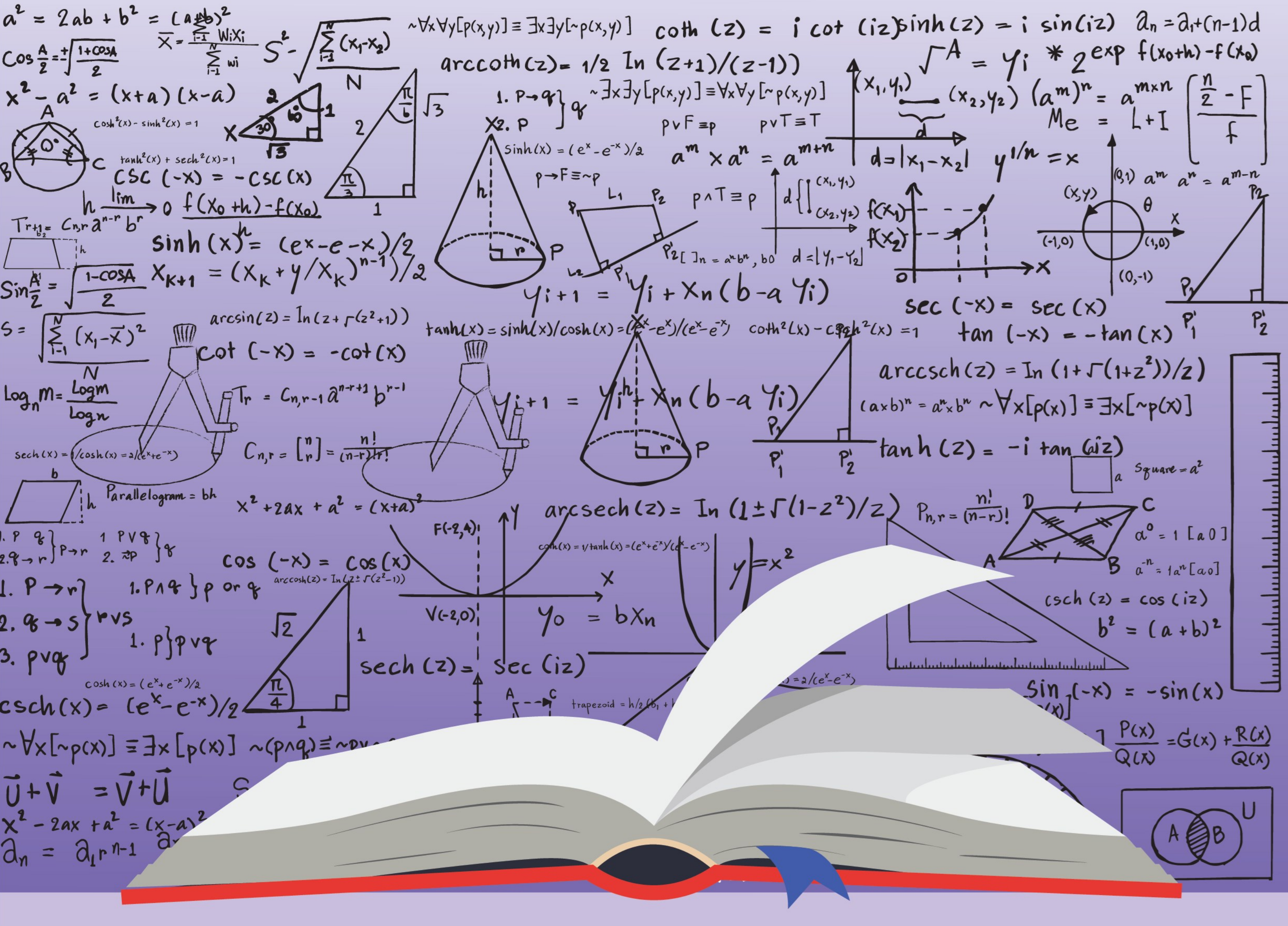
இணைந்த கணிதம்

16.9 பயிற்சிகள்



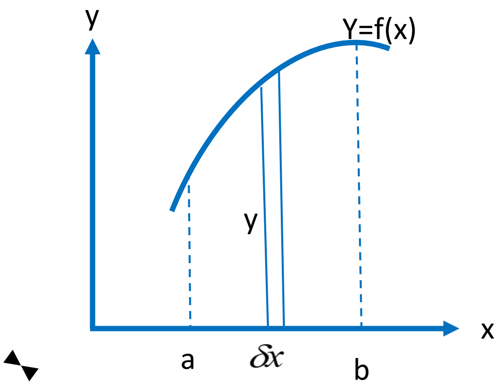
ov.lk

The National e-learning Portal for The General Education

Start Your Learning Journey with e-thaksalawa

கனவளவு

X=a, x=b இற்கிடையில் உள்ள வளையி y=f(x) ஆனது x அச்சுப்பற்றி பூரணமாக சுற்றப்படுகிறது. இதனால் உருவாகும் திண்மத்தின் கனவளவை காண்போம்.



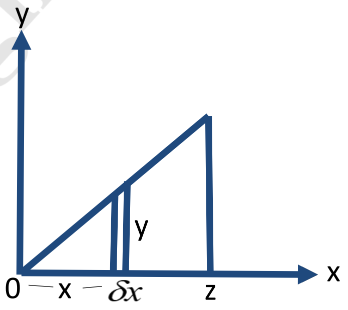
திண்மத்தின் கனவளவு $= \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} \pi y^2 \delta x$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx$$

$$= \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

உதாரணம்

x=0,x=1 இற்கு இடையில் உள்ள நேர்கோட்டுத்துண்டம் y=2x ஆனது x அச்சுப்பற்றி பூரணமாக சுற்றப்படுகின்றது. உருவாகும் திண்மக்கூம்பின் கனவளவு யாது?



கனவளவு $= \int_0^2 \pi y^2 dx$

$$= \int_0^2 \pi (4x^2) dx$$

$$= 4\pi \left[\frac{x3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{3}$$ கனஅலகுகள்

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

தொகையீட்டின் பிரயோகம் பயிற்சிகள் - 01

01 $y=e^{x}, y=e^{-x}$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. ஓ அச்சினாலும் வீச்சு $-1\le x\le 0$ இல் வளையி $y=e^x$ இனாலும் வீச்சு $0\le x\le 1$ இல் வளையி $y=e^{-x}$ இனாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$ என காட்டுக.

02 $Y=2x$, $y=x^2$ ஆகிய இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{4}{3}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக.

03 $Y=2x^2$, $y=2x$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் பரும்படியாக வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

04 $Y=x^2$, $y=-x^2$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. 1ம் காற் பகுதியில் இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

05 $Y=4-x^2$, $y=2+x^2$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

06 $Y=x^2$, $y=4$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

தொகுப்பு:- திரு.மு.ராகுலன், ஆசிரியர், இணைந்த கணிதம் (யா /மகாஜனக் கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு - செல்வி.தே.லக்ஷனா, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச ம.வி)
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

07 $X^2=4y$, $x^2=y^3$ ஆகிய இருவளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. 1ம் காற் பகுதியில் இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

08 $Y=x$, $y=x(2-x)$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{1}{6}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக.

09 $Y=x^2$, $y=9$ ஆகிய வளையிகளாலும் y அச்சாலும் 1ம் கால் வட்டத்தில் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

10 $Y=4x^2$, $y=2x^2+8$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

11 $Y=x^2+1$, $y=2x+1$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{4}{3}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக

12 $2x-3y+4=0$ என்னும் கோடும் $y^2=4x$ என்ற பரவளைவும் P,Q எனும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. பரவளைவின் வில் pq இனாலும் நேர்கோடு pq இனாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{3}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

13

$y=x^3$ என்ற வளையியினாலும் $y=x$ என்ற நேர்கோட்டினாலும் 1ம் காற் பகுதியில் வரைபுற்ற பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

14

$Y=x^2$, $y=2x-x^2$ எனும் வளையிகளினால் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{1}{3}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக

15

$y=1-x2$, $x+y-1=0$ ஆகிய இரு வளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இருவளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பரப்பளவு $\frac{1}{6}$ சதுர அலகுகள் என காட்டுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

தொகையீட்டின் பிரயோகம் பயிற்சிகள் - 02

01 $\int_0^{\pi}(\sin^3 x - \cos^3 x)dx = \frac{4}{3}$ எனக்காட்டுக.

02 $2e^x + 3e^{-x} = A(2e^x - e^{-x}) + B(2e^x + e^{-x})$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் A,B ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\int \frac{2e^x + 3e^{-x}}{2e^x + e^{-x}}dx$ ஐக் காண்க.

03 $\frac{d}{dx}\{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln(x+\sqrt{x2+1})$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து ஐக் $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ காண்க.

04 $\frac{d}{dx}\{e^{2x}(A\sin 3x + B\cos 3x)\} = 13e^{2x}\sin 3x$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக மாறிலிகள் A,B ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\int e^{3x}\sin 3x dx$ ஐக் காண்க.

05 $\frac{d}{dx}\{x + \tan^{-1} x\} = \frac{x}{1+x^2} + \tan^{-1} x$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து $\int \tan^{-1} x dx$ ஐக் காண்க.

06 $\frac{d}{dx}(10^x)$ ஐக் காண்க.

$\int \frac{10^x \ln 10 + 10x^9}{10^x + x^{10}}$ இனைக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

07

$\frac{d}{dx}(2^x)$ ஐக் காண்க. $\frac{d}{dx}(3^x)$ இற்குரிய கோவையை எழுதுக.

$\int \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{2^x + 3^x} dx$ ஐக் காண்க.

08

$\int_0^{\frac{11}{2}} \frac{1}{5 + 4\cos x + 3\sin x} dx = \frac{1}{6}$ எனக்காட்டுக.

09

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5} dx = \frac{1}{12}$ எனக்காட்டுக.

10

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\cos x + 2\sin x + 5} dx$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$ ஐக் காண்க.

11

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + 2\sin x}{1 + \sin x} dx$ ஐக் காண்க.

12

$25\cos x + 15 = A(3\cos x + 4\sin x) + B(-3\sin x + 4\cos x) + c$

ஆக இருக்கத்தக்கதாக மாறிலிகள் A,B,C ஐக் காண்க.இதிலிருந்து

$\int \frac{25\cos x + 15}{3\cos x + 4\sin x + 5} dx$ ஐக் காண்க.

தொகுப்பு:- திரு.மு.ராகுலன், ஆசிரியர், இணைந்த கணிதம் (யா /மகாஜனக் கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு - செல்வி.தே.லக்ஷனா, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச ம.வி)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

13 $(\sin x + \cos x)$ ஏன்பதை $R\cos(x-\alpha)$ எனும் வடிவில் தருக. இங்கு $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, R > 0$

இதிலிருந்து $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx = 1$ எனக்காட்டுக.

14 t=tanx எனும் பிரதியீட்டைப் $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\cos^2 x + 4\sin^2 x + 5} dx$ பயன்படுத்தி ஐக் காண்க.

15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\cos\theta} d\theta = \frac{1}{4}(\ln 3)$ ஏனக்காட்டுக.

$P = \frac{5\sin\theta}{3+5\cos\theta}$ எனின் $\frac{dP}{d\theta} = \frac{16}{(3+5\cos\theta)^2} + \frac{3}{3+5\cos\theta}$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(3+5\cos\theta)^2} d\theta$ ஐக் காண்க

16 $\int_0^k \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$ என்பதன் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தை காண்க. இங்கு a.b.k நேர் ஒருமைகள்.

$\lim_{k \to \alpha} \int_0^k \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{\pi}{2ab}$ என்பதை உய்த்தறிக.

t=tanx எனும் பிரதியீட்டை பயன்படுத்தி $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2ab}$ எனக்காட்டுக.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{a2\cos 2x + b2\sin 2x} dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} dx$ எனக்கொண்டு

$aI + bI = \frac{\pi}{2}$ எனக்காட்டுக.

இதனையும் I,J இன் இன்னோர் ஏகபரிமானச் சேர்மானத்தை பயன்படுத்தி I ஐயும் J ஐயும் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

17 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ எனக்காட்டுக

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x}dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}dx$$ எனக்கொள்வோம்

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ என்பதைப் பயன்படுத்தி I=J எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்தோ வேறுவிதமாகவோ I இன் பெறுமானத்தைக் காட்டுக.

18 $a, b \in / R$ எனவும் $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$

எனவும் கொள்வோம் $aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ எனக்காட்டு bI-aJ ஐக் கருதுவதால் I,J இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

19 $a^2 + b^2 > 1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $a, b \in / R$ எனவும்

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a+\cos x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b+\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}dx$$

எனவும் கொள்வோம். $aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ எனக்காட்டுக.bI-aJ ஐக் கருதுவதால் I,J இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

20

(I) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$ ஐக் காண்க.

(II) $\int \frac{3x+5}{x^2+6x+5}dx$

(III) $\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}dx$

(IV) $\int \frac{6x+5}{4x^2+4x+2}dx$

21 பகுதிப்பின்னமாக்குவதன் மூலம் தொகையிடுக.

(I) $\int \frac{x^2}{x^2-16}dx$

(II) $\int \frac{x^2+3}{x^2(x^2+4)}dx$

(III) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}dx$

(IV) $\int \frac{x^2+3x+4}{(x-1)^2(x^2-1)}dx$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(V) $\int \frac{8x^3 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$

(VI) $\int \frac{(x^2+2)(x^2+3)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

(VII) $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$

(VIII) $\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^2} dx$

(IX) $\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$

(X) $\int \frac{x2}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} dx$

22 $\int_0^2 |2x-1| dx = \frac{5}{2}$ எனகாட்டுக.

23 $x^3 = \lambda(x-1)(4x^2+4x+2) + \mu(8x+4) + \gamma$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் λ, μ, γ

ஐக் காண்க இதிலிருந்து $\int \frac{x^3}{4x^2+4x+2} dx$ ஐக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

24

$\dfrac{12+8x-x^2}{(2-x)(4+x^2)}$ பகுதிப்பின்னங்களாகத் தருக. இதிலிருந்து

இதிலிருந்து $\displaystyle\int_0^1 \frac{12+8x-x^2}{(2-x)(4+x^2)}dx = \ln\left(\frac{25}{2}\right)$ எனக்காட்டுக.

$28+3x^2-2x^3 = \lambda(12+8x-x^2)+\mu(2-x)(4+x^2)$ ஆகுமாறு மாறிலிகள் λ, μ, γ

ஐக் காண்க இதிலிருந்து $\displaystyle\int_0^1 \frac{28+3x^2-2x^3}{(2-x)(4+x^2)}dx$ ஐக் காண்க.

25

(I) $\dfrac{d}{dx}\left\{\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}\right\} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

(II) $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ ஐக் காண்க.

மேலேயுள்ள முடிவுகளைப் $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$ ஐக் காண்க.

26

(I) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(II) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ ஐக் கண்டு இதிலிருந்து $\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

மேற்குறித்த தொகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி $\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ ஐக் காண்க.

27 $I_n = \int \tan^n \theta d\theta$ எனின் $I_n = \frac{1}{(n-1)} I_{n-1} - I_{n-2}$ எனக்காட்டுக

இதிலிருந்து $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 \theta d\theta$ ஐக் காண்க

28 x நேர் முழு எண்ணாக பகுதியாக தொகையிடல் மூலம் $I_n = \int x^3 (\ln x)^n dx$

எனின் $4I_n = x^n (\ln x) - nI_{n-1}$ இதிலிருந்து

$\int x^3 (\ln x)^3 dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

29 $n \neq -1$ இற்கு பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int x^n (\ln x) dx$ ஐக் காண்க.

$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$ ஐப் பெறுமானம் கணிக்குக..

30

(I) $\int_0^1 x^2 e^{2x+3} dx$ ஐ தொகையிடுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(II) $\int x^2 e^{ax} dx = \frac{1}{a^3}\left\{e^a(a^2 - 2a - 2) - 2\right\}$ எனக்காட்டுக.

31 பகுதிகளாக தொகையிடுக.

(I) $\int x(\ln x)^2 dx$

(VI) $\int x \tan x \sec^2 x dx$

(II) $\int x^3 \tan^{-1} x dx$

(VII) $\int x \tan^2 x dx$

(III) $\int x \tan^{-1} x dx$

(VIII) $\int x \cos^2 x dx$

(IV) $\int x \sec^2 x dx$

(IX) $\int x \sin^3 x dx$

(V) $\int x \sin x \cos x dx$

(X) $\int x \sin^3 x \cos x dx$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

32 பொருத்தமான பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் பகுதிகளாக தொகையிடுக.

(i) $\int x\sin^{-1} x\,dx$

(ii) $\int x^2 \sin^{-1} x\,dx$

(iii) $\int_0^{\frac{1}{18}} \frac{x\sin^{-1}(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(iv) $\int_0^1 (\sin^{-1} x)^2\,dx$

33 $\int e^x\{f(x)+f^1(x)\}dx = e^{f(x)}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து

(i) $\int e^x(\sin x+\cos x)dx$

(ii) $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$

(iii) $\int \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}dx$

(iv) $\int e^x\{\ln(\sec x+\tan x)+\sec x\}$ என்பவற்றைக் காட்டுக.

தொகுப்பு:- திரு.மு.ராகுலன், ஆசிரியர், இணைந்த கணிதம் (யா /மகாஜனக் கல்லூரி)
கணினி வடிவமைப்பு - செல்வி.தே.லக்ஷனா, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச மவி)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

34 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{(1+x)^2}$ எனக்காட்டுக மேலும் பகுதிகளாகத் தொகையிடல் மூலம்

$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ ஐக் காண்க.

35 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ எனக்காட்டுக. இதனைப் பயன்படுத்தி கீழேயுள்ள தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^k x}{\sin^k x+\cos^k x}dx$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x}+\sqrt{\tan x}}dx$$

(iii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^2 x dx=\frac{\pi}{32}$$

(iv) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)d\theta$$

(v) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\tan x+\sqrt{3})dx=\frac{\pi}{6}\ln 2$$

தொகுப்பு:- திரு.மு.ராகுலன், ஆசிரியர், இணைந்த கணிதம் (யா /மகாஜனக் கல்லூரி)
கணினி வடிவமைப்பு - செல்வி.தே.லக்ஷனா, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (யா/சங்கானை சிவப்பிரகாச ம.வி)
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

36 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ எனக்காட்டுக. இதனைப் பயன்படுத்தி கீழேயுள்ள தொகையீடுகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(I) $\int_4^7 \frac{(11-x)^2}{x^2+(11-x)^2}dx$

(II) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan x}dx$

(III) $\int_2^6 \frac{\ln x}{\ln(8x-x2)}dx$

37 பகுதிகளாகத் தொகையிடுக.

(i) $\int x^2 \ln(1+x^2)dx$

(ii) $\int_0^1 x^2(1-x)^{\frac{1}{3}}dx$

(iii) $\int \sin(\ln x)dx$

(iv) $\int \sin\sqrt{x}dx$

(v) $\int x^3\cos(x^2)dx$

(vi) $\int x^3 e^{x^2}dx$

(vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

(viii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{4x}\left(\frac{4+\tan x}{\cos x}\right)dx$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(ix) $\int_{e}^{0} \sin 2x \ln(\cos x)dx$

(x) $\int_{1}^{e} x^{\frac{3}{2}}(\ln x)dx$

(xi) $\int_{0}^{1} \ln(1+x)^{(1+x)}\, dx$

(xii) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)dx$

38

(I) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் குறையைப் பயன்படுத்தி $\int_{0}^{4} \frac{x^2+x}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{58}{5}$ எனக்காட்டுக.

(II) பகுதிகளாகத் தொகையிடும் குறையைப் பயன்படுத்தி

$$3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x dx$$ எனக்காட்டுக.

(III) $I = \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \cos x dx, J = \int_{0}^{\pi} e^{-2x} \sin x dx$ ஏனின் I=2J எனவும்

$J = 1 + e^{-2\pi} - 2I$ எனவும் காட்டுக.இதிலிருந்து I,J இன்

பெறுமானங்களைக் காண்க.

(IV) $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin(\ln x)dx, J = \int_{\alpha}^{\beta} \cos(\ln x)dx$ என்க.

$I + J = \beta\sin(\ln\beta) - \alpha\sin(\ln\alpha)$ எனக்காட்டுக.J-I ஐ காண்பதன் மூலம்

.J-I இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(V) $I = \int_{1}^{e^{\pi}} x\sin(\ln x)dx, J = \int_{1}^{e^{\pi}} x\cos(\ln x)dx$ எனின்

பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையை பயன்படுத்தி J,I இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(VI) பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int_{0}^{1} 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ ஐக் காண்க.

39 $\int_{0}^{\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(\pi - x)dx$ எனக்காட்டுக.

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$ எனக்காட்டுக.

இதிலிருந்து

$\int_{0}^{\pi} x\sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனக்காட்டுக.

40 $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (a - x)dx$ எனக்காட்டுக.

பகுதிகளாக தொகையிடுவதன் மூலம் மேலே உள்ள முடிவை பயன்படுத்தி

$\int_{0}^{\pi} \frac{x^2\cos x}{(1+\sin x)^2}dx = 2\pi - \pi^2$ எனக்காட்டுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

41

(a) பகுதிகளாக தொகையிடும் முறையைப் பயன்படுத்தி $\int_{1}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ எனக்காட்டுக.

(b) $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(a-x)dx$ எனக்காட்டுக. a-மாறிலி

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ எனவும்

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}dx$$ எனவும் கொள்க.

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}dx$$ எனக்காட்டுக.

மேலேயுள்ள முடிவுகளைப் பயன்படுத்தி $I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}dx$ எனக்காட்டி.

$I = \frac{1}{64}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ என்பதை பெறுக.

42

$\int_{0}^{\pi} x(f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi^2}{4}$ எனவும்

$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}(\pi-2)$ எனவும் காட்டுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

43

(i) $A = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x}\,dx \qquad B = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 e^x}{1+e^x}\,dx$ எனின்

எனின் A=B எனக்காட்டி A பெறுமானத்தை காண்க. (y= -x இடுக)

(ii) a>0 எனின் $\frac{d}{dx}(a^x)$ ஐக் கண்டு $\int_0^c \frac{a^x}{a^x+1}\,dx$ ஐப் பெறுமானம் காண்க.

$0 < c \le \frac{\pi}{2}$ ஆயிருக்க $I = \int_{-c}^{c} \frac{\cos x}{1+a^x}\,dx \quad J = \int_{-c}^{c} \frac{a^x \cos x}{1+a^x}\,dx$

எனின் t= - x எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி I=J எனக்காட்டுக

I+J ஐக் கணிக்குக.

(ii) $\int 2^x\,dx$ ஐக் காண்க. இதிலிருந்து $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\,dx$ ஐக் காண்க.

44

$x^2 = \lambda(x^2+2x+2) + \mu(x+1)$ ஆகுமாறு λ எனும் μ மெய்மாறிகளை துணிக.

(i) $\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx$ ஐக் காண்க.

(ii) $\int x\tan^{-1}(x^2+1)\,dx$ ஐக் காண்க.

45

$\frac{d}{dx}\{\ln(\sec x + \tan x)\} = \sec x$ எனக்காட்டுக. $\int x\sin x\,dx$ ஐக் காண்க.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x \ln(\sec x + \tan x)\,dx$ ஐக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

46

பிரதியீட்டுத் தொகையீடு

(i) $\displaystyle\int_{11}^{23} \frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}\,dx \qquad t=\sqrt{2x+3}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+e^{x})(1+e^{-x})}\,dx \qquad t=e^{x}$

(iii) $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{1}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx \qquad t=x^{\frac{1}{3}}$

(iv) $\displaystyle\int_{1}^{8} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}}\,dx \qquad t=x^{\frac{1}{3}}$

(v) $\displaystyle\int_{1}^{64} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}\,dx \qquad t=x^{\frac{1}{6}}$

(vi) $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}-1\right)dx \qquad t=x^{\frac{1}{2}}$

(vii) தக்க பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தை காண்க.

இதிலிருந்து $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{\frac{1-x^{2}}{x^{2}}}\,dx$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக. $x=\sin^{2}\theta$

(viii) $\displaystyle\int_{a}^{b} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx \qquad x=a\cos^{2}\theta+b\sin^{2}\theta$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(ix) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$ $\quad x = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

(x) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $\quad x = 2\sin\theta$

47 பிரதியீட்டுத் தொகையீடு

(i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$ $\quad x = a\sec\theta$

(ii) $\int \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ $\quad x = a\sin\theta$

(iii) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ $\quad x = a\cos 2\theta$

(iv) $\int_0^a \sqrt{2ax-x^2}\,dx$ $\quad x - a = a\sin\theta$

(v) $\int_0^2 \sqrt{x(4-x)}\,dx$ $\quad x = 4\sin^2\theta$

(vi) $\int \sin^{\frac{4}{3}} x\cos^5 x\,dx$ $\quad t = \sin x$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(vii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}\,dx$ $\quad t = \sin x$

(viii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)(3+\sin x)}\,dx = \frac{5}{2}(\ln 2) - \frac{3}{2}(\ln 3)$ $\quad t = \sin x$

(ix) $\int_{-1}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ $\quad t = \sqrt{x^3+1}$ or $t = x^3$

(x) $\int_{0}^{1} \frac{\ln|1+x|}{(1+x^2)} = \frac{\pi}{8}(\ln 2)$ $\quad x = \tan\theta$

48 பிரதியீட்டுத் தொகையீடு

(i) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \frac{\pi}{2}$ $\quad x = \sec\theta$ or $x = \frac{1}{t}$

(ii) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\quad x = \sec\theta$ or $x = \cos\theta$

(iii) $\int (x+1)(x+3)^5\,dx$ $\quad t = x+3$

(iv) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$ $\quad t = x^3$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(v) $\int \frac{1}{\sin x+\sin 2x}dx \qquad t=1+2\cos x$

49 0<a<b எனக்கொள்வோம்.

$$\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x\right)\right\}=\frac{\sqrt{b-a}\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}$$ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்து

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{a\cos^2 x+b\sin^2 x}}dx$$ ஐக் காண்க.

50

(a) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2}$ ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாக எடுத்துரைக்க இதிலிருந்து.

$$\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாக தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int xe^{-x}dx$

கண்டு இதிலிருந்து $y=xe^{-x}$ இனாலும் $x=1, x=2, y=0$ எனும்

நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக்

காண்க

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

(b) c>0 எனவும் $I=\int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2}dx$ எனக்காட்டுக.

பிரதியீடு $x = c\tan\theta$ ஐப் பயன்படுத்தி $I=\frac{\pi}{4c}\ln c+\frac{1}{c}J$ எனக்காட்டுக.

இங்கு $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)d\theta$ a என்பது மாறிலியாக இருக்கும்

$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)$ ஐப் பயன்படுத்தி $J=\frac{\pi}{8}\ln 2$ எனக்காட்டுக.

$I=\frac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ என்பதை உய்த்தறிக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk