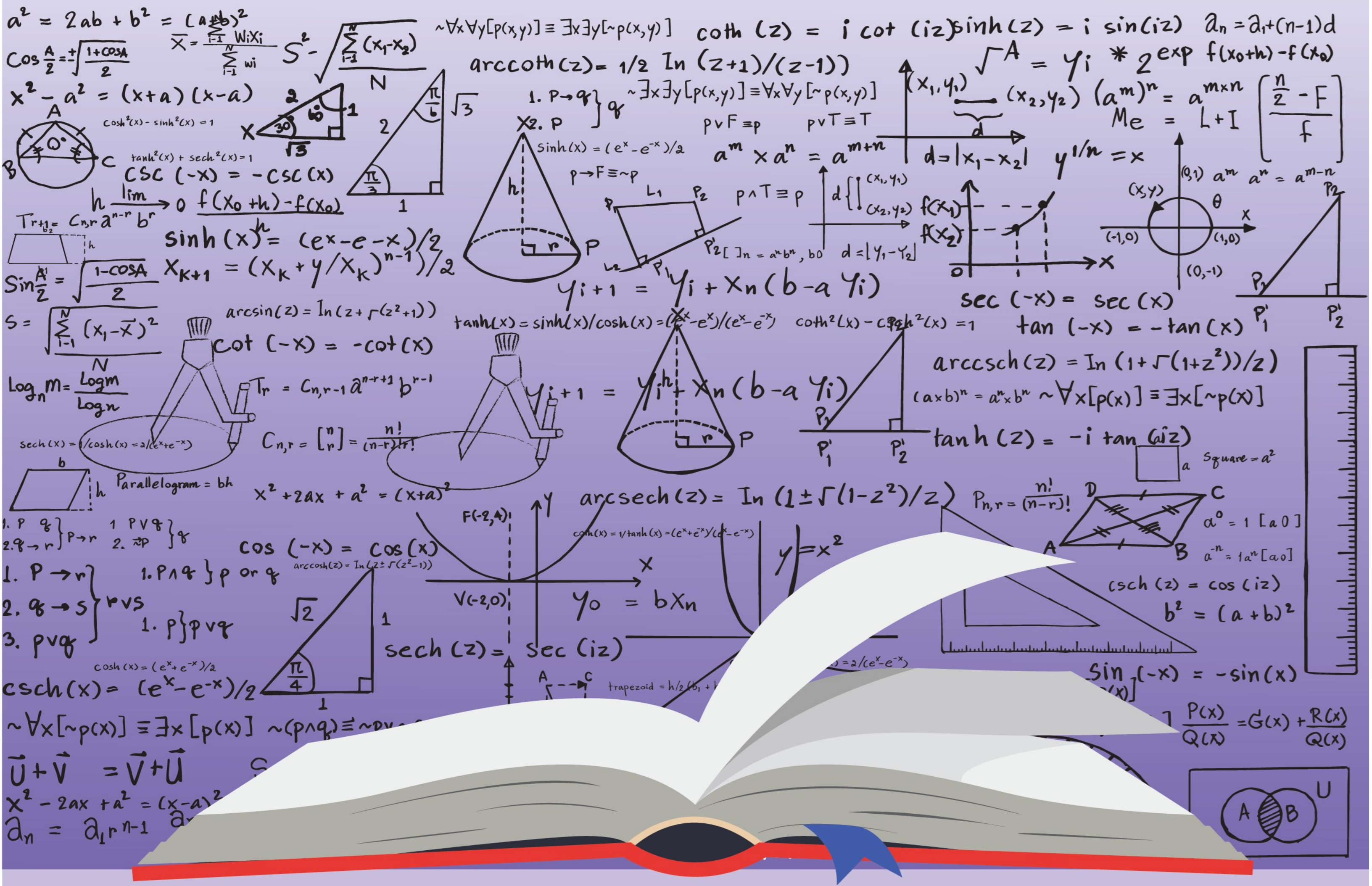
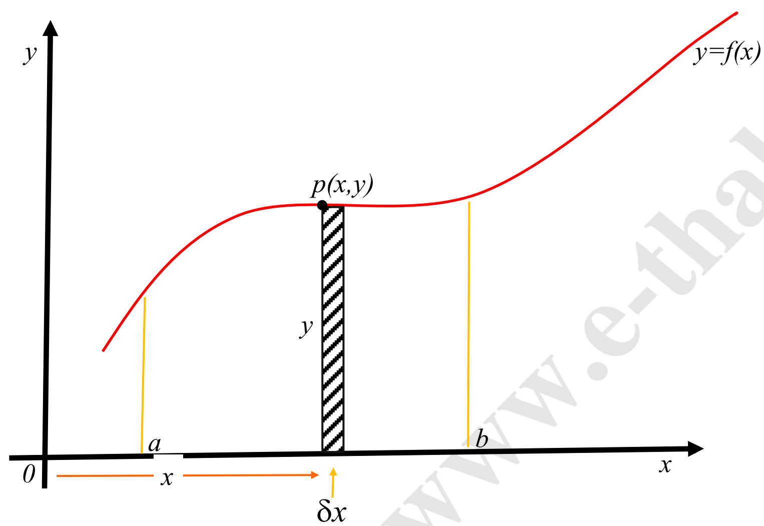
இணைந்த கணிதம்

தொகையீட்டின் பிரயோகம்



தொகையீட்டின் பிரயோகம்

1. வளையி ஒன்றின் கீழுள்ள பரப்பளவை காண்பர்.
2. வளையிகளினால் அடைக்கப்படும் பரப்பளவை காண்பர்.



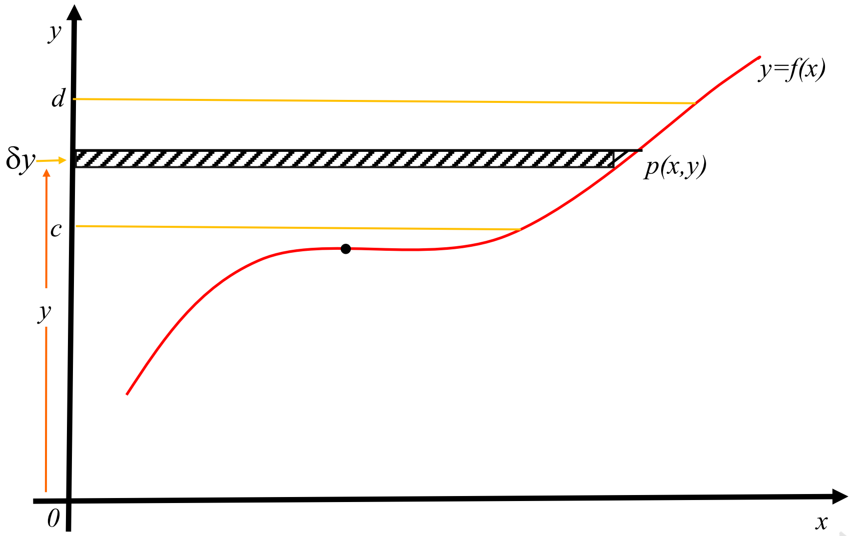
கீலத்தின் பரப்பளவு $= y\,\delta x$

$y=f(x)$ என்ற வளையி $x=a,\ x=b$ என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகள் மற்றும் x அச்சு என்பவற்றால் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு A எனின்,

$$A = \sum_{x=a}^{b} y\,\delta x$$

$$= \int_a^b y\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$



கீலத்தின் பரப்பளவு $= x\,\delta y$

$y=f(x)$ என்ற வளையி $y=c$, $y=d$ என்பவற்றிலுள்ள நிலைக்கூறுகள் மற்றும் y அச்சு என்பவற்றால் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு A எனின்,

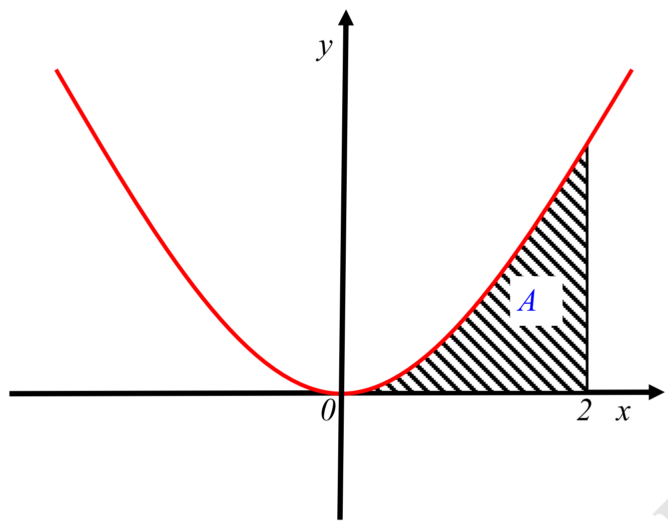
$$A = \sum_{y=c}^{d} x\,\delta y$$

$$= \int_{c}^{d} x\,dy$$

$$= \int_{c}^{d} f^{-1}(x)\,dy$$

உதாரணம் 1

$y=x^2$ என்ற வளையியின் கீழ் $x=0$ இருந்து $x=2$ வரை, வளையிக்கும் x அச்சுக்கும் இடையேயுள்ள பரப்பளவைக் காண்க.



$$A=\int_0^2 y\,dx$$

$$=\int_0^2 x^2\,dx$$

$$=\left\{\frac{x^3}{3}\right\}_0^2$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2^3-0\right\}$$

$=\dfrac{8}{3}$ சதுர அலகு

உதாரணம் 2

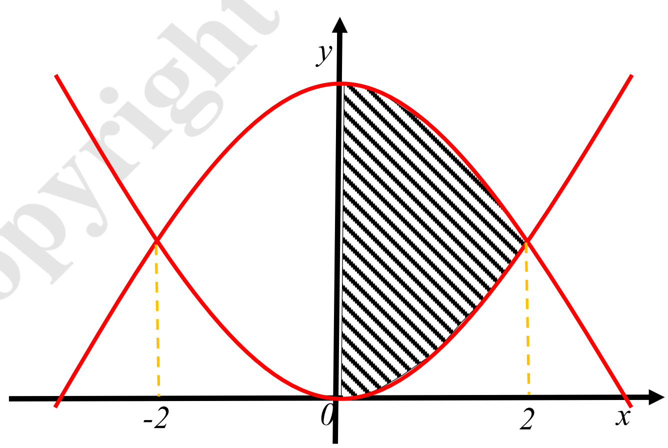
$y=x^2$,$y=8-x^2$ ஆகிய இரு வளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. முதலாம் காற்பகுதியில் இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

$$x^2=8-x^2$$

$$x=\pm 2$$

வெட்டுப்புள்ளிகள் (2,4) (-2,4)



$$A=\int_0^2\left(8-x^2\right)dx-\int_0^2 x^2\,dx$$

$$=\int_0^2\left(8-2x^2\right)dx$$

$$=\left\{8x-\frac{2x^3}{3}\right\}_0^2$$

$$=16-\frac{16}{3}$$

$=\dfrac{32}{3}$ சதுர அலகு

தொகுப்பு :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)
கணினிவடிவமைப்பு திரு பா.சாயிரூபன், த.தொ.தொ. ஆசிரியர் (வ/கனகராயன்குளம் மகா வித்தியாலயம்)

உதாரணம் 3

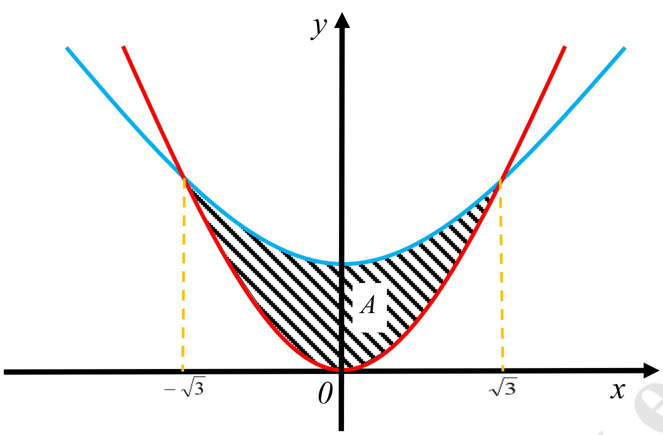
$y=5x^2$,$y=2x^2+9$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதே- $12\sqrt{3}$ தசத்தின் பரப்பளவு சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.

இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

$$5x^2 = 2x^2 + 9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$



$$A = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2x^2 + 9\right)dx - \int_0^{\sqrt{3}} 5x^2\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(9 - 3x^2\right)dx$$

$$= \left\{9x - 3\frac{x^3}{3}\right\}_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3}$$

சமச்சீரினால் இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $= 6\sqrt{3}X2$

$= 12\sqrt{3}$ சதுர அலகு

உதாரணம் 4

$y=x^2$,$y^2=x$ ஆகிய வளையிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

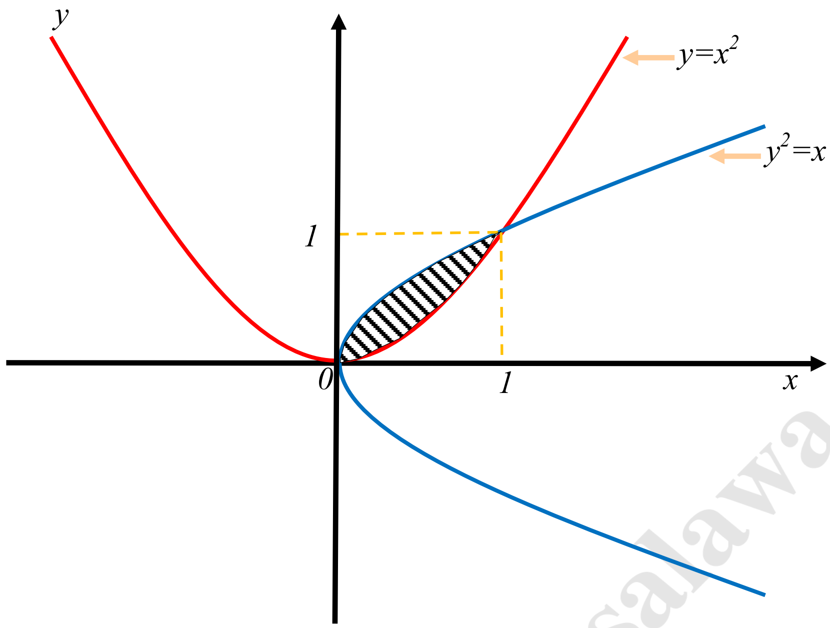
இரு வளையிகளையும் தீர்க்க.

$$x^4 = x$$

$$x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 1 \text{ or } x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = 0,1 \qquad\qquad \Delta < 0$$



Method I

$$A=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^2dx$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx$$

$$=\left\{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{3}\right\}_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

Method II

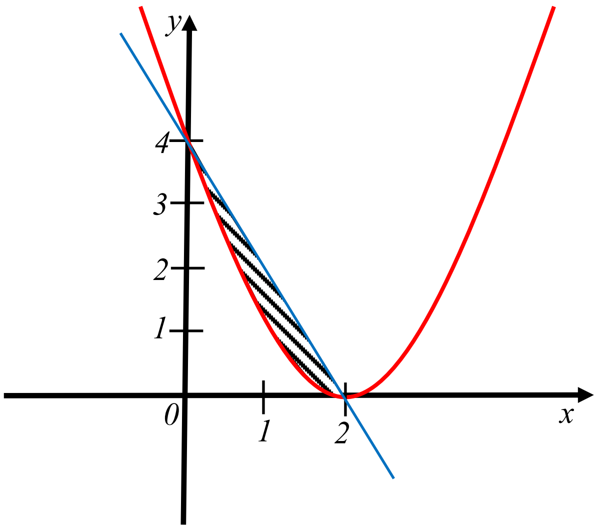
$$A=\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy-\int_0^1 y^2dy$$

$$=\int_0^1\left(y^{\frac{1}{2}}-y^2\right)dy$$

$$=\frac{1}{3}$$

உதாரணம் 5

$y=(x-2)^2$, $y=4-2x$ ஆகிய இரு வளையிகளையும் ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $\frac{4}{3}$ சதுர அலகுகள் எனக் காட்டுக.



$$A=\frac{1}{2}X2X4-\int_0^2 (x-2)^2\,dx$$

$$=4-\left\{\frac{(x-2)^3}{3}\right\}_0^2$$

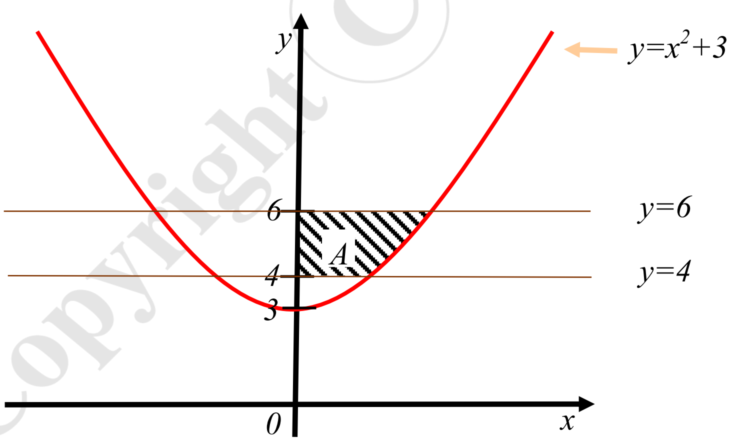
$$=4-\frac{1}{3}\{0-(-8)\}$$

$$=4-\frac{8}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$ சதுர அலகுகள்

உதாரணம் 6

$y=x^2+3$, $y=4$, $y=6$ ஆகிய வளையிகளால் முதலாம் கால்வட்டத்தில் அடைக்கப்பட்ட பரப்பு $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$ சதுர அலகுகள் எனகாட்டுக.



$$A=\int_4^6 (y-3)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

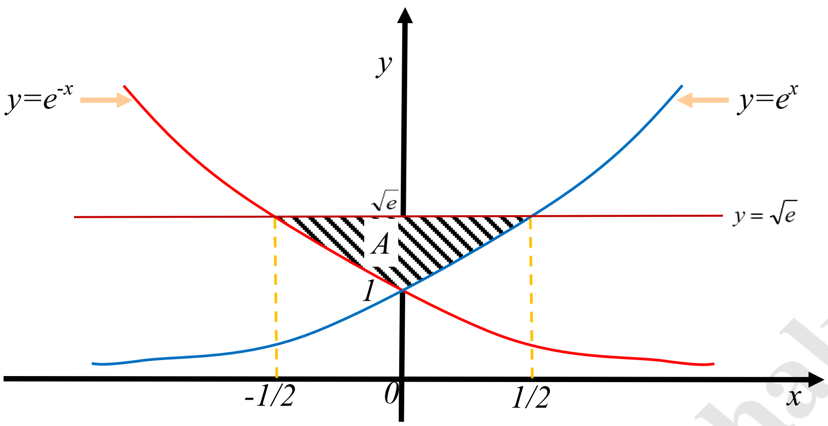
$$=\left\{\frac{(y-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right\}_4^6$$

$$=\frac{2}{3}\left\{3^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)$$

உதாரணம் 7

வெட்டுப்புள்ளிகளைத் தெளிவாகக் காட்டி $y=e^x$, $y=e^{-x}$ ஆகியவற்றின் வரைபுகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைக. இரு வளையிகளாலும் $y=\sqrt{e}$ என்ற கோட்டினாலும் உள்ளடக்கப்பட்ட பிரதேசத்தின் பரப்பளவு $(2-\sqrt{e})$ என காட்டுக.



$$A=\frac{1}{2}\sqrt{e}-\int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{2}-\left\{e^x\right\}_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{2}-\left\{e^{\frac{1}{2}}-e^0\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{e}}{2}-\sqrt{e}+1$$

$$=1-\frac{\sqrt{e}}{2}$$

சமச்சரின்படி தேவையான பரப்பு $=2A$

$=(2-\sqrt{e})$

உதாரணம் 8

பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int xe^{-x}dx$ ஐக் கண்டு இதிலிருந்து வளையி $y=xe^{-x}$ இனாலும் x=1, x=2, y=0 எனும் நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் நேர்கோடுகளாலும் உள்ளடக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

$$\int xe^{-x}dx$$

$$=x\frac{e^{-x}}{-1}-\int\frac{e^{-x}}{-1}.1.dx$$

$$=-xe^{-x}+\frac{e^{-x}}{-1}+c$$

$$=-e^{-x}(x+1)+c$$ $c-$ தொகையீட்டு மாறிலி

$$=\int_1^2 xe^{-x}dx$$

$$=\left\{-e^{-x}(x+1)\right\}_1^2$$

$$=-3e^{-2}-\left(-2e^{-1}\right)$$

$$=2e^{-1}-3e^{-2}$$