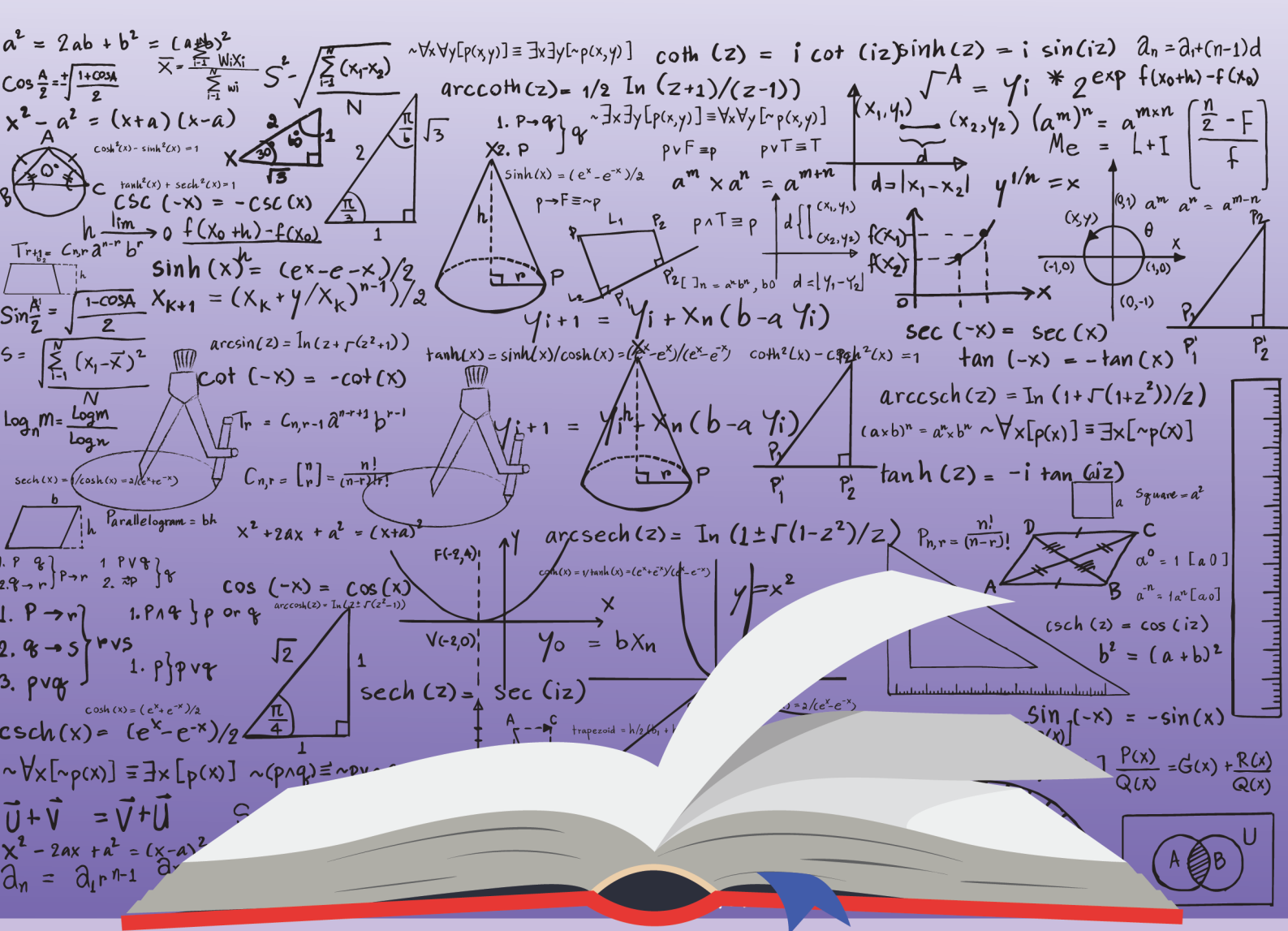
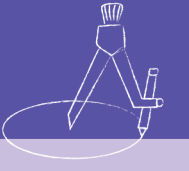


இணைந்த கணிதம்

3. வகையீடு





வகையீடு



நுண்கணிதத்தில் ஒரு சார்பின் மாற்ற வீதம் பற்றிய கருத்து முக்கியத்துவம் பெறுகின்றது. ஒரு சார்பனது எப்போதும் ஒரு சீரான வீதத்தில் மாறுவதில்லை. எனவே ஒரு புள்ளியில் ஏற்படும் மாற்ற வீதத்தை காண்பது தேவைப்படுகின்றது.

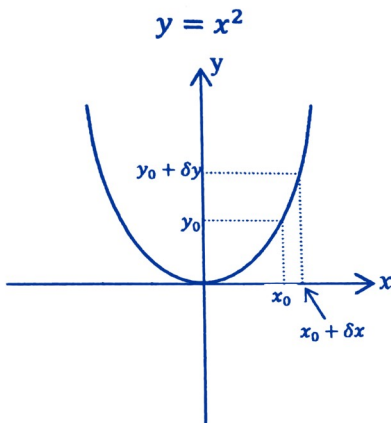
ஏற்றம்

Y என்பது x இன் சார்பு எனக் கொள்வோம் பொதுவாக x இல் உண்டாகும் மாற்றத்திற்கு ஒத்ததாக Y இலும் மாற்றம் ஏற்படும். ஒவ்வொரு மாறியிலும் ஏற்படும் மிகச்சிறிய மாற்றத்தை ஏற்றம் என அழைக்கின்றோம். இது நேரானதாகவோ அல்லது மறையானதாகவோ இருக்கலாம் x இல் ஏற்படும் ஏற்றத்தை δx அல்லது Δx அல்லது h இனால் குறிக்கலாம். இதற்கு ஒத்ததாக y இல் ஏற்படும் ஏற்றத்தை δy அல்லது Δy அல்லது k இனால் குறிக்கலாம்.

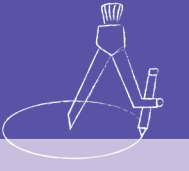
2.2 புள்ளியொன்றில் சார்பின் வகையீட்டுக்குணகம்

$y=x^2$ என்ற வளையியைக் கருதுக.

வளையி மீதுள்ள புள்ளி (x_0, y_0) என்க.



$$\begin{aligned} y_0 &= x_0^2 \\ y_0 + \delta y &= (x_0 + \delta x)^2 \\ y_0 + \delta y &= x_0^2 + 2x_0\delta x + \delta x^2 \\ \delta y &= 2x_0\delta x + \delta x^2 \\ \frac{\delta y}{\delta x} &= 2x_0 + \delta x \end{aligned}$$



இவ்விகிதம் x_0 இலிருந்து $x_0 + \delta x$ வரையுள்ள இடைவெளியில் சார்பானது பெறும் சராசரி மாற்றத்தைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

$\delta x \rightarrow 0$ ஆகும்போது இவ் விகிதம் ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகுமாயின் இவ் எல்லை $x=x_0$ என்னும் இடத்தில் உள்ள சார்பின் மாற்ற வீதத்தைத் தரும். இது $x=x_0$ இல் y இன் வகையீட்டுக் குணகம் அல்லது பெறுதி எனப்படும்.

இதை $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ இனால் குறிக்கலாம்.

வகையீட்டுக்குணகத்தைக் காணும் செய்கை வகையிடல் எனப்படும்.

2.3 பெறுதிச் சார்பு

$f(x)$ என்பது x இன் சார்பு எனக்கொள்வோம்.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ இற்கு முடிவுள்ள எல்லை இருக்குமாயின் இது f என்ற சார்பின்

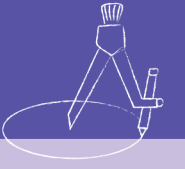
பெறுதிச்சார்பு எனப்படும் இதை f' அல்லது $\frac{df}{dx}$ இனால் குறிக்கலாம்.

அதாவது $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x) = 3x^2$ எனின் $f'(x)$ ஐக் காண்க.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 3x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{6x + 3h\} \\ &= 6x \end{aligned}$$





$f(x) = \sqrt{x}$ எனின் ஐக் $f'(x)$ ஐக்காண்க.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$



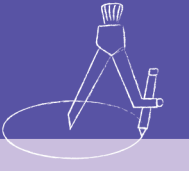
$f(x) = \frac{2}{x}$ எனின் $x=1$ இல் $f'(x)$ ஐக் காண்க.



$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+h)} - \frac{2}{1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2-2h}{h(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+h} \\ &= -2. \end{aligned}$$

வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெறுதியைக் காணுதல் முதற் தத்துவங்களிலிருந்து பெறுதியைக் காணுதல் எனப்படும்





தேற்றம் 01

$\frac{d}{dx}\{c\} = 0$; இங்கு c ஒரு மாறிலி ஆகும்.

நிறுவல்

$f(x) = c$ என்க.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

தேற்றம் 02

$\frac{d}{dx}\{x^n\} = nx^{n-1}$; இங்கு n ஒரு விகிதமுறு எண்.

நிறுவல்

$f(x) = x^n$ என்க.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{(x+h) \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x} = nx^{n-1}$$



பின்வருவனவற்றை x குறித்து வகையிடுக.

01 x^{12}

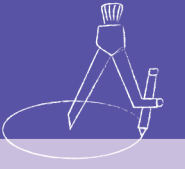
02 x^{-6}

03 $\sqrt[3]{x}$

04 $x^{\frac{2}{3}}$

05 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

06 $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$



$$\textcircled{01} \frac{d}{dx}\{x^{12}\} = 12x^{11}$$

$$\textcircled{03} \frac{d}{dx}\{x^{\frac{2}{3}}\} = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\textcircled{05} \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right\} = \frac{d}{dx}\{x^{-\frac{1}{3}}\} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$\textcircled{02} \frac{d}{dx}\{x^{-6}\} = -6x^{-7}$$

$$\textcircled{04} \frac{d}{dx}\{\sqrt[3]{x}\} = \frac{d}{dx}\{x^{\frac{2}{3}}\} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$\textcircled{06} \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right\} = \frac{d}{dx}\{x^{\frac{2}{3}}\} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

தேற்றம் 03

$\frac{d}{dx}\{kf(x)\} = k \frac{d}{dx}\{f(x)\}$; இங்கு k ஒரு மாறிலி ஆகும்.

நிறுவல்



$F(x) = kf(x)$ என்க.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} = k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= k \frac{d}{dx}\{f(x)\} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\{5x^4\} \text{ ஐக்காண்க.}$$

$$\frac{d}{dx}\{5x^4\} = 5 \frac{d}{dx}\{x^4\} = 5 \times 4x^3 = 20x^3$$

உதாரணம் 46



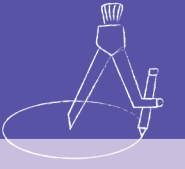
தேற்றம் 04

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

நிறுவல்

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + g(x) \\ F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{d}{dx}\{f(x)\} + \frac{d}{dx}\{g(x)\} \end{aligned}$$





$\frac{d}{dx}\{4x^3 + 2x^2 + 5x + 8\}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{d}{dx}\{4x^3 + 2x^2 + 5x + 8\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{4x^3\} + \frac{d}{dx}\{2x^2\} + \frac{d}{dx}\{5x\} + \frac{d}{dx}\{8\}$$

$$= 4 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 5 + 0 = 12x^2 + 4x + 5$$

தேற்றம் 05

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = \frac{d}{dx}\{f(x)\} - \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$



நிறுவல்

$$F(x) = f(x) - g(x) \quad \text{என்க.}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) + g(x+h)\} - \{f(x) + g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\} + \{+g(x+h) - g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}\{f(x)\} - \frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

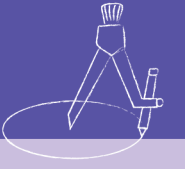
$\frac{d}{dx}\{3x^3 - 2x^2\}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{d}{dx}\{3x^3 - 2x^2\}$$

$$= \frac{d}{dx}\{3x^3\} - \frac{d}{dx}\{2x^2\}$$

$$= 3 \times 3x^2 - 2 \times 2x = 9x^2 - 4x$$





தேற்றம் 06

$$\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\} = f(x)\frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x)\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

நிறுவல்

$$F(x) = f(x).g(x) \quad \text{என்க.}$$

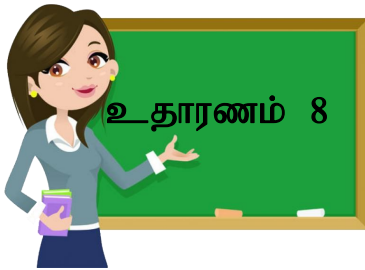
$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h).g(x+h)\} - \{f(x).g(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)\{g(x+h) - g(x)\} + g(x)\{f(x+h) - f(x)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h). \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} + g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\}$$

$$= f(x) \frac{d}{dx}\{g(x)\} + g(x) \frac{d}{dx}\{f(x)\}$$



உதாரணம் 8

$$\frac{d}{dx}\{(2x+1)(3x-2)\} \text{ ஐக் காண்க.}$$

$$\frac{d}{dx}\{(2x+1)(3x-2)\}$$

$$= (2x+1) \frac{d}{dx}\{3x-2\} + (3x-2) \frac{d}{dx}\{2x+1\}$$

$$= (2x+1).3 + \{3x-2\}.2 = 12x - 1$$

பயிற்சி

பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக

1. $(2x-3)(3x+2)$

2. $(5x-3)(4x+2)$

3. $(3x-1)(5x+1)$

4. $(5x+13)(7x+2)$

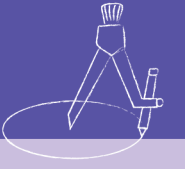
5. $(2x+7)(3x+4)$

6. $(8x-3)(4x+3)$

7. $(11x-3)(13x+2)$

8. $(4-5x)(x+2)$

9. $(15x-13)(14x+2)$



10. $(4 - \frac{1}{2}x)(\frac{3}{2}x + 2)$

11. $(4 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 2)$

12. $(x^2 + 3)(3x^2 - 4)$

14. $(5x^4 - 2)(4x^4 - 7)$

15. $(5x + 3)(3x + 4)(5x - 2)$

தேற்றம் 07

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \left\{ \frac{g(x) \frac{d}{dx} \{f(x)\} - f(x) \frac{d}{dx} \{g(x)\}}{\{g(x)\}^2} \right\}$$

நிறுவல்

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ என்க.

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

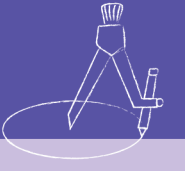
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)\{f(x+h) - f(x)\} - f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} h\{g(x+h) \cdot g(x)\}}$$

$$= \frac{g(x) \frac{d}{dx} \{f(x)\} - f(x) \frac{d}{dx} \{g(x)\}}{\{g(x)\}^2}$$





$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{2x-5}{3x+1} \right\} \text{ ஐக் காண்க.}$$



$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{2x-5}{3x+1} \right\} = \frac{(3x+1) \frac{d}{dx} (2x-5) - (2x-5) \frac{d}{dx} (3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{(3x+1)2 - (2x-5)3}{(3x+1)^2} = \frac{17}{(3x+1)^2}$$

பயிற்சி

1. $\frac{x+3}{x-2}$

2. $\frac{x+1}{x-1}$

3. $\frac{2x+1}{3x+2}$

4. $\frac{5x+3}{3x-1}$

5. $\frac{2x+3}{3x-5}$

6. $\frac{4x+3}{3x-2}$

7. $\frac{4-5x}{x-1}$

8. $\frac{x^2+3}{3x^2+4}$

9. $\frac{4+\frac{1}{2}x}{\frac{3}{2}x+2}$

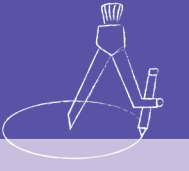
10. $\frac{x+4}{2x^2-3}$

11. $\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

12. $\frac{5x^4-2}{4x^4-7}$

13. $\frac{5x^2+3x-1}{4x+2}$

14. $\frac{(5x-3)(7x+4)}{5x+2}$



தேற்றம் 08 (சார்பின் சார்பினது வகையீடு)

y என்பது z இன் ஒரு சார்பாகவும் z என்பது x இன் ஒரு சார்பாகவும் இருப்பின் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$ ஆகும். இது சங்கிலி விதி எனவும் அழைக்கப்படும்.

நிறுவல்



x இன் சிறிய ஏற்றம் δx இற்கு ஒத்த y, z இன் சிறிய ஏற்றங்கள் முறையே $\delta y, \delta z$ எனக்கொள்வோம்.

$$\delta x \rightarrow 0 \text{ ஆக } \delta y \rightarrow 0, \delta z \rightarrow 0$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} \Rightarrow \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta z} \cdot \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta z}{\delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dy} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

இது தேற்றம் 08 இன் ஒரு கிளைத்தேற்றமாகும்.



உதாரணம் 10

$$y = (2x + 3)^8 \text{ எனின் } \frac{dy}{dx} \text{ ஐக் காண்க}$$

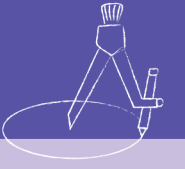
$$z = 2x + 3 \text{ என்க.}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2$$

$$y = z^8$$

$$\frac{dy}{dz} = 8z^7$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8z^7 \cdot 2 = 16(2x + 3)^7$$



$$\frac{d}{dx}\{(2x+3)^8\} = \frac{d}{d(2x+3)}\{(2x+3)^8\} \cdot \frac{d}{dx}\{2x+3\} = 8(2x+3)^7 \times 2 = 16(2x+3)^7$$

$y = (2x^2 + 1)^{10}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = 10(2x^2 + 1)^9 \frac{d}{dx}(2x^2 + 1) = 10(2x^2 + 1)^9 4x = 40x(2x^2 + 1)^9$$



$y = (3x^2 - 5x)^3$ எனின் $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ ஐக் காண்க

$$\frac{dy}{dx} = 3(3x^2 - 5x)^2 \frac{d}{dx}(3x^2 - 5x) = 3(3x^2 - 5x)^2 (6x - 5)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 3(3 - 5)^2 (6 - 5) = 12$$

$y = \sqrt{4x^2 + 1}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(4x^2 + 1) = \frac{1}{2}(4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} 8x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$



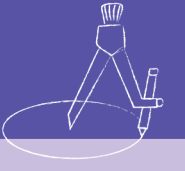
$y = (2x+3)^2(3x+2)^2$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = (2x+3)^2 \frac{d}{dx}\{(3x+2)^2\} + (3x+2)^2 \frac{d}{dx}\{(2x+3)^2\}$$

$$= (2x+3)^2 \cdot 2(3x+2)3 + (3x+2)^2 2(2x+3)2$$

$$= 2(2x+3)(3x+2)\{3(2x+3) + 2(3x+2)\}$$

$$= 2(2x+3)(3x+2)(12x+13)$$



$y = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1}}$ எனின் $\frac{dy}{dx}$ ஐக் காண்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}} \cdot \frac{(2x^2 + 1)2x - (x^2 + 1)4x}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}} \cdot \frac{-2x}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$= - \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}} \cdot \frac{x}{(2x^2 + 1)^2}$$



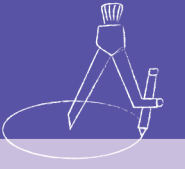
x^2 குறித்து $\frac{x+1}{x-1}$ இன் வகையீட்டுக் குணகத்தைக் காண்க.

$z = x^2, y = \frac{x+1}{x-1}$ என்க.

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)1 - (x+1)1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dx}} = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = -\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2x} = -\frac{1}{x(x-1)^2}$$



பயிற்சி 2C

பின்வரும் சார்புகளை x குறித்து வகையிடுக.

01 $(4x + 5)^4$

02 $\sqrt{3x^2 + 1}$

03 $\sqrt{(3x - 1)(4x + 3)}$

04 $(x^2 - 3)^2(3x^2 + 2)^2$

05 $\frac{1}{(3x + 2)^2}$

06 $\sqrt{\frac{2x + 3}{3x - 2}}$

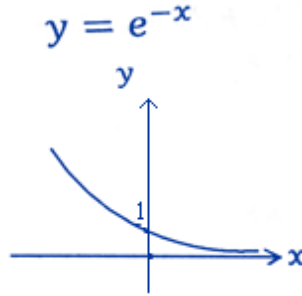
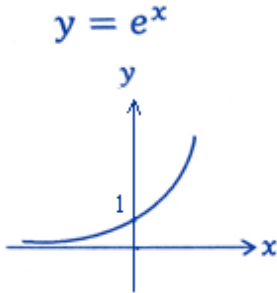
07 $\frac{(4 - \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x} + 2)^3}$

08 $\left(\frac{4x + 3}{3x - 2}\right)^2$

09 $\frac{5x^2 + 3x - 1}{(4x + 2)^2}$

10 $\frac{(5x - 3)^2}{5x + 2}$

2.4 அடுக்குக்குறிச் சார்பின் பெறுதி



இங்கு $e = 2.718282..$ ஒரு விகிதமுறா எண்.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

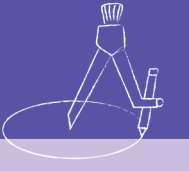
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$



இம் முடிவை நிறுவலின்றிப் பிரயோகிக்க முடியும்.



தேற்றம் 09

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$



நிறுவல்

$$f(x) = e^x \quad \text{என்க.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} \\ &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = e^x \times 1 = e^x \end{aligned}$$



$$\frac{d}{dx}(e^z) = \frac{d}{dz}(e^z) \cdot \frac{dz}{dx} = e^z \frac{dz}{dx}$$