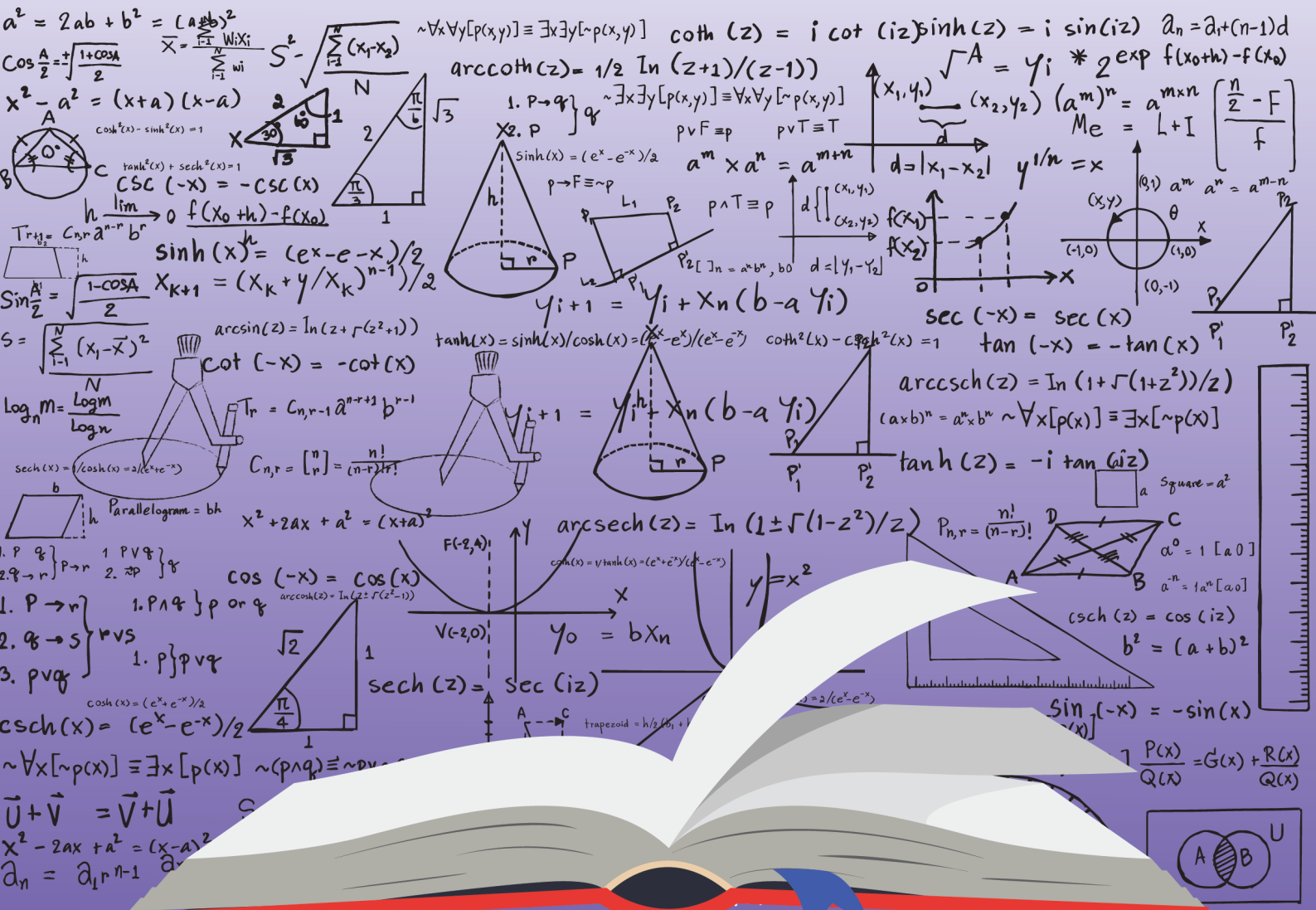
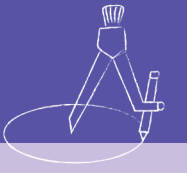


இணைந்த கணிதம்

வகையீடு பயிற்சி

2v.lk





பலவினப் பயிற்சி 2G



பின்வருவனவற்றின் x குறித்து பெறுதிகளைக் காண்க.



$$\sin^2 2x$$



$$\sin^2 2x^2$$



$$\tan^{-1}\left(\frac{2x^2}{1-3x^2}\right)$$



$$2x \sin^2 x^2$$



$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$



$$x^x$$



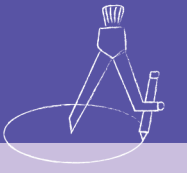
$$a^x$$



$$2x^x + 3^x$$



$$\ln\{x + \sqrt{x^2 + 4}\}$$



02

பின்வருவனவற்றின் x குறித்து பெறுதிகளை முதற்கோட்டுபாடுகளில் இருந்து



$$\sin 2x$$



$$\cos \sqrt{x}$$



$$\sqrt{x^2 + 1}$$

03

$$\sin y = x \sin(a + y) \quad \text{எனின்} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a + y)}{\sin a} \quad \text{எனக்காட்டுக.}$$

04

$$x = 2 \cos \theta, y = 3 \sin \theta \quad \text{எனின்} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{2} \cot \theta \quad \text{எனவும்}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{3}{4} \operatorname{cosec}^3 \theta \quad \text{எனவும் காட்டுக.}$$

05

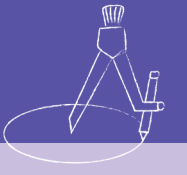
$$x = \cos \theta + \theta \sin \theta, y = \sin \theta - \theta \cos \theta, \theta \neq 0, \theta \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{எனின்} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sec^3 \theta}{\theta} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

06

$$x = 2 \cos t - \cos 2t, y = \sin t - \sin 2t \quad \text{எனின்} \quad t = \frac{\pi}{2} \quad \text{இல்} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{ஐக்}$$

$$\text{காண்க.}$$



07

$\cos^3 x$ குறித்து $\sin^3 x$ வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

08

$y = e^{\sin 2t}, x = e^{\cos 2t}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -\frac{y \ln x}{x \ln x}$ எனக்காட்டுக.

09

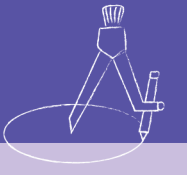
$x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \cot \frac{\theta}{2}$ எனவும் $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4a} \operatorname{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$ எனவும் காட்டுக.

10

$x = \sec \theta - \cos \theta, y = \sec^n \theta - \cos^n \theta$ எனின் $(x^2 + 4) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = n^2 (y^2 + 4)$ எனக் காட்டுக.

11

$y = \tan x + \sec x$ எனின் $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$ எனக் காட்டுக.



12

$x = \tan \theta$ எனும் பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவழியாக $0 < x < 1$ ஆக இருக்கும் போது $\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ குறித்து $\cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

13

$y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^m$ எனின் $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = m^2 y$ எனக்காட்டுக.

14

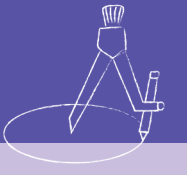
$y = e^{m \sin^{-1} x}$ எனின் $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = m^2 y$ எனக்காட்டுக
 $x = 0$ இல் $\frac{d^3y}{dx^3}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15

$y = x^y$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y \ln x)}$ எனக் காட்டுக.

16

$x = \tan t, y = \tan pt$ எனின் $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 2py\frac{dy}{dx}$ எனக் காட்டுக.



17

$x = \sin t, y = \sin pt$ எனின் $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + p^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.

18

$2x = y^{\frac{1}{m}} + y^{\frac{1}{m}}$ எனின் $(x^2 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - m^2 y = 0$ எனக்காட்டுக.

19

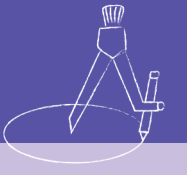
$\tan \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \tan \frac{x}{2}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k \cos x}$ எனக்காட்டுக
இங்கு k ஒரு மாறிலி

20

$ky = \sin(x + y)$ எனின் $\frac{d^2 y}{dx^2} = -y \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^3$ எனக் காட்டுக.

21

$2y = (\sin^{-1} x)^2$ எனின் $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 1 = 0$ எனக்காட்டுக
 $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=0}$ $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=0}$ $\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)_{x=0}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.



22

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{எனின்}$$

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (n+x) \frac{dy}{dx} + ny = 0 \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

23

$$y\sqrt{x} = \sin x \quad \text{எனின்} \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \quad \text{எனக்காட்டுக.}$$

24

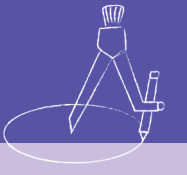
$$y = f(e^x) \quad \text{எனின்} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x) \quad \text{எனக்காட்டுக}$$

25

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right) \quad \text{என்பதை} \quad \tan^{-1} x \quad \text{குறித்து வகையிடுக.}$$

26

$$y = \sin \left(2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \right) \quad \text{ஐ} \quad \cos^{-1} x \quad \text{குறித்து வகையிடுக.}$$



27

$x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ எனக் காட்டுக.

28

I

f உம் g உம் x இன் வகையிடத்தக்க சார்புகளெனின்

$$\frac{d}{dx}\{fg\} = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx} \quad \text{என நிறுவுக.}$$

x குறித்து வகையிடுக

a

$$e^{x^2} \sin 2x$$

b

$$\sqrt{x} \sin^{-1}(2x-1)$$

c

$$\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x} \right) \ln(\sec x + \tan x)$$

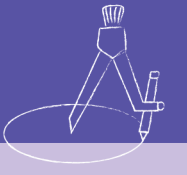
II

α உம் β உம் ஒருமைகளாக இருக்க $(\alpha + \beta x)e^{\frac{y}{x}} = x$ எனின் $x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^2$ என நிறுவுக.

AL/1984

29

$\sin^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ ஐ $\sqrt{x}$ குறித்து வகையிடுக.



30

$x^y = y^x$ எனின் $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$ எனக் காட்டுக.

31

$x^y + y^x = 2$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \ln y + yx^{y-1}}{x^y \ln x + xy^{x-1}}$ எனக்காட்டுக.

32

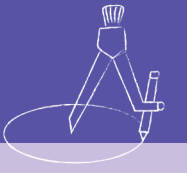
$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ ஐ $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ குறித்து வகையிடுக.

33

$\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$ ஐ $\tan^{-1} x$ குறித்து வகையிடுக.

34

$y = ae^{mx} + be^{-mx}$ எனின் $\frac{d^2 y}{dx^2} - m^2 y = 0$ எனக் காட்டுக.



35

$k \in R$ எனின் $y = x.e^{-\frac{k}{x}}$ எனக் கொள்வோம்

I $x^2 \frac{dy}{dx} = (x + k)y$ எனவும்

II $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} - kx \frac{dy}{dx} + ky = 0$ எனவும்

காட்டுக

$\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=-k}$ $\left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)_{x=-k}$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

36

a

முதற் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி x குறித்துச் சார்பு $f(x) = \sin x$ இன் பெறுமதியைக் காண்க. $g(x) = \cos x$ இன் பெறுமதியை உய்த்தறிக.

பின்வருவனவற்றை x ஐக் குறித்து வகையிடுக.

I $\sin(\ln(1 + x^2))$

II $\cos(\sin x)$

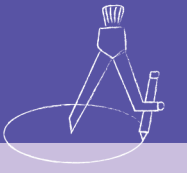
b

$y = \sin k\theta \operatorname{cosec} \theta$ எனவும் $x = \cos \theta$ எனவும் கொள்வோம்

இங்கு k ஒரு மாறிலி.

I $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} - xy + k \cos k\theta = 0$ எனவும்

II $(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + (k^2 - 1)y = 0$ எனவும் நிறுவுக.



37

y என்பது u இன் ஒரு வகையிடத்தக்க சார்பாயும் $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ஆகும் போது $u = \ln(\cos x)$ ஆயும் இருப்பின்

$$\sin^3 x \frac{d^2 y}{du^2} = \sin x \cos^2 x \frac{d^2 y}{dx^2} - \cos x \frac{dy}{dx} \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

38

$x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ எனின் $t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ இற்கு

$$y \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = 0 \quad \text{எனக் காட்டுக.}$$

39

$x = k(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad y = k(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx} \right), \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)$

ஆகியவற்றை θ வின் சார்புகளாக காண்க.

40

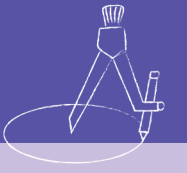
$x = 2t^3 + 1, y = 4t^4 - 1$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx} \right) \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right) + 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = 0$ எனக் காட்டுக.

41

$y = e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$ எனின் $\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} \sin\left(x\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து $\frac{d^3 y}{dy^3}$ என்பது λy என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்கப்படலாம்

என காட்டுக. இங்கு λ என்பது தீர்மானிக்கப்பட வேண்டிய ஒரு மாறிலியாகும்



42

கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{d^n}{dx^n} \{ \ln(\alpha x + \beta) \} = \frac{\alpha^n (-1)^{n-1} (n-1)!}{(\alpha x + \beta)^n}, n = 1, 2, 3, \dots \text{ என நிறுவுக}$$

இங்கு α, β என்பன நேர் ஒருமைகளும், $x > 0$ உம் ஆகும்.

$$y = \ln(\alpha x + \beta) \text{ எனின், } \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \text{ என உய்த்தறிக.}$$

43

I

யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவேண் r இற்கு $\frac{d^r}{dx^r} (xe^x) = (x + r)e^x$ எனக்காட்டுக.

II

$y = x^2 e^x$ எனின், $\frac{dy}{dx} = 2xe^x + y$ என நிறுவுக.

$$\frac{d^r y}{dx^r} - \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} = 2(x + r - 1)e^x \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

இதிலிருந்து, யாதாயினும் ஒரு நேர் நிறைவேண் n இற்கு

$$\frac{d^n y}{dx^n} = n(2x + n - 1)e^x + y \text{ எனக் காட்டுக}$$

43

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2} \text{ எனின், } x = 1 \text{ ஆக இருக்கும் போது } \frac{dy}{dx}$$

ஐக் காண்க.