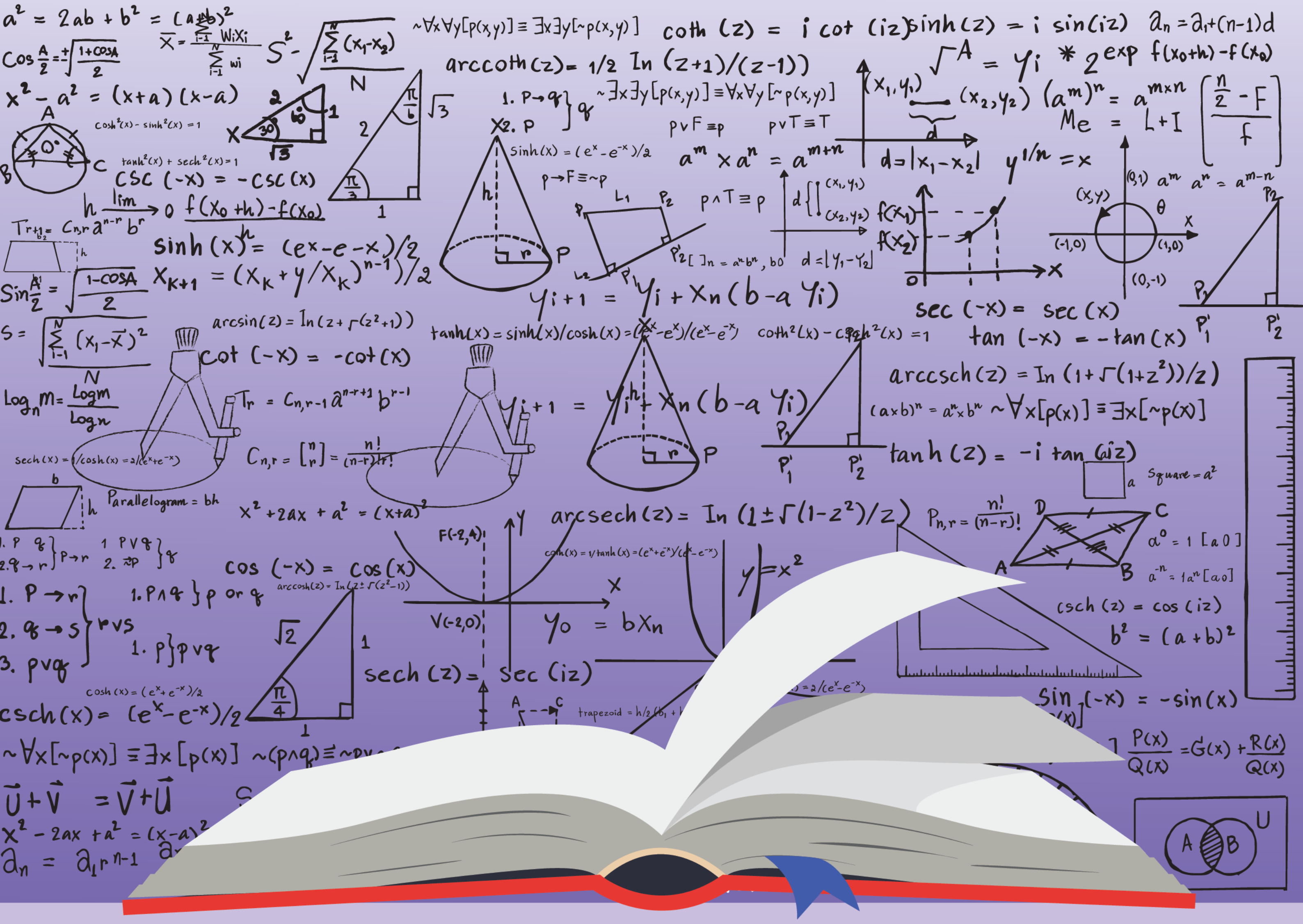
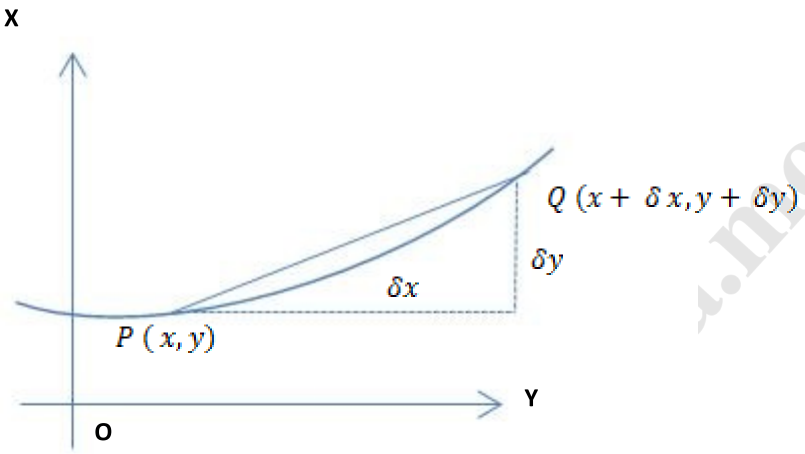
இணைந்த கணிதம்

வகையீட்டின் பிரயோகம்



15.1 படித்திறன்



வளையியொன்றின் மீது மிக அண்மையாக உள்ள இரு புள்ளிகள் $p(x, y)$ $Q(x, +\delta x, y + \delta y)$ எனக் கொள்வோம். Q ஆனது வளையி மீது அசைந்து P இற்கு மிக அண்மையாக வரும்போது நாண் PQ ஆனது வளையியற்கு புள்ளி $P(x,y)$ இல் உள்ள தொடலியாக δx ஆனது பூச்சியத்தை அணுக புள்ளி Q ஆனது புள்ளி P யிற்கு அண்மையாக வரும்.

$\frac{\delta y}{\delta x}$ = நாண் PQ இன் படித்திறன

$\lim \delta x \to 0 \frac{\delta y}{\delta x} = P(x, y)$ யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறன்

$\frac{dy}{dx}$ **= புள்ளி P(x,y) யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறன்**

இது புள்ளி P(x,y) யில் வளையியின் படித்திறன் எனவும் அழைக்கப்படும்

உதாரணம் 1

$y = x^2$ மீதுள்ள புள்ளி (2, 4) இலுள்ள தொடலியின் படித்திறனைக் காண்க

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)} = 4$$

(2,4) இல் உள்ள தொடலியின் படித்திறன் = 4

குறிப்பு

புள்ளி (X_1 , Y_1) இனூடு செல்வது படித்திறன் m ஐ உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{y - y_1 = m (x-x_1)}$ ஆகும்.

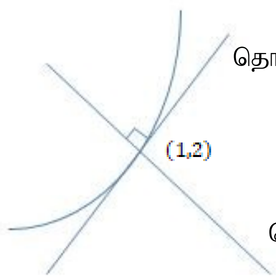
உதாரணம் 2

$y = x^2 + 1$ மீதுள்ள புள்ளி (1, 2) இல் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டையும் செவ்வனின் சமன்பாட்டையும் காண்க

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)} = 2.$$

(1, 2) இலுள்ள தொடலியின் படித்திறன் = 2.

தொடலியின் சமன்பாடு $y - 2 = 2(x - 1) \Rightarrow 2x - y = 0.$



(1, 2) இலுள்ள செவ்வனின் படித்திறன் $= -\frac{1}{2}$

செவ்வனின் சமன்பாடு $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$

உதாரணம் 3

Y= 1—sinΘ , x = 2cos^{2}Θ இனால் தரப்படும் வளையி C எனக் கொள்வோம், இங்கு Θ ஒரு பரமானம் வளையி C ற்கு $\theta = \frac{\pi}{2}$ ஐ ஒத்த புள்ளியில் உள்ள தொடலியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$y = 1 - 3\sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = -3\cos\theta$

$x = 2\cos^2\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2(2)\cos\theta\,(-\sin\theta) = 4\sin\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = (-3\cos\theta)\left(\frac{1}{-4\sin\theta\cos\theta}\right) = \frac{3}{4\sin\theta} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆக $x = 0\,, y = -2$

தொடலியின் சமன்பாடு $y + 2 = \frac{3}{4}(x - 0)$ அதாவது $3x - 4y - 8 = 0$ ஆகும்

உதாரணம் 4

$y = x^3 - 2x^2 + x$ என்னும் வளையியின் மீதுள்ள எப்புள்ளிகளில் வரையும் தொடலிகள் x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக இருக்கும் எனக் காண்க?

தொடலியானது x அச்சிற்குச் சமாந்தரமாக அமைய அதன் படித்திறன் பூச்சியமாக அமைய வேண்டும்.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \;\; \textbf{or} \;\; x = \frac{1}{3}$$

$x = 1$ எனின் $y = 0$, $x = \frac{1}{3}$ எனின் $y = \frac{4}{27}$

ஆகவே $(1,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ என்னும் புள்ளிகளில் உள்ள தொடலிகள் x அச்சிற்குச்சமாந்தரமாக இருக்கும்

உதாரணம் 5

x = 1 - 2cos Θ , y = 3sin Θ இனால் தரப்படும் வளையி C எனக் கொள்வோம்,

இங்கு Θ $(0 \le \Theta \le 2\Pi)$ ஒரு பரமானம்

1. $\frac{dy}{dx}$ இனை Θ சார்பில் காண்க

2. x அச்சிற்கு சமாந்தரமாக வளையிலுள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொடலிகள் வரையலாம் எனக் காட்டி அப்புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க

1.

$$x = 1 - 2\cos\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta$$

$$y = 3sin\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 3cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = 3\cos\theta \cdot \frac{1}{2\sin\theta} = \frac{3}{2}\,cot\theta$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\,cot\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$$

θ விற்கு இருபெறுமானங்கள் கிடைப்பதால் இரு தொடலிகள் வரையலாம்.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 1, y = 3$$

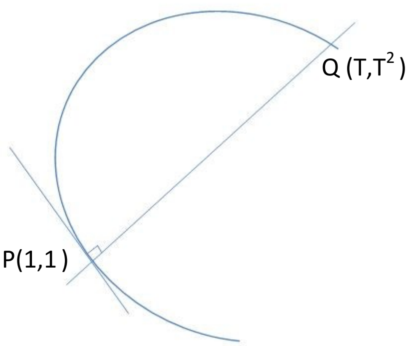
$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 1, y = -3$$

தொடலிகளின் தொடுப்புள்ளிகள் (1,3) , (1,-3)

உதாரணம் 6

x = t , y = t^2 என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் தரப்படும் வளையி மீதுள்ள பரமானப் பெறுமானம் t = 1 ஐ உடைய புள்ளி P யில் வரையப்படும் செவ்வனானது வளையியை மீண்டும் புள்ளி Q வில் சந்திக்கின்றது. Q வின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

$$x = t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \;,\; y = t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t.$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = 2t.1 = 2t \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1} = 2.$$

புள்ளி Q இற்கு ஒத்த பரமானப் பெறுமானம் t = T என்க.

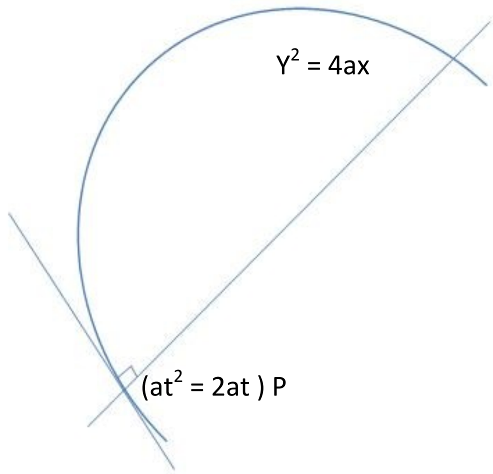
PG இன் படித்திறன் $= \frac{T^2-1}{T-1} = T+1$

$$(T+1) * 2 = -1 \rightarrow T = -\frac{3}{2} \rightarrow Q \equiv \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

உதாரணம் 7

$Y^2 = 4ax$ என்ற வளையி மீதுள்ள புள்ளி (at^2 , $2at$) இல் வளையிக்கு வரையப்படம் செவ்வனின் சமன்பாட்டைக் காண்க. இதிலிருந்து புள்ளி (a,0) இனூடாகச் செல்லக்கூடியதாக வளையி $y^2 = 4ax$ இற்கு ஒரே ஒரு செவ்வென் மட்டும் வரையலாம் எனக் காட்டி அதனைக் காண்க

$$y^2 = 4ax \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 4a \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(at^2,2at)} = \frac{1}{t}$$



புள்ளி (at^2 , $2at$) இல் செவ்வனின் படித்திறன் = - t

செவ்வனின் சமன்பாடு

$$y - 2at = -t\,(x - at^2) \Rightarrow xt + y - 2at - at^3 = 0$$

இது (a,0) இனூடு செல்வதற்கு $at + 0 - 2at - at^3 = 0$ ஆக வேண்டும்.

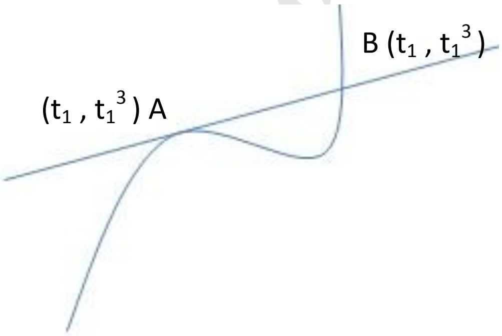
$\Rightarrow t(1 + t^2) = 0 \Rightarrow t = 0$

t இற்கு ஒரு பெறுமானம் மட்டும் கிடைப்பதால் ஒரு செவ்வன் மட்டும் வரையலாம்

அதன் சமன்பாடு $y = 0$ ஆகும்

உதாரணம் 8

$y = x^3$ என்னும் வளையியில் உள்ள புள்ளி A இல் வரையப்படும் தொடலி வளையியை மீண்டும் B இல் இடைவெட்டுகின்றது. B யில் வரையும் தொடலியின் படித்திறன் A யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறனின் 4 மடங்கு எனக்காட்டுக



$A \equiv (t, t^3)$, $B \equiv (t_1, {t_1}^3)$ எனக் கொள்வோம்

$$y = x^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t,t^3)} = 3t^2 \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t_1 t_1{}^3)} = 3{t_1}^2$$

AB யின் படித்திறன் $= \dfrac{t^3 - {t_1}^3}{t - t_1} = 3t^2$

$$=> \frac{(t - t_1)(t^2 + tt_1 + t^2)}{t - t_1} = 3t^2 => {t_1}^2 + tt_1 + 2t^2 = 0$$

$$(t_1 - t)(t_1 + 2t) = 0 => t_1 = 2t \; [\therefore t_1 \neq t]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t_1, t_1{}^3)} = 3{t_1}^2 = 3(-2t)^2 = 12t^2 = 4(3t^2) = 4\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t,t^3)}$$

ஆகவே B யில் வரையும் தொடலியின் படித்திறன் A யிலுள்ள தொடலியின் படித்திறனின் 4 மடங்காகும்