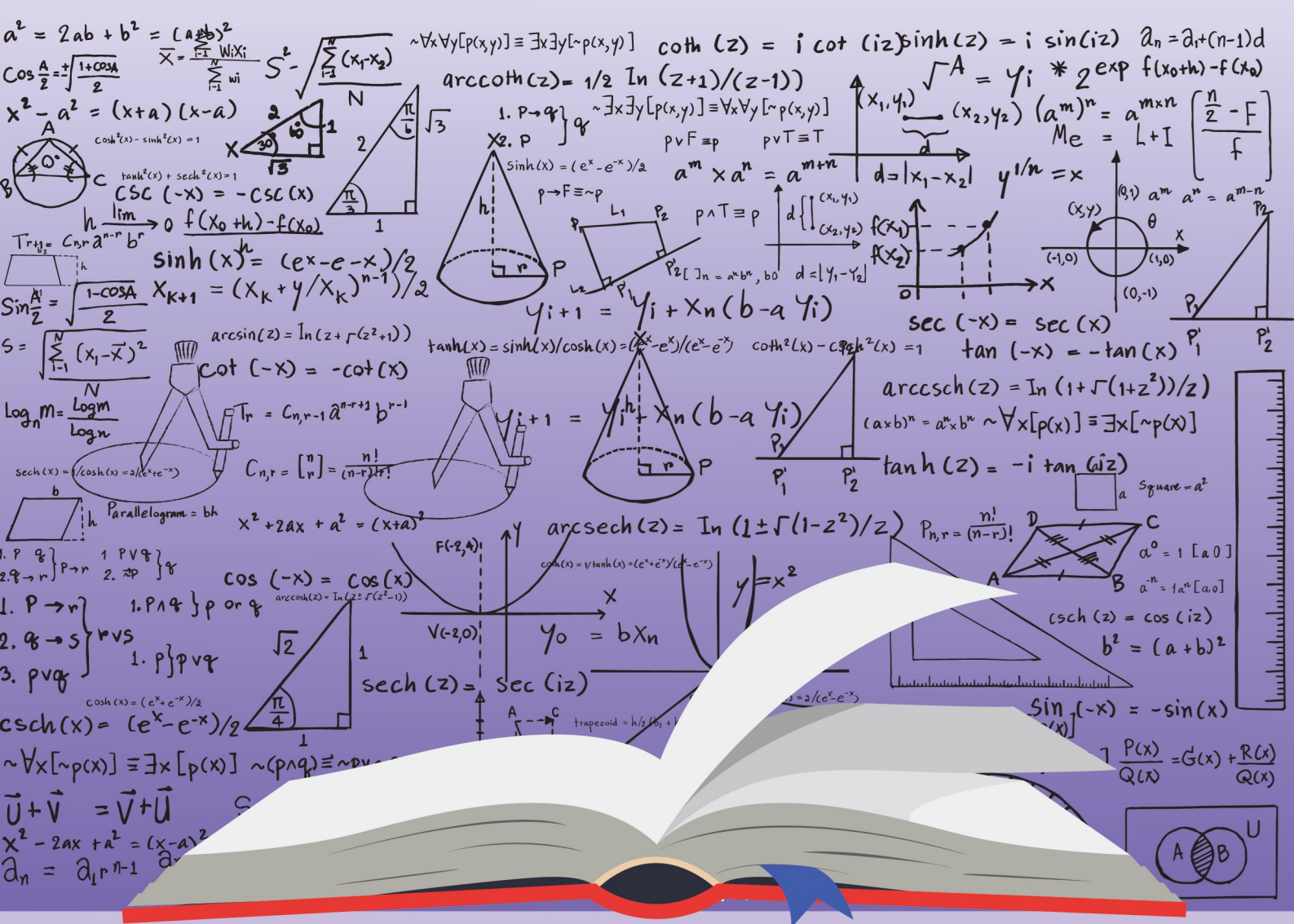
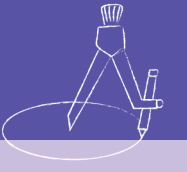




இணைந்த கணிதம்

வரையறுத்த தொகையீடு





வரையறுத்த தொகையீடு.

$$\int f(x)dx = g(x) + C \quad \text{எனின்}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \{g(x)\}_a^b = g(b) - g(a) \quad \text{என்பது}$$

வரையறுத்த தொகையீடாகும்.

இங்கு a - கீழ் எல்லை

b - மேல் எல்லை

வரையறுத்த தொகையீட்டின் பண்புகள்.

01

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \{g(x)\}_a^b = g(b) - g(a)$$

$$-\int_b^a f(x)dx = -\{g(x)\}_b^a = -\{g(a) - g(b)\} = g(b) - g(a)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

02

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

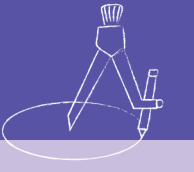
$$\int_a^b f(x)dx = \{g(x)\}_a^b = g(b) - g(a)$$

$$\int_a^b f(y)dy = \{g(y)\}_a^b = g(b) - g(a)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)



03

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

இங்கு ($a < b < c$)

$$\begin{aligned} & \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \{g(x)\}_a^c + \{g(x)\}_c^b \\ &= \{g(c) - g(a)\} + \{g(b) - g(c)\} \\ &= g(b) - g(a) \\ & \int_a^b f(x)dx = \{g(x)\}_a^b = g(b) - g(a) \\ & \therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

04

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad \text{--- (1)}$$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx \quad \text{ஐ கருதுக}$$

$$y = -x \quad \text{என்க}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$x = -a \Rightarrow y = a$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-y)(-dy)$$

$$= \int_0^a f(-y)dy$$

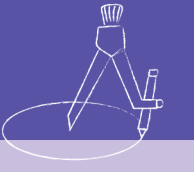
$$= \int_0^a f(-x)dx \quad \text{--- (2)}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a \{f(x) + f(-x)\}dx$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)



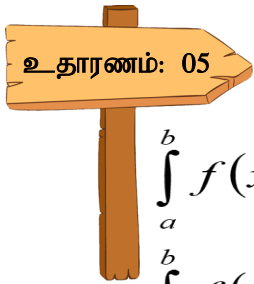
$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 dx &= \left\{ \frac{x^3}{3} \right\}_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \{2^3 - 1^3\} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx &= \left\{ \ln(x^2 + 1) \right\}_1^2 \\ &= \ln 5 - \ln 2 \\ &= \ln \left(\frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{1}{x+2} dx &= \left\{ \ln|x+2| \right\}_2^3 \\ &= \ln 5 - \ln 4 \\ &= \ln \left(\frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\int_a^b f(a+b-x) dx \text{ ஐக் கருதுக.}$$

$$y = a + b - x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$x = a \Rightarrow y = b$$

$$x = b \Rightarrow y = a$$

$$\therefore \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$= \int_b^a f(y)(-dy)$$

$$= \int_a^b f(y) dy$$

$$= \int_a^b f(x) dx$$



$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

$$\int_0^a f(a-x) dx \text{ ஐக் கருதுக.}$$

$$y = a - x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = a$$

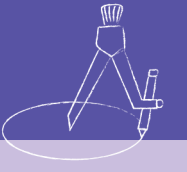
$$x = a \Rightarrow y = 0$$

$$\therefore \int_0^a f(a-x) dx$$

$$= \int_a^0 f(y)(-dy)$$

$$= \int_0^a f(y) dy$$

$$= \int_0^a f(x) dx$$



உதாரணம்: 06

$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ என்பதைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\tan x + \sqrt{3}) dx = \frac{\pi}{6} \ln 2$$

(1)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \quad \text{--- (1)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos^{2018} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x} dx \quad \text{--- (2)}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\cos^{2018} x + \sin^{2018} x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

$$= \{x\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



(2)

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\tan x + \sqrt{3}) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \sqrt{3}\right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan x} + \sqrt{3}\right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left\{\frac{1 - \sqrt{3} \tan x}{\sqrt{3} + \tan x} + \sqrt{3}\right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left\{\frac{4}{\sqrt{3} + \tan x}\right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln 4 dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\tan x + \sqrt{3}) dx \\
 &= 2 \ln 2 \{x\}_0^{\frac{\pi}{6}} - I_1 \\
 2I_1 &= 2(\ln 2) \frac{\pi}{6} \\
 I_1 &= \frac{\pi}{6} \ln 2
 \end{aligned}$$

உதாரணம்: 06

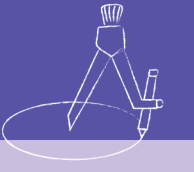
$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ என்பதைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

$$(1) \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{9-x}} dx = \frac{5}{2}$$

$$(2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \frac{\pi}{12}$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)



(1)

$$I = \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{9-x}} dx$$

$$= \int_2^7 \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{9-(9-x)}} dx$$

$$I = \int_2^7 \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{x}} dx$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

$$2I = \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{9-x}} dx + \int_2^7 \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int_2^7 1 dx$$

$$= [x]_2^7$$

$$= 5$$

$$I = \frac{5}{2}$$

(2)

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

(1) + (2) $\Rightarrow$

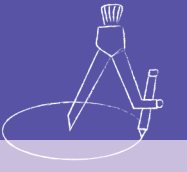
$$2I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx$$

$$= [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$$I_1 = \frac{\pi}{12}$$



உதாரணம்: 07

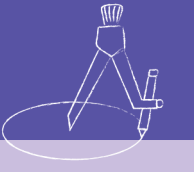
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \text{ எனகாட்டுக. இதிலிருந்து}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4} \text{ எனகாட்டுக.}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin(\pi - x)) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x) f(\sin x) dx \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx \\ 2 \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \\ \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx \\ & \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{2 - \sin^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \\ &= -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + (\cos x)^2} d(\cos x) \\ &= -\frac{\pi}{2} \{ \tan^{-1}(\cos x) \}_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} \{ \tan^{-1}(\cos \pi) - \tan^{-1}(\cos 0) \} \\ &= -\frac{\pi}{2} \{ \tan^{-1}(-1) - \tan^{-1}(1) \} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)



உதாரணம்: 08

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \text{ என்காட்டுக.}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx \text{ எனக் கொள்வோம்}$$

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) \text{ என்பதைப் பயன்படுத்தி } I=J \text{ எனக்காட்டுக. இதிலிருந்தோ}$$

வேறு விதமாகவோ I இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \ln \left| \sec \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \ln \left| \sec \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{4} \right| - \ln \left| \sec \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} \right| \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \ln |\sqrt{2} + 1| - \ln |\sqrt{2} - 1| \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} + 1)^2 = \sqrt{2} \ln (\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

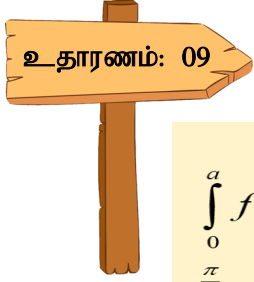
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= J \end{aligned}$$

தொகுப்பு :- திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.வே.ஹமணன் ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழில்நுட்பம் (கிளி/இராமநாதபுரம் மேற்கு அ.த.க.பா)



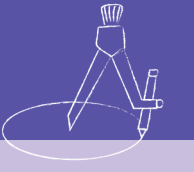
$$\begin{aligned}
 I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \\
 2I &= \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) \therefore I = J \\
 I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$



$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx \text{ ஏன்பதைப் பயன்படுத்தி}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{32} \text{ எனகாட்டுக.}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx
 \end{aligned}$$



$$2I = I + I$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^4 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x) dx$$

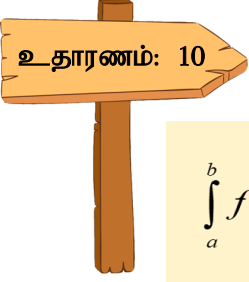
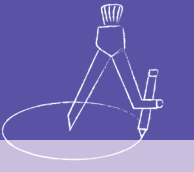
$$= \frac{1}{8} \left\{ x - \frac{\sin 4x}{4} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} \right) - (0 - 0) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{32}$$





$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x) \text{ என்பதைப் பயன்படுத்தி}$$

$$\int_2^6 \frac{\ln x}{\ln(8x-x^2)} dx \quad \text{ஐக் காண்க.}$$

$$I = \int_2^6 \frac{\ln x}{\ln(8x-x^2)} dx \quad \text{————— (1)}$$

$$= \int_2^6 \frac{\ln(8-x)}{\ln\{8(8-x)-(8-x)^2\}} dx$$

$$= \int_2^6 \frac{\ln(8-x)}{\ln\{(8-x)(8-8+x)\}} dx$$

$$I = \int_2^6 \frac{\ln x}{\ln(8x-x^2)} dx \quad \text{————— (2)}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow$$

$$2I = \int_2^6 \frac{\ln x}{\ln(8x-x^2)} dx + \int_2^6 \frac{\ln(8-x)}{\ln(8x-x^2)} dx$$

$$= \int_2^6 \frac{\ln(8x-x^2)}{\ln(8x-x^2)} dx$$

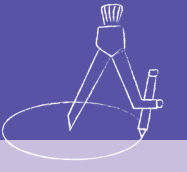
$$= \int_2^6 1 dx$$

$$= [x]_2^6$$

$$= 4$$

$$I = 2$$





$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot x} dx = \frac{\pi}{4}$$

எனக் காட்டுக.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot x} dx \quad \text{—————} \quad (1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan x} dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{1 + \cot x} dx \quad \text{—————} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cot x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{1 + \cot x} dx$$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$I = \frac{\pi}{4}$$

