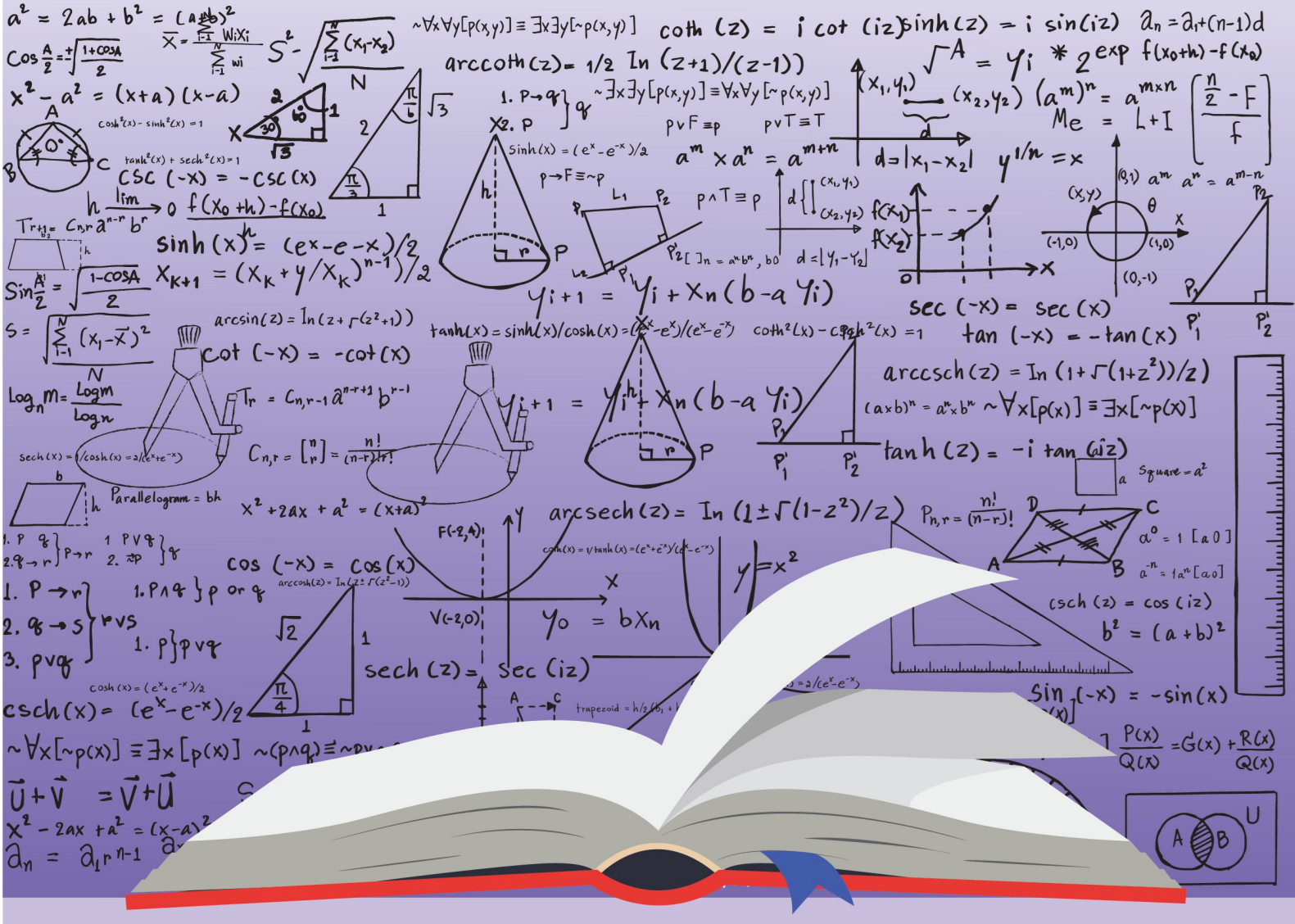
# இணைந்த கணிதம்

## நியம வடிவம் (II)

## பகுதிப்பின்னமும் தொகையீடும்



Case I

$$1=\int\frac{g(x)}{f(x)}dx$$

படி g(x) < படி f(x)

உதாரணம்

**1)** $\int\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow 2x+1=A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)$$

$x=-2;$

$-3=B(-1)(1)$

$B=3$

$x=-3;$

$-5=C(-2)(-1)$

$C=-\frac{5}{2}$

$x=-1;$

$-1=A(1)(2)$

$A=-\frac{1}{2}$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{3}{x+2}+\frac{-\frac{5}{2}}{x+3}$$

$$\int\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx+3\int\frac{1}{x+2}-\frac{5}{2}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+3\ln|x+2|-\frac{5}{2}\ln|x+3|+c$$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

**2)**

$$\int \frac{3x+1}{x(x^2+4)}dx$$

$$\frac{3x+1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 3x+1 = A(x^2+4) + x(Bx+c)$$

$x^2$; $0=A+B$

$x$ ; $3=C$

$x^0$; $1=4A$

$\Rightarrow A=1/4$, $B=-1/4$, $C=3$

$$\frac{3x+1}{x(x^2+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}+3}{x^2+4}$$

$$\int \frac{3x+1}{x(x^2+4)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-x+12}{x^2+4}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 12\int \frac{1}{x^2+2^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 12.\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + C$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + 6\tan^{-1}(\frac{x}{2}) + C$$

**3)**

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow x^2 = (Ax+B)(x^2+4) + (x^2+1)(Cx+D)$$

$x^3$; $0=A+C$

$x^2$; $1= B+D$

$x$; $0=4A+C$

$x^0$; $0=4B+D$

$\Big\}$ $A=C=0$, $B= -1/3$, $D= 4/3$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$$

$$\int = \int \left\{ \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+1}dx + \frac{4}{3}.\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1} + C$$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

**4)** $\int \frac{1}{(x^{2-}1)(x^2+3x+2)}dx$

$= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+1)(x+2)}dx$

$= \int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2(x+2)}dx$

$\frac{1}{(x-1)(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+2)}$

$\Rightarrow 1 = A(x+1)^2(x+2) + B(x-1)(x+1)(x+2) + C(x-1)(x+2) + D(x-1)(x+1)^2$

$x = 1; \quad 1 = A(4)(3)$

$A = \frac{1}{12}$

$x = -1; \quad 1 = C(-2)(1)$

$C = -\frac{1}{2}$

$x = -2; \quad 1 = D(-3)(1)$

$D = -\frac{1}{3}$

$x^0; \quad 1 = 2A - 2B - 2C - D$

$1 = \frac{1}{6} - 2B + 1 + \frac{1}{3}$

$2B = \frac{3}{6}$

$B = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{(x^2-1)(x^2+3x+2)} = \frac{\frac{1}{12}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x+2)}$

$\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}dx = \frac{1}{12}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{2}\int (x+1)^{-2}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx$

$\int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+3x+2)}dx = \frac{1}{12}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3}\ln|x+2| + K$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

**5)** $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{X+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (x+1)(Bx+C)$$

$x=-1;\quad 1=A(3)$

$x^2=-1;\quad 0=A+B$

$x^0=-1;\quad 1=A+C$

$$A=\frac{1}{3},\quad B=\frac{1}{3},\quad C=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\tan^{-1}\left\{\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\} + C$$

இங்கு C தொகையீட்டு மாறிலி



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

Case II

$$I = \int \frac{g(x)}{f(x)} dx$$

படி $g(x) =$ படி $f(x)$

உதாரணம்

**1)**

$$\int \frac{x+1}{x+2} dx$$
$$= \int \frac{(x+2)-1}{(x+2)} dx$$
$$= \int 1 - (\frac{1}{x+2}) dx$$
$$= x - \ln|x+2| + C$$

**2)**

$$\int \frac{x^2+5}{x^2+4} dx$$
$$= \int \frac{(x^2+4)+1}{(x^2+4)} dx$$
$$= \int \left\{1 + \frac{1}{x^2+2^2}\right\} dx$$
$$= x + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

**3)**

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \int \frac{x^2-x+1+2x}{x^2-x+1}dx$$

$$= \int 1dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$= \int 1dx + \int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx + \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}dx$$

$$= x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left\{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right\} + C$$

## Case III

$$I = \int \frac{g(x)}{f(x)}dx$$

படி $g(x) >$ படி $f(x)$

## உதாரணம்

**1)**

$$\int \frac{x^3+2x}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{x(x^2+1)+x}{(x^2+1)}dx$$

$$= \int xdx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)

**2)**

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx$$

$$= \int \frac{(x^3-1)+1}{x-1}dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)+1}{(x-1)}dx$$

$$= \int \left\{x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right\}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$$

**3)**

$$\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \left\{x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right\}dx$$

$$= \frac{x^2}{3}-x+\tan^{-1}x+C$$



தொகுப்பு:- :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினிவடிவமைப்பு:- திரு.இ.மத்தியூஸ் டியோனி, த.தொ.தொ ஆசிரியர் (மு/ஒட்டுசுட்டான் மகாவித்தியாலயம்)