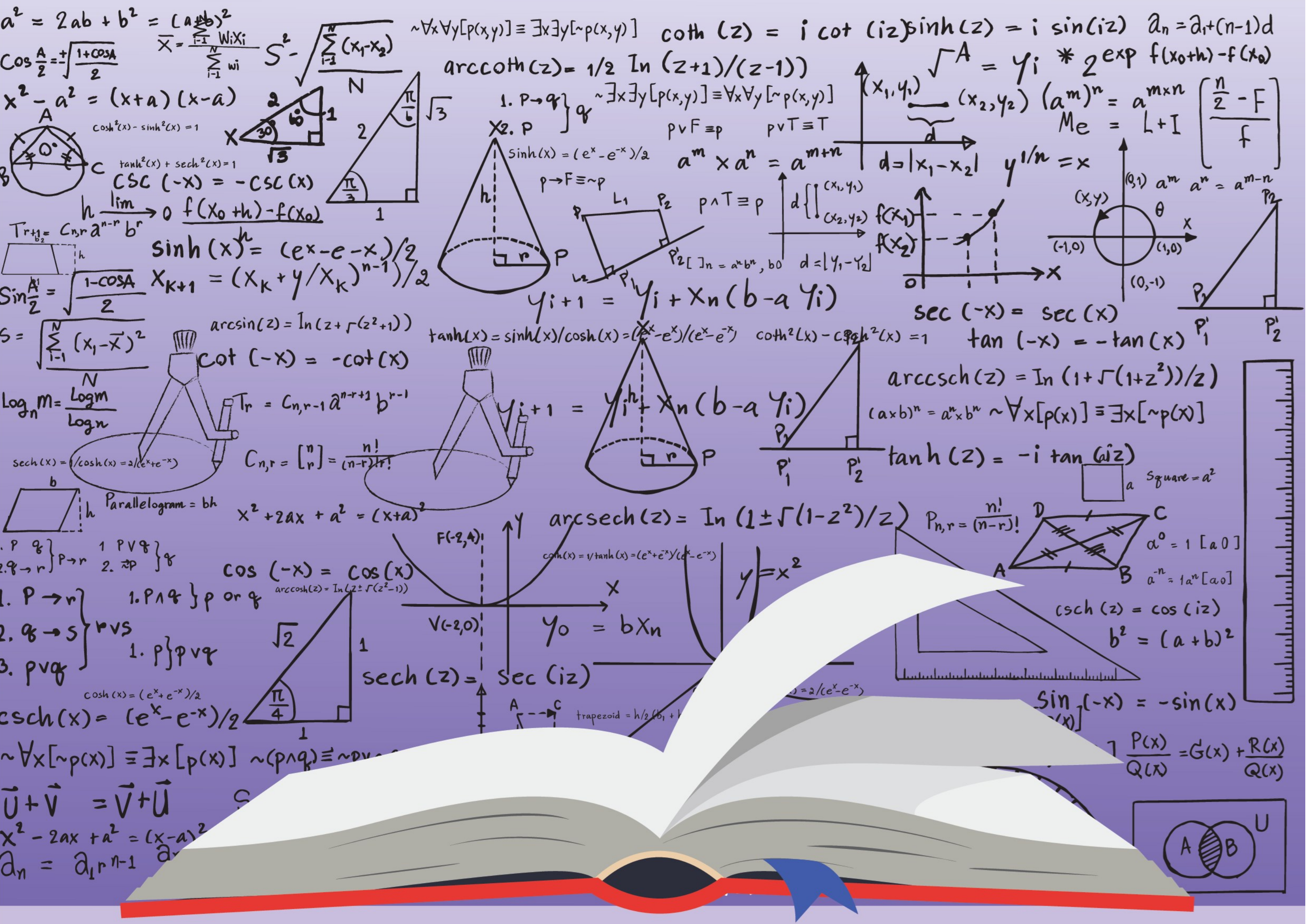
இணைந்த கணிதம்

தரம் - 12, 13

பிரதியீட்டுத் தொகையீடு



நியம வடிவம்

$$I=\int \frac{1}{aCosx+bSinx+c}dx$$ வடிவம்

பிரதியீடு $t=\tan\frac{x}{2}$

$$\therefore \frac{dt}{dx}=Sec^2\frac{x}{2},\frac{1}{2}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\left(1+t^2\right)}{2}$$

$$Cosx=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$Sinx=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\therefore I=\int\frac{1}{\frac{a\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)}+b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)+c}\cdot\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)}$$

$$=\int\frac{2}{a\left(1-t^2\right)+2bt+c\left(1+t^2\right)}dt$$

$$=\int\frac{2}{(c-a)t^2+2bt+(a+c)}dt$$

உதாரணம்:

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5+4\mathrm{Cosx}+3\mathrm{Sinx}}dx=\frac{1}{6}$$ எனக் காட்டுக

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{dt}{dx}=Sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$$

$$x=0\Rightarrow t=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)+3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)}$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{5\left(1+t^2\right)+4\left(1-t^2\right)+6t}dt$$

$$=\int_0^1 \frac{2}{t^2+6t+9}dt$$

$$=2\int_0^1 (t+3)^{-2}dt$$

$$=2\left\{\frac{(t+3)^{-1}}{-1}\right\}_0^1$$

$$=-2\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right\}$$

$$=-2\left\{\frac{3-4}{12}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}$$

02. $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+Sinx}dx$ஐக் காண்க இதிலிருந்து

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx+2Sinx}{1+Sinx}dx$இன் பெறுமானத்தைக் காண்க

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+Sinx}dx$$

$$t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{dt}{dx}=Sex^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)$$

$$x=0\Rightarrow t=0$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$$

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+1}dt$$

$$=2\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}dt$$

$$=2\left\{\frac{(t+1)^{-1}}{-1}\right\}_0^1$$

$$=-2\left\{\frac{1}{2}-1\right\}$$

$$=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx+2Sinx}{1+Sinx}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx}{1+Sinx}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sinx}{1+Sinx}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx}{1+Sinx}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+Sinx)-1}{(1+Sinx)}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cosx}{1+Sinx}dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+Sinx}dx$$

$$=\{\ell n|1+Sinx|\}_0^{\frac{\pi}{2}}+2\{x\}_0^{\frac{\pi}{2}}-2X1$$

$$=\{\ell n2-\ell n1\}+2\left\{\frac{\pi}{2}-0\right\}-2$$

$$=\ell n2+\pi-2$$

Note:

$$I=\int \frac{1}{aCos2x+bSin2x+c}dx$$

பிரதியீடு t = tanx

நியமவடிவம்

$$I = \int \frac{1}{aCos^2 x + bSin^2 x + c} dx$$

$$= \int \frac{Sex^2 x}{a + b\tan^2 x + cSec^2 x} dx \quad \text{(ஒவ்வொரு உறுப்பையும் } Cos^2 x \text{ ஆல் வகுக்க}$$

$$= \int \frac{(1 + \tan^2 x)}{a + b\tan^2 x + c(1 + \tan^2 x)} dx$$

$$= \int \frac{(1 + \tan^2 x)}{(a + c) + (b + c)\tan^2 x} dx$$

பிரதியீடு $t = \tan x$

உதாரணம்:

1.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2Cos^2 x + 4Sin^2 x + 5} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{2 + 4\tan^2 x + 5(1 + \tan^2 x)} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 x}{9\tan^2 x + 7} dx$$

$$t = \tan x$$

$$\frac{dt}{dx} = Sec^2 x = 1 + t^2$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{(1 + t^2)}{9t^2 + 7} \cdot \frac{dt}{(1 + t^2)}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(3t)^2 + (\sqrt{7})^2} dt$$

$$= \frac{1}{3X\sqrt{7}} \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{3t}{\sqrt{7}}\right) \right\}_0^1$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{7}} \left\{ \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{7}} - \tan^{-1}(0) \right\}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

சில முக்கிய பிரதியீடுகள்

$01.\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax+b}}dx$	$t=\sqrt{ax+b}$
$02.\int \frac{1}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	$t=\frac{1}{px+q}$
$03.\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$ $04.\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$	$\Rightarrow x=aCos^2\theta+bSin^2\theta$
$05.\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$	$x=aSec\theta$
$06.\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$	$x=a\tan\theta$
$07.\int (x+a)(x+b)^n dx$ $08.\int \frac{x+a}{(x+b)^n}dx$	$\Rightarrow t=x+b$

உதாரணம் 01.

$$I=\int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}}dx$$

$$t=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{dt}{dx}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}$$

$$x=1 \Rightarrow t=1$$

$$x=8 \Rightarrow t=2$$

$$I=\int_1^2 \frac{3t^2}{t^2+t^4}dt$$

$$=3\int_1^2 \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=3\{\tan^{-1}(t)\}_1^2$$

$$=3\{\tan^{-1}2-\tan^{-1}1\}$$

$$=3\left\{\tan^{-1}2-\frac{\pi}{4}\right\}$$

பயிற்சி

$$01.\int_{1}^{8}\frac{1}{1+x^{\frac{1}{3}}}dx \qquad t=x^{\frac{1}{3}}$$

$$02.\int_{1}^{64}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx \qquad t=x^{\frac{1}{6}}$$

உதாரணம் 2.

$$I=\int_{11}^{23}\frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+3}}dx$$

$$t=\sqrt{2x+3} \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}.2=\frac{1}{t}$$

$$x=11\Rightarrow t=5$$

$$x=23\Rightarrow t=7$$

$$2x+3=t^2$$

$$(x+1)=\frac{t^2-3}{2}+1=\frac{t^2-1}{2}$$

$$I=\int_{5}^{7}\frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)t}tdt$$

$$=\int_{5}^{7}\frac{2}{(t-1)(t+1)}dt$$

$$=\int_{5}^{7}\left\{\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right\}dt$$

$$=\{\ell n|t-1|-\ell n|t+1|\}_5^7$$

$$=\left\{\ell n\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right\}_5^7$$

$$=\ell n\left(\frac{6}{8}\right)-\ell n\left(\frac{4}{6}\right)$$

$$=\ell n\left(\frac{9}{8}\right)$$

பயிற்சி

$$01).\int \frac{1}{\left(1+e^{x}\right)\left(1+e^{-x}\right)}dx \qquad t = e^{x}$$

$$02).\int_{0}^{4}\left(x^{\frac{1}{2}}-4\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}-1\right)dx \qquad t = x^{\frac{1}{2}}$$

உதாரணம் 3.

$$I = \int_{a}^{b}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$$

$$x = aCos^{2}\theta + bSin^{2}\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a(2)Cos\theta(-Sin\theta) + b(2)Sin\theta Cos\theta$$

$$= (b-a)Sin2\theta$$

$$x = a \qquad a = aCos^{2}\theta + bSin^{2}\theta$$

$$(a-b)Sin^{2}\theta = 0$$

$$Sin\theta = 0 \qquad (\because a \neq b)$$

$$\theta = 0$$

$$x = b \qquad b = aCos^{2}\theta + bSin^{2}\theta$$

$$(b-a)Cos^{2}\theta = 0$$

$$Cos\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{aCos^2\theta+bSin^2\theta-a}{b-aCos^2\theta-bSin^2\theta}},\quad (b-a)Sin2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{(b-a)Sin^2\theta}{(b-a)Cos^2\theta}}\quad (b-a)Sin2\theta d\theta$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Sin\theta}{Cos\theta}.2Sin\theta Cos\theta d\theta$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}2Sin^2\theta d\theta$$

$$=(b-a)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-Cos2\theta)d\theta$$

$$=(b-a)\left\{\theta-\frac{Sin2\theta}{2}\right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(b-a)\frac{\pi}{2}$$

பயிற்சி

1. தக்க பிரதியீட்டைப் பயன்படத்தி $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

   இதிலிருந்து $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$ இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக. $x=Sin^2\theta$

2. $x=Cos2\theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$ ஐக் காண்க.

உதாரணம் 4.

$$I=\int (x+1)(x+3)^5\,dx$$

$t=x+3 \qquad\qquad x+1=t-3+1=t-2$

$$\frac{dt}{dx}=1$$

$$I=\int (t-2)t^5\,dt$$

$$=\int \left(t^6-2t^5\right)dt$$

$$=\frac{t^7}{7}-2\frac{t^6}{6}+c$$

$$=\frac{(x+3)^7}{7}-\frac{1}{3}(x+3)^6+c$$

பயிற்சி

01. $\int (x+2)(x+5)^7\,dx$

02. $\int \dfrac{x+2}{(x+3)^5}\,dx$