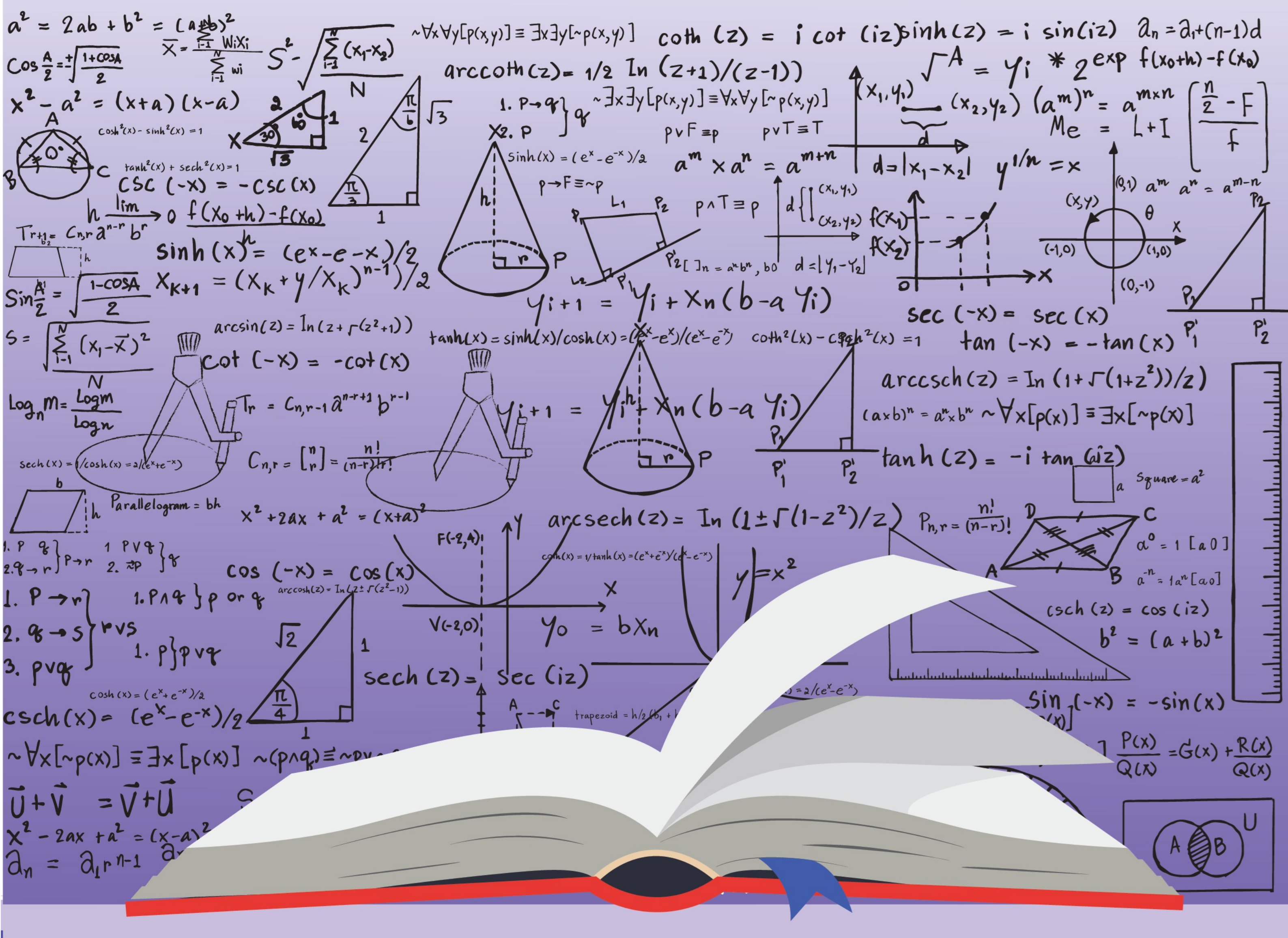
இணைந்த கணிதம்

திரிகோண கணித சார்புகளின் தொகையீடு



தேர்ச்சி : 16.0 சார்புகளின் வரையறுத்த, வரையறுக்காத தொகையீடுகளைக் காண்பார்.

தேர்ச்சி மட்டம் : 16.2 பிரச்சினங்களைத் தீர்ப்பதற்கு தொகையீடு பற்றிய தேற்றங்களை உபயோகிப்பார்

16.2.1 - திரிகோண கணித சார்புகளின் தொகையீடு

நியம வடிவம் - 4

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \cot x \operatorname{cosec} x dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cot x + c$$

தொகுப்பு :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு : திரு.ம.நிதர்ஷன், ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழினுட்பம், (யா/ஹாட்லிக் கல்லூரி, பருத்தித்துறை)

1

$$\int \sin 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)$$
$$= \frac{1}{2}(-\cos 2x) + c$$

2

$$\int \cos 4x dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \cos 4x d(4x)$$
$$= \frac{1}{4}\sin 4x + c$$

3

$$\int (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) dx$$
$$= \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + c$$

4

$$\int (\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}) dx$$
$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}} + c$$

5

$$\int e^x \sin(e^x) dx$$
$$= \int \sin e^x d(e^x)$$
$$= -\cos e^x + c$$

Note : -

1

$$\int \tan x dx$$
$$= -\int\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)dx$$
$$= -\ln\left|\cos x\right| + c$$
$$= \ln\left|\sec x\right| + c$$

2

$$\int \cot x dx$$
$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \ln\left|\sin x\right| + c$$

3

$$\int \sec x dx$$
$$= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$
$$= \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

4

$$\int \cos ec x dx$$
$$= \int \frac{\cos ec x(\cos ec x - \cot x)}{(\cos ec x - \cot x)} dx$$
$$= \ln\left|\cos ec x - \cot x\right| + c$$

உதாரணங்கள்

1

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx$$
$$= \int (1 + \sin 2x) dx$$
$$= x - \frac{\cos 2x}{2} + c$$

2

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$
$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$
$$= \int \cos 2x dx$$
$$= \frac{\sin 2x}{2} + c$$

3

$$\int (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int \left\{ \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int \left\{ \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx$$
$$= -\frac{\cos \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} + c$$

4

$$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \tan x \sec x)dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

5

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx$$

$$= \int (\cos ec^2 x - \cot x \cos ecx)dx$$

$$= -\cot x + \cos ecx + c$$

நியம வடிவம் - 5

$$I=\int \sin mx \cos nx dx$$ வடிவம் $m, n \in \mathbb{Z}^{+}$

1

$$\int \sin 4x \cos 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 2\sin 4x \cos 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (\sin 6x+\sin 2x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos 6x}{6}-\frac{\cos 2x}{2}\right\}+c$$
$$=-\frac{1}{12}\{3\cos 2x+\cos 6x\}+c$$

2

$$\int \sin 8x \sin 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 2\sin 8x \sin 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (\cos 6x-\cos 10x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 10x}{10}\right\}+c$$

3

$$\int \cos 6x \cos 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 2\cos 6x \cos 2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (\cos 8x+\cos 4x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 4x}{4}\right\}+c$$

நியம வடிவம் - 6

$$I = \int \sin^m x dx \qquad I = \int \cos^m x dx$$

$$I = \int \tan^m x dx \qquad m = \overrightarrow{1,6}$$

1

$$\int \sin x dx$$

$$= -\cos x + c$$

2

$$\int \sin^2 x dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\sin 2x}{2} \right\} + c$$

3

$$\int \sin^3 x dx$$

$$= -\int \sin^2 x d(\cos x)$$

$$= -\int (1-\cos^2 x) d(\cos x)$$

$$= \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x)$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

Method II

$$\int \sin^3 x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x) dx \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$= \frac{1}{4}\left\{-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{12}\left\{-9\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x\right\} + c$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

4

$$\int \sin^4 x dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (2 - 4\cos 2x + 1 + \cos 4x) dx \qquad \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left\{3x - 4\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4}\right\} + c$$

$$= \frac{1}{32}\left\{12x - 8\sin 2x + \sin 4x\right\} + c$$

5

$$\int \sin^5 x dx$$
$$= -\int \sin^4 x d(\cos x)$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x)$$
$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x)$$
$$= -\left\{\cos x - \frac{2\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}\right\} + c$$

6

$$\int \sin^6 x dx$$
$$= \int \left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{16}\int (9\sin^2 x - 6\sin x \sin 3x + \sin^2 3x) dx$$
$$= \frac{1}{32}\int (18\sin^2 x - 12\sin x \sin 3x + 2\sin^2 3x) dx$$
$$= \frac{1}{32}\int \{9(1-\cos 2x) - 6(\cos 2x - \cos 4x) + (1-\cos 6x)^2\} dx$$
$$= \frac{1}{32}\int (10 - 15\cos 2x + 6\cos 4x - \cos 6x) dx$$
$$= \frac{1}{32}\left\{10x - 15\frac{\sin 2x}{2} + 6\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 6x}{6}\right\} + c$$
$$= \frac{1}{192}\{60x - 45\sin 2x + 9\sin 4x - \sin 6x\} + c$$

7

$$\int \tan^2 x dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \tan x - x + c$$

8

$$\int \tan^3 x dx$$
$$= \int \tan x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x dx - \int \tan x dx$$
$$= \int \tan x d(\tan x) + \int -\frac{\sin x}{\cos} dx$$
$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \ln\left|\cos x\right| + c$$

9

$$\int \tan^6 x dx$$
$$= \int \tan^4 x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$
$$= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x\left(\sec^2 x - 1\right)dx$$
$$= \int \tan^4 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \left(\sec^2 x - 1\right)dx$$
$$= \frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$$

10

$$\int \sec^6 x dx$$
$$= \int \sec^4 x \sec^2 x dx$$
$$= \int \left(1 + \tan^2 x\right)^2 d(\tan x)$$
$$= \int \left(1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x\right)d(\tan x)$$
$$= \tan x + 2\frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c$$

$\int dx$

நியம வடிவம் - 7

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx \qquad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

1

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx$$
$$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (2-2\cos^2 2x) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (2-1-\cos 4x) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x) dx$$
$$= \frac{1}{8}\left\{x - \frac{\sin 4x}{4}\right\} + c$$
$$= \frac{1}{32}\{4x - \sin 4x\} + c$$

2

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx$$
$$= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx$$
$$= -\int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x)$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d(\cos x)$$
$$= \int (\cos^4 x - \cos^2 x) d(\cos x)$$
$$= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

தொகுப்பு :-திரு மு.ராகுலன், ஆசிரியர் இணைந்த கணிதம் (யா/மகாஜனா கல்லூரி)
கணினி வடிவமைப்பு : திரு.ம.நிதர்ஷன், ஆசிரியர் - தகவல் தொடர்பாடல் தொழினுட்பம், (யா/ஹாட்லிக் கல்லூரி, பருத்தித்துறை)

3

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx$$

$$= -\int \cos^5 x \sin^2 x d(\cos x)$$

$$= -\int \cos^5 x(1-\cos^2 x)d(\cos x)$$

$$= \int (\cos^7 x - \cos^5 x)d(\cos x)$$

$$= \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + c$$

Method II

$$\int \sin^3 x \cos^5 x dx$$

$$= \int \sin^3 x \cos^4 x d(\sin x)$$

$$= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int \sin^3 x(1-2\sin^2 x + \sin^4 x)d(\sin x)$$

$$= \int (\sin^3 x - 2\sin^5 x + \sin^7 x)d(\sin x)$$

$$= \frac{\sin^4 x}{4} - 2\frac{\sin^6 x}{6} + \frac{\sin^8 x}{8} + c$$