\underline{2}}$

(ii) $(16p^4)^{\frac{1}{4}} = (2^4p^4)^{\frac{1}{4}} = \{(2p)^4\}^{\frac{1}{4}} = (2p)^{4\times\frac{1}{4}} = \underline{\underline{2p}}$

(iii) $(0.027)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{(27)^{\frac{1}{3}}}{(1000)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{1}{3}}}{(10^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{3\times\frac{1}{3}}}{10^{3\times\frac{1}{3}}} = \frac{3}{10} = \underline{\underline{0.3}}$

නිදසුන 4. $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a^3}$ සුළු කරන්න.

$$\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a^3} = (a^2)^{\frac{1}{3}}\times(a^3)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = \underline{\underline{a^{\frac{13}{6}}}}$$

නිදසුන 5. $\sqrt[3]{x^{-2}}$ ධන දර්ශක සහිත ව දක්වන්න

$$\sqrt[3]{x^{-2}} = (x^{-2})^{\frac{1}{3}} = x^{-2\times\frac{1}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}}$$

නිදසුන 6. $81^{-1\frac{1}{4}}$ හි අගය සොයන්න.

$$81^{-1\frac{1}{4}} = 81^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{81^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \frac{1}{(3^4)^{\frac{5}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3^{4\times\frac{5}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3^5} = \underline{\underline{\frac{1}{243}}}$$

$81 = 3^4$

2.2 අභ්‍යාසය

(1) අගය සොයන්න.

(i) $(36)^{\frac{1}{2}}$ (ii) $(64)^{\frac{1}{3}}$ (iii) $(196)^{\frac{1}{2}}$ (iv) $(4p^2q^2)^{\frac{1}{2}}$

(v) $(0.125)^{\frac{1}{3}}$ (vi) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ (vii) $(256x^4)^{\frac{1}{2}}$

(viii) $12^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}$ (xi) $(a^2)^3 \times \sqrt{a^4}$ (x) $(ab^2)^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}}$

(2) සුළු කරන්න.

(i) $(64)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $(729)^{\frac{2}{3}}$ (iii) $\left(\frac{64}{343}\right)^{\frac{2}{3}}$

(iv) $(0.01)^{\frac{1}{2}}$ (v) $(256)^{0.25}$ (vi) $(1000)^{-\frac{1}{3}}$

(vii) $(16)^{-\frac{3}{4}}$ (viii) $(243)^{\frac{-3}{5}}$ (ix) $(0.0001)^{-1\frac{1}{4}}$

(3) $x = 8$ ද $y = 16$ ද නම් පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(i) $x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}$ (ii) $2x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}}$ (iii) $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)^0$

(iv) $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^0$ (v) $\left(\frac{y}{x}\right)^2$

(4) සුළු කර පිළිතුර ධන දර්ශක ලෙස ලියා දක්වන්න.

(i) $10x^{-1}y^3 \times xy$ (ii) $(2a)^{-2} \times 8a^4$

(iii) $(2x)^2 \times \left(\frac{1}{128}\right)^{\frac{1}{7}}$ (iv) $\frac{(2a^{-2})^3 \times (3a^{-4})^2}{12a^{-3} \times 2a^{-2}}$ (v) $\{(3x^{-1})^{-2}\}^{-1}$

(5) සුළු කරන්න.

(i) $\frac{9a^{\frac{4}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}}{2a^{1\frac{1}{2}} \times 3a^{\frac{1}{3}}}$ (ii) $x^{\frac{2}{3}}\left\{\left(x^{\frac{2}{3}} \div x^{\frac{1}{3}}\right) \div x\right\}$ (iii) $\frac{\sqrt{x^3} \times \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[6]{y^{-2} \times \sqrt[4]{x^6}}}$

2.3 දර්ශක සහිත සමීකරණ විසඳීම

නිදසුන 7.

විසඳන්න $3^x = 81$

$$3^x = 81$$

3 හි බලයක් ලෙස 81 ප්‍රකාශ කළ විට

$$3^x = 3^4$$

මෙම සමීකරණයෙහි දෙපස ඇති බලවල පාද සමාන බැවින් දර්ශක ද සමාන විය යුතු ය.

$$\therefore \; x = 4$$

නිදසුන 8.

විසඳන්න. $16^{(x+1)} = 32$

$$16^{(x+1)} = 32$$

16 , සහ 32 , 2 හි බල ලෙස ලිවීමෙන්

$$(2^4)^{(x+1)} = 2^5$$

$$2^{4x+4} = 2^5$$

දෙපස ඇති සංඛ්‍යාවල පාද සමාන බැවින් දර්ශක සමාන කිරීමෙන්

$$4x + 4 = 5$$

$$4x + 4 - 4 = 5 - 4$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

2.3 අභ්‍යාසය

x හි අගය සොයන්න.

(1) $5^x = 125$

(2) $27 = 3^{(-x)}$

(3) $7^{(x-1)} = 49$

(4) $4^x = \frac{1}{4}$

(5) $8^{(x+1)} \times 2^{(x-1)} = 32$

(6) $(4^2)^x \times 8^x = 128$

(7) $8^{(2x-1)} = \frac{1}{64}$

2.4 ලඝුගණක නීති

$$\text{(i)}\ \log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

$$\text{(ii)}\ \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

යන ලඝුගණක නීති පිළිබඳ ඔබ මීට පෙර උගෙන ඇත.

බල සහ මූල සඳහා මෙම නීති යොදා ගන්නේ කෙසේ දැයි බලමු.

$\log_a 2^3$ ප්‍රකාශනය ගත් කළ එය

$\log_a 2^3 = \log_a(2\times2\times2)$ආකාරයට විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

එබැවින් $\log_a 2^3 = \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 2$ වේ.

(ලඝුගණක නීති අනුව)

$\log_a 2^3 = 3\log_a 2$ වේ.

මේ ආකාරයට ම $\log_a x^2$,

$\log_a x^2 = \log_a(x\times x)$ ලෙස විහිදුවා ලිවිය හැකි ය.

$\log_a x^2 = \log_a x + \log_a x$ වේ.

$\log_a x^2 = 2\log_a x$ වේ.

මෙලෙස ම $\log_a (x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x$ වේ.

$\log_a m^r = r\log_a m$ වේ.

r - පරිමේය සංඛ්‍යාවකි.

නිදසුන 9.

$\log_7 343$ හි අගය සොයන්න.

$7^3 = 343$ බැවින්

$$\log_7 343 = \log_7 7^3$$

$$= 3\log_7 7 \quad (\log_7 7 = 1)$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

නිදසුන 10.

$lg \ 0.001$ හි අගය සොයන්න.

> $log_{10}a$ යන්න $lg\, a$ ලෙස ලියා දක්වනු ලැබේ.

$$0.001 = \frac{1}{1000}$$

$$= \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

දෙපසෙහි ම ලඝුගණක සැලකීමෙන්

$$lg \ 0.001 = lg\, 10^{-3} = -3 \ lg\, 10 = -3 \qquad (log_{10}\ 10 = 1)$$

නිදසුන 11.

$lg(100)^{\frac{1}{2}}$ අගය සොයන්න.

$100^{\frac{1}{2}} = (10^2)^{\frac{1}{2}} = 10^{2 \times \frac{1}{2}}$ බැවින්

$$lg\ 100^{\frac{1}{2}} = lg 10$$

$$lg 100^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

lg යනුවෙන් සඳහන් වන්නේ 10 පාදයට ගත් ලඝුගණකය බැව් ඔබ මීට පෙර උගත්තෙහි ය.

2.4 අභ්‍යාසය

අගය සොයන්න.

(1) $log_3 27$

(2) $log_2 256$

(3) $log_4 256$

(4) $log_2 8^3$

(5) $lg 100^5$

(6) $lg 1000^{\frac{1}{2}}$

(7) $log_2 64^{\frac{1}{2}}$

(8) $log_3 81^{\frac{1}{4}}$

> ☞ x සහ y පූර්ණ සංඛ්‍යා දෙකක් දක්වන අතර, $log_3 x = log_2 y$ වේ. $x < 50$. x හි සහ y හි අගය විය හැකි සියලු අගය සොයන්න. ඔබට ලැබුණු අගය ඔබේ මිතුරකුට ලැබුණු අගය හා සසඳන්න.

2.5 ලඝු ආශ්‍රිත ප්‍රකාශනයක අගය සෙවීම

නිදසුන 12.

$log_a 5 + 2log_a 3$ සුළු කරන්න.

$= log_a 5 + log_a 3^2$

$= log_a (5 \times 3^2)$

$= \underline{\underline{log_a 45}}$

නිදසුන 13.

$log_a 6 - log_a 3$ සුළු කරන්න.

$= log_a 6 - log_a 3$

$= log_a \frac{6}{3}$

$= \underline{\underline{log_a 2}}$

නිදසුන 14.

$2lg 5 + lg 4$ අගය සොයන්න.

$2lg 5 + lg 4$

$= lg 5^2 + lg 4$

$= lg (5^2 \times 4)$

$= lg\ 100$

$= lg\ 10^2$

$= \underline{\underline{2}}$

නිදසුන 15.

$\frac{1}{2} lg\ 25 + \frac{1}{2} lg\ 400$ අගය සොයන්න

$\frac{1}{2} lg\ 25 + \frac{1}{2} lg\ 400$

$lg (25)^{\frac{1}{2}} + lg (400)^{\frac{1}{2}}$

$= lg \left(25^{\frac{1}{2}} \times 400^{\frac{1}{2}}\right)$

$= lg\ (5 \times 20)$

$= lg\ 100$

$= lg\ 10^2$

$= \underline{\underline{2}}$

2.5 අභ්‍යාසය

ලඝුගණක භාවිත නොකොට පහත එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය සොයන්න.

(1) $lg\,5 + lg\,2$

(2) $lg\,5 + lg\,20$

(3) $lg\,2000 - lg\,200$

(4) $lg\,16 - lg\,4 + 2\,lg\,5$

(5) $log_2 16 + 2\,log_2 8$

(6) $\frac{1}{2}log_3 81 + log_3 9$

(7) $2log_2 8 - \frac{1}{2}log_2 16$

(8) $lg\,50 + 3\,lg\,2 - 2\,lg\,2$

(9) $\frac{1}{2}lg10000 - 3lg10$

(10) $2lg10 + \frac{1}{3}lg1000 - 3$

(11) $\frac{1}{2}(lg100 + lg64 - lg16 + 2lg5)$

(12) $2\,(lg20 - lg2) + 1$

2.6 ලඝු ආශ්‍රිත සමීකරණ විසඳීම

නිදසුන 16.

$log_a 5 + log_a 2 = log_a x$ විසඳන්න.

$$log_a 5 + log_a 2 = log_a x$$

$$log_a (5 \times 2) = log_a x$$

$$10 = x$$

$$x = \underline{\underline{10}}$$

නිදසුන 17.

$log_a 4 - log_a 8 = log_a x$ විසඳන්න.

$$log_a 4 - log_a 8 = log_a x$$

$$log_a \frac{4}{8} = log_a x$$

$$\frac{1}{2} = x$$

$$x = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

නිදසුන 18.

$lg\,20 + lg\,5 = 2\,lg\,x$ විසඳන්න.

$$lg\,20 + lg\,5 = 2\,lg\,x$$

$$lg\,(20 \times 5) = lg\,x^2$$

$$lg\,100 = lg\,x^2$$

$$100 = x^2$$

$$10 = x$$

$$x = \underline{\underline{10}}$$

නිදසුන 19.

$\frac{1}{2}log_a x \quad = log_a \; 12 - log_a 3$ විසඳන්න.

$$\frac{1}{2}log_a x \quad = log_a \; 12 - log_a 3$$

$$log_a(x^{\frac{1}{2}}) \quad = log_a\left(\frac{12}{3}\right)$$

$$x^{\frac{1}{2}} \quad = 4$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = \; 4^2$$

$$x \; = \; 4^2$$

$$x = \underline{\underline{16}}$$

නිදසුන 20.

$2log_b 3 + 3\,log_b 2 - log_b 72 \; = \; \frac{1}{2}log_b x$ විසඳන්න.

$$2log_b 3 + 3\,log_b 2 - log_b 72 \; = \; \frac{1}{2}log_b x$$

$$log_b 3^2 + log_b 2^3 - log_b 72 \; = \; log_b x^{\frac{1}{2}}$$

$$log_b\left(\frac{3^2 \times 2^3}{72}\right) = log_b(x^{\frac{1}{2}})$$

$$\frac{9 \times 8}{72} \quad = x^{\frac{1}{2}}$$

$$1^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2$$

$$1 \quad = x^1$$

$$x \quad = \underline{\underline{1}}$$

2.6 අභ්‍යාසය

විසඳන්න.

(1) $log_5 \; 125 = x$

(2) $2\,log_a x \quad = log_a \; 49$

(3) $log_a 25 + 2log_a x = 2log_a 50$

(4) $2log_a 4 - log_a 8 + log_a 50 = 2log_a x$

(5) $2lg\,x \quad = 4\;lg\;3$

(6) $log_a x = \frac{1}{2}log_a 144$

(7) $\frac{2}{3}log_a 8 \quad = \frac{1}{2}log_a x$

(8) $log_a x = log_a(2x - 3)$