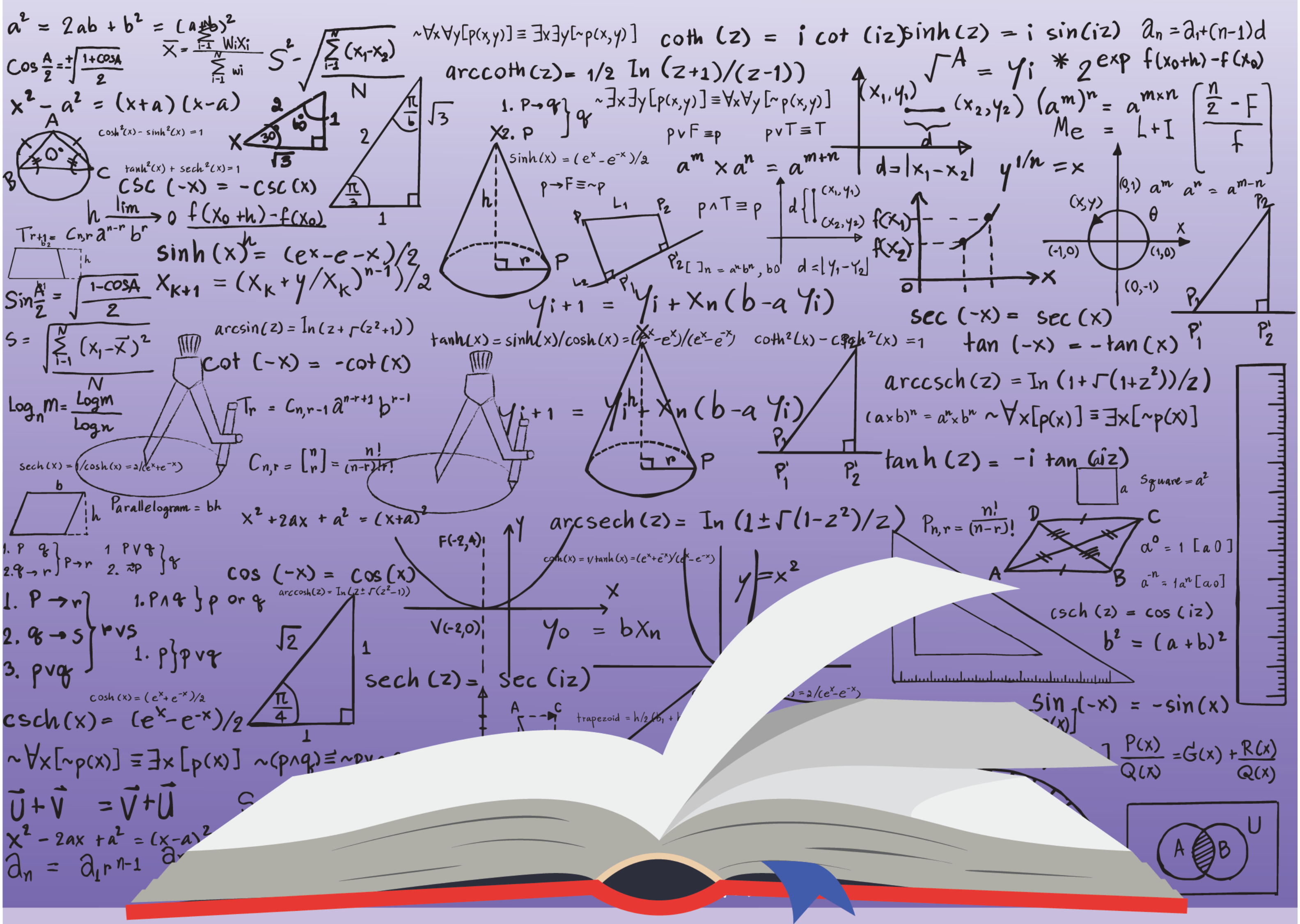
இணைந்த கணிதம்

எறியங்கள்

(Projectile)



e தக்ஸலாவ கல்விக்கூடம்

The National e-learning Portal for The General Education

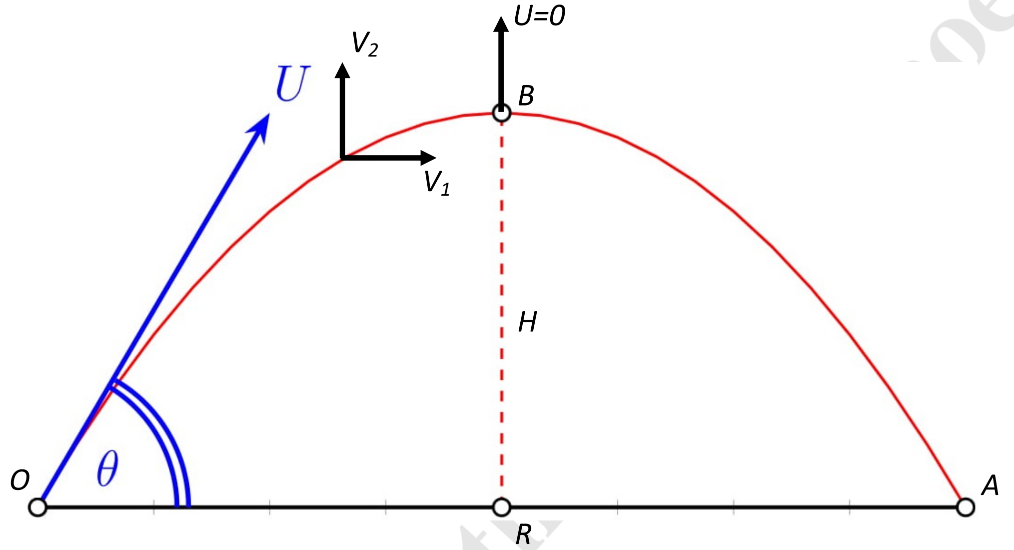
Start Your Learning Journey with e-thaksalawa

தேர்ச்சி மட்டம் 3.7

நிலைக்குத்தியக்கம்

ஒரு துணிக்கையை குறித்த வேகத்துடன் நிலைக்குத்தாக வீசும் போது அது புவியீர்ப்பின் கீழ் நிலைக்குத்து கோட்டில் இயங்கும்.

ஒரு துணிக்கையை வேகத்துடன் ஒரு கோணத்தில் சாய்வாக ஈர்ப்பின் கீழ் வீசும் போது அது ஒரு வளையி வழியே இயங்கும். தடை விசைகள் இன்றி நிறைமட்டுமே துணிக்கையில் செயற்படும்.



- கிடைத்திசையில் ஆர்முடுகல் பூச்சியம்
- நிலைக்குத்து திசையில் ஆர்முடுகல் புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல் g ↓ ஆகும்.

1. $v = u + at$ ஐப் பிரயோகிப்பின்

$V_1 = u\,\text{Cos}\theta + 0$

$\therefore$ கிடைத்திசையில் வேகம் எப்போதும் $u\,\text{Cos}\theta$ ஆகும்.

$\uparrow V_2 = u\,\text{Sin}\theta - gt$ நிலைக்குத்து வேகம் மாறும்.

2. பறப்பு நேரம் காணல் (இயக்கத்திலுள்ள முழுநேரம்)

$\uparrow s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad O \rightarrow A$

$o = u\,\text{Sin}\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

$o = t/2\,(2u\,\text{Sin}\theta - gt)$

$\therefore t = 0, \quad \frac{2u\,\text{Sin}\theta}{g}$

$\therefore$ பறப்பு நேரம் $\frac{2u\text{Sin}\theta}{g} = T$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

3. எறிபுள்ளியூடான கிடைவீச்சைக் காணல்

→ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ O → A

$R = u\,Cos\theta . \frac{2u\,Sin\theta}{g} + 0$

$R = 2\frac{u^2}{g}Sin\theta . Cos\theta$

$R = \frac{u^2}{g}Sin2\theta$

கிடைவீச்சு $R = \frac{u^2}{g}Sin2\theta$

எறியக்கோணம் (*Angle of Projection*): பொருள் வீசப்படும் திசை கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் எறியற்கோணம் அல்லது வீசற்கோணம் எனப்படும்.

4. உயர்கிடைவீச்சைக் காணல்

$R = \frac{u^2 Sin2\theta}{g}$

$R \le \frac{u^2}{g}$ அதாவது $Sin2\theta \le 1$

$R_{max} = \frac{u^2}{g}$

$Sin2\theta = 1$ ஆகும் போது

$2\theta = \pi/2$

$\theta = \pi/4$

5. ஒரே வீச்சைப் பெறுவதற்கு இருவேறு திசைகளில் வீசலாம் எனக்காட்டல்

$R = \frac{u^2}{g}Sin2\theta$

$\theta = \alpha$ ஆகும் போது

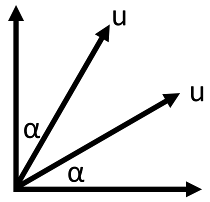
$R = \frac{u^2}{g}Sin2\alpha$

$= \frac{u^2}{g}Sin2(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ என எழுதலாம்

∴ எறியற்கோணம் α, அல்லது π/2-α ஆகும் போது ஒரே கிடைவீச்சு பெறப்படும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

அதாவது கிடையுடன் அல்லது நிலைக்குத்துடன்
சம சாய்வில் வீசும் போது ஒரே கிடைவீச்சு பெறப்படும்.



6. அதியுயரத்தைக் காணல்

அதியுயரத்தை அடையும் போது நிலைக்குத்து வேகம் பூச்சியமாகும்.

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as \quad O \rightarrow B$

$0 = (u\sin\theta)^2 - 2gH$

$$H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

$\uparrow v = u + at \quad O \rightarrow B$

$0 = u\sin\theta - gt$

$$t = \frac{u\sin\theta}{g}$$

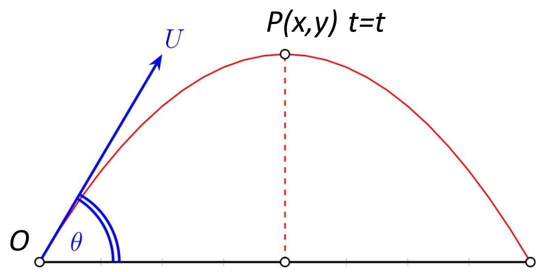
அதியுயரத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம், பறப்பு நேரத்தின் அரைப்பங்கு ஆகும்.

எறியப் பாதையின் சமன்பாடு காணல்

$O \rightarrow P \qquad \rightarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$x = u\cos\theta t$

$$t = \frac{x}{u\cos\theta}$$



$\uparrow y = u\sin\theta . t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y = u\sin\theta . \frac{x}{u\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

$$= x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$$

$$= x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}(1 + \tan^2\theta)$$

குறிப்பு: 1. இச்சமன்பாடு x இன் இருபடிச்சமன்பாடு ஆதலால் குறித்த y இன் பெறுமானத்திற்கு x இற்கு இரு பெறுமானங்கள் உண்டு,

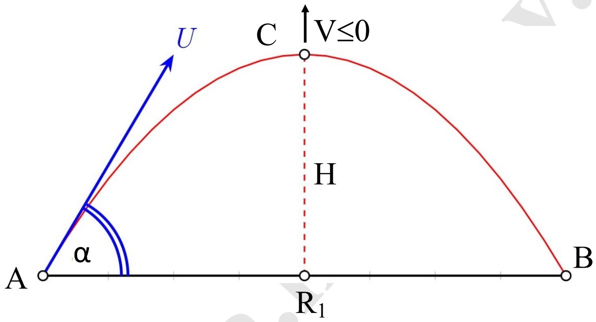
குறிப்பு: 2. tanθ இன் இருபடிச்சமன்பாடாக கருதும் போது குறித்த (x,y) இற்கு tanθ இரு பெறுமானங்கள் உண்டு.

அதாவது குறித்த ஒரு புள்ளியூடாக செல்லுமாறு இருவேறு திசைகளில் வீசலாம்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 1.

u வேகத்துடன் கிடையுடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கையின் அதியுயர் கிடைவீச்சு R எனின் எய்திய அதியுயரம் ¼R எனக் காட்டுக.



A→B ↑$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$0 = uSin\alpha - \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{2uSin\alpha}{g}$$

$$R_1 = uCos.t$$

$$= uCos\alpha.2\frac{uSin\alpha}{g}/\alpha$$

$$= \frac{u^2}{g}Sin2\alpha$$

R_1 உயர்வு $= \frac{u^2}{g} = R$ (அதாவது α=π/4)

A→C ↑$v^2 = u^2 + 2as$

$$0 = (uSin.\alpha)^2 - 2gH$$

$$H = \frac{u^2Sin^2\alpha}{2g}$$

$$= \frac{u^2}{g}.\frac{1}{2}.Sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$= R.\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$$

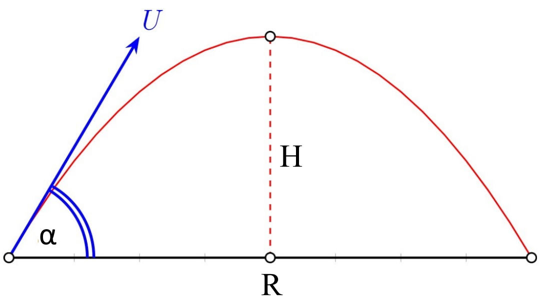
$$= \frac{R}{4}$$

உதாரணம் 2

u வேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் ஒரு துணிக்கை வீசப்பட்டது. கிடைவீச்சானது, அடைந்த அதியுயர் உயரத்தின் இருமடங்கு எனின்

(1) எறியக் கோணத்தைக் காண்க.

(2) கிடைவீச்சைக் காண்க.



$$H = \frac{u^2Sin^2\alpha}{2g}$$

$$R = \frac{2u^2Sin\ \alpha.Cos\alpha}{g}$$

$$\frac{H}{R} = \frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}.\frac{1}{4}$$

R = 2H (தரவு)

$\therefore tan\alpha = 2$

$$R = \frac{2u^2}{g}Sin\alpha.Cos\alpha$$

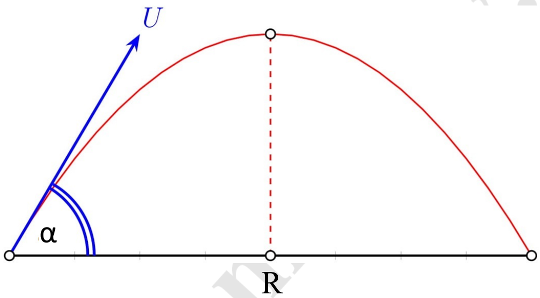
$$= \frac{2u^2}{g}.\frac{2}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4u^2}{5g}$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 3

u வேகத்தில் கிடையுடன் θ கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கை T நேரத்தில் R என்ற கிடைவீச்சை அடைகிறது. $\tan\theta = \frac{gT^2}{2R}$ எனக் காட்டுக.



$$T = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$$R = 2\frac{u^2}{g}\sin\theta.\cos\theta$$

$$R = 2\frac{u^2}{g}\sin\theta.\cos\theta$$

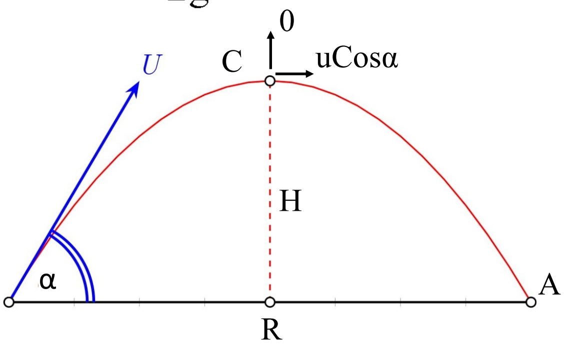
$$T^2 = 4\frac{u^2}{g^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{T^2}{R} = \frac{2\sin\theta}{g\cos\theta}$$

$$\frac{T^2 g}{2R} = \tan\theta$$

உதாரணம் 4

u வேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கையின் அதியுயர் புள்ளியிலுள்ள வேகம் எறியல் வேகத்தின் அரைப்பங்கு எனின் கிடைவீச்சு $\frac{u^2\sqrt{3}}{2g}$ எனக்காட்டுக.



$$u\cos\alpha = \frac{1}{2}u$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$R = 2\frac{u^2}{g}\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$R = 2\frac{u^2}{g}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$= \frac{u^2\sqrt{3}}{2g}$$

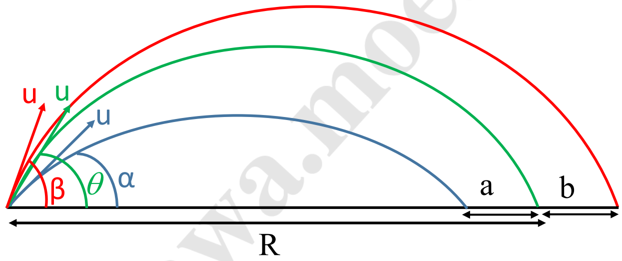
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 5

எறியப்புள்ளியூடான கிடைத்திசையிலுள்ள குறித்த புள்ளியை அடைவதற்கு θ ஏற்றக் கோணத்தில் u வேகத்துடன் வீச வேண்டும். ஆனால் α ஏற்றக் கோணத்தில் u வேகத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கை குறித்த புள்ளிக்கு a தூரம் முன்னே விழுகிறது. β ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கை (அதே வேகத்தில்) குறித்த புள்ளிக்கு b தூரம் பின்னே விழுகிறது எனின் $\text{Sin}2\theta = \dfrac{a\text{Sin}2\beta + b\text{Sin}2\alpha}{a+b}$ எனக் காட்டுக.



$$R - a = \frac{u^2}{g}\text{Sin}.2\alpha \longrightarrow (1)$$

$$R + b = \frac{u^2}{g}\text{Sin}.2\beta \longrightarrow (2)$$

$$R = \frac{u^2}{g}\text{Sin}.2.\theta \longrightarrow (3)$$

$$(1).b + (2).a \Rightarrow R.(a+b) = \frac{u^2}{g}(b\text{Sin}2\alpha + a\text{Sin}2\beta)$$

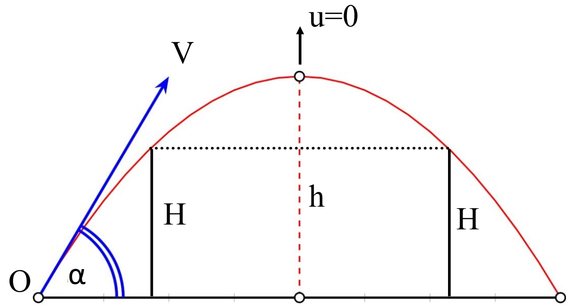
$$= \frac{R}{\text{Sin}2\theta}(b\text{Sin}2\alpha + a\text{Sin}2\beta)$$

$$(a+b)\text{Sin}2\theta = b\text{Sin}2\alpha + a\text{Sin}2\beta$$

$$\text{Sin}2\theta = \frac{b\text{Sin}2\alpha + a\text{Sin}2\beta}{a+b}$$

உதாரணம் 6

α ஏற்றக் கோணத்தில் v வேகத்துடன் எறியப்பட்ட துணிக்கை h என்ற அதியுரத்தை அடைகிறது. அது தனது பாதையில் $h\text{Sin}^2\alpha$ உயரங்களில் இருக்கும் நேரங்களின் வித்தியாசத்தைக் காண்க.



$$H = h\text{Sin}^2\alpha$$

$$O \to A \uparrow s = ut + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$H = v\text{Sin}\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$gt^2 - 2v\text{Sin}\alpha t + 2H = 0$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2v\text{Sin}\alpha}{g}, t_1 t_2 = \frac{2H}{g}$$

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2) - 4t_1 t_2$$

$$= \frac{4v^2\text{Sin}^2\alpha}{g} - 4.2\frac{H}{g}$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

$$= 4v^2\frac{Sin^2\alpha}{g^2} - \frac{8}{g}hSin^2\alpha$$

$$= \frac{4v^2}{g^2}Sin^2\alpha - \frac{8}{g}Sin^2\alpha.\frac{v^2Sin^2\alpha}{2g}$$

$$= \frac{4v^2}{g^2}Sin^2\alpha(1 - Sin^2\alpha)$$

$$= \frac{4v^2}{g^2}Sin^2\alpha.Cos^2\alpha$$

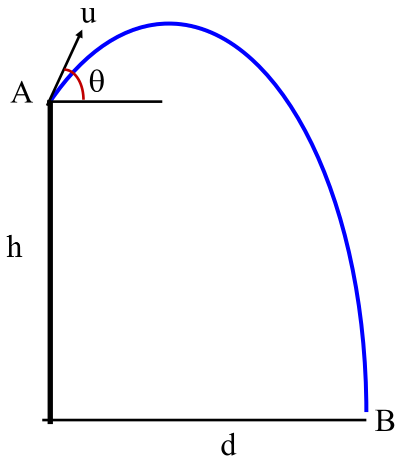
$$= 4\frac{2h}{g}Cos^2\alpha$$

$$= \frac{8h}{g}Cos^2\alpha$$

$$t_1 - t_2 = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}Cos\alpha$$

உதாரணம் 7

h உயரமான கோபுர உச்சியில் இருந்து u வேகத்துடன் வீசப்படும் துணிக்கை கோபுரத்தின் அடியூடான கிடைத்தளத்தை கோபுரத்தின் அடியில் இருந்து d தூரத்தில் சந்திக்கிறது. எனின் $u^2 \geq g[\sqrt{h^2 + d^2} - h]$ எனக் காட்டுக.



$$A \to B \uparrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$-h = uSin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-h = uSin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\to d = uCos\theta.t$$

$$-h = d\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gd^2}{u^2}(1 + \tan^2\theta)$$

$$gd^2\tan^2\theta - 2u^2d\tan\theta + gd^2 - 2u^2h = 0$$

$tan\theta$ இன் மெய்ப் பெறுமானங்களுக்கு

$$\Delta \geq 0$$

$$4u^4d^2 - 4gd^2(gd^2 - 2u^2h) \geq 0$$

$$u^4 + 2ghu^2 - g^2d^2 \geq 0$$

$$(u^2 + gh)^2 - g^2h^2 - g^2d^2 \geq 0$$

$$(u^2 + gh)^2 - (g\sqrt{h^2 + d^2})^2 \geq 0$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

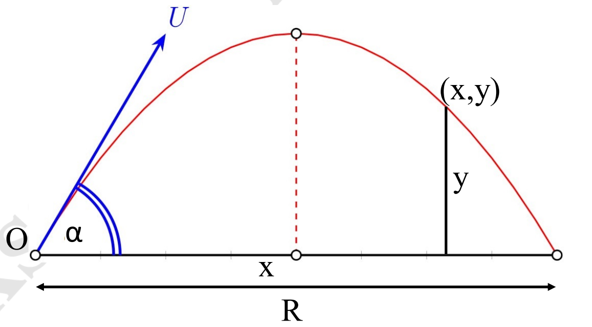
$$[u^2 + gh + g\sqrt{h^2 + d^2}][u^2 + gh - g\sqrt{h^2 + d^2}] = 0$$

$$u^2 + gh + g\sqrt{h^2 + d^2} > 0 \Rightarrow u^2 + gh - g\sqrt{h^2 + d^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u^2 \geq g[\sqrt{h^2 + d^2} - h]$$

உதாரணம் 8

நிலத்திலிருந்து ஒரு துணிக்கை α ஏற்றக்கோணத்தில் u வேகத்துடன் வீசப்படும் போது அதன் எறிபுள்ளியூடான கிடைவீச்சு R எனின் எறியற்பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha(1 - {}^{x}/_{R})$ எனக் காட்டுக.



$$\rightarrow x = u\cos\alpha . t$$

$$\uparrow y = u\sin\alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha) \rightarrow (1)$$

(R,O) ஐ மேலுள்ள சமன்பாடு திருப்தி செய்வதால்

$$0 = R\tan\alpha - \frac{gR^2}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha)$$

$$\frac{g}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha) = \frac{\tan\alpha}{R}$$

$$(1) \Rightarrow y = x\tan\alpha - x^2\frac{\tan\alpha}{R}$$

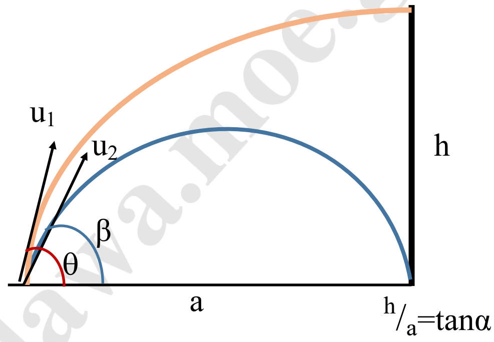
$$y = x\tan\alpha(1 - \frac{x}{R})$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 9

ஒரு நிலைக்குத்துக் கம்பம் அதன் அடியூடாக செல்லும் கிடைத்தளத்திலுள்ள புள்ளி A இல் α கோணத்தை அமைக்கின்றது. θ,β ஏற்றக்கோணங்களில் இரு துணிக்கைகள் A இலிருந்து ஒரே நேரத்தில் வீசப்படுகின்றன. முதற்துணிக்கை கம்பத்தின் உச்சியில் படும் அதேநேரம் இரண்டாம் துணிக்கை கம்பத்தின் அடியில் படுகிறது. $\tan\theta - \tan\beta = \tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

1ம் துணிக்கை



$$\rightarrow a = u_1 \text{Cos}\theta.t \rightarrow (1)$$
$$\uparrow h = u_1 \text{Sin}\theta t - \tfrac{1}{2}gt^2 \rightarrow (2)$$

2ம் துணிக்கை

$$\rightarrow a = u_2 \text{Cos}\beta t \rightarrow (3)$$
$$\uparrow 0 = u_2 \text{Sin}\beta t - \tfrac{1}{2}gt^2 \rightarrow (4)$$
$$(1) + (3) \Rightarrow u_1 \text{Cos}\theta = u_2 \text{Cos}\beta \rightarrow (5)$$
$$(2) - (4) \Rightarrow h = (u_1 \text{Sin}\theta - u_2 \text{Sin}\beta)t \rightarrow (6)$$
$$(6)/(5) \Rightarrow \frac{h}{u_1 \text{Cos}\theta} = (\tan\theta - \tan\beta)t$$
$$\frac{h}{a}.t = (\tan\theta - \tan\beta)t$$
$$\tan\alpha = \tan\theta - \tan\beta$$

பயிற்சிகள்

1. ஒருவர் துணிக்கை ஒன்றை நிலைக்குத்தாக h உயரத்திற்கு எறிய முடியும். அதே வேகத்துடன் சாய்வாக எறியும் போது அடையும் உயர்கிடைவீச்சு 2h எனக் காட்டுக.

2. கிடைத்தரையில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து வீசப்பட்ட துணிக்கை தன்பாதையில் உள்ள புள்ளி A யைக் கடக்க எடுக்கும் நேரம் t_1 ஆகவும் A இலிருந்து மீண்டும் நிலத்தை அடைய எடுக்கும் நேரம் t_2 ஆகவும் இருப்பின் புள்ளி A இன் உயரம் $\tfrac{1}{2}gt_1t_2$ எனக் காட்டுக.

3. துணிக்கை ஒன்று சாய்வாக வீசப்படும் போது கிடைவீச்சானது அதியுயரத்தின் நான்கு மடங்காயின் எறியல் கோணத்தைக் காண்க.

4. இருதுணிக்கைகள் ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரே வேகம் u உடன் கிடையுடன் 30^o, 60^o கோணங்களில் ஒரே நிலைக்குத்து தளத்தில் வீசப்பட்டால் அவை மீண்டும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கும் எனக் காட்டுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

5. α ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கை, t நேரத்தின் பின் எறிபுள்ளியில் இருந்து β ஏற்றக் கோணத்தில் காணப்படின் எறியல் வேகம் $\frac{gtCos\beta}{2Sin(\alpha-\beta)}$ எனக் காட்டுக.

6. 0 என்ற புள்ளியிலிருந்து u வேகத்துடன் θ ஏற்றக்கோணத்தில் எறியப்பட்ட துணிக்கை தன்பாதையில் உள்ள P(a,b) ஊடாக செல்ல வேண்டிய நிபந்தனை $u^2 \geq g[\sqrt{a^2+b^2}+b]$ எனக் காட்டுக.

7. ஒரு துணிக்கையை h உயரமான கோபுரத்திலிருந்து வீசும் போது அதன் அடியூடான கிடைத்தளத்தில் பெறப்படும் உயர் வீச்சு $\frac{u}{g}\sqrt{u^2+2gh}$ எனக் காட்டுக.

8. எறியல் வேகம் v, பறப்பு வேகம் T, கிடைவீச்சு R ஆகவும் உள்ள எறிபொருள் இயங்குகிறது. $4v^2T^2 = g^2T^2 + 4R^2$ எனக் காட்டுக.

9. ஒருபுள்ளியிலிருந்து வீசப்பட்ட துணிக்கை கிடைத்தூரம் a ஐக் கடந்த பின் வீசற்புள்ளி ஊடான கிடைத்தளத்தைச் சந்திக்கிறது. அது அடைந்த அதியுயரம் h எனின் வீசல் வேகத்தின் கிடை, நிலைக்குத்து கூறுகளைக் காண்க. அது கிடையாக x தூரம் சென்ற போது அடைந்த உயரம் $\frac{4hx(a-x)}{a^2}$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரு எறி பொருள் அதன் மேல் நோக்கிய பாதையில் என்ற (x,y) புள்ளியூடாக செல்கிறது. வீசற்புள்ளி ஊடான கிடைத்தளத்தில் வீச்சு R எனின் வீசற்கோணம் கிடையுடன் $\tan^{-1}\left[\frac{Ry}{x(R-x)}\right]$ எனக் காட்டுக.

11. ஓர் எறிபொருள் α ஏற்றக் கோணத்தில் u வேகத்துடன் வீசப்படுகிறது. அடைந்த அதியுயரம் H எனின் எறியற் பாதையின் சமன்பாடு $y = x\tan\alpha(1-\frac{x\tan\alpha}{4H})$ எனக் காட்டுக.

12. u வேகத்துடன் α ஏற்றக் கோணத்தில் வீசப்பட்ட துணிக்கை தன்பாதையில் (d_1, h_1), (d_2, h_2) ஆகிய புள்ளிகள் ஊடாகச் $\tan\alpha = \frac{d_2^2h_1 - d_1^2h_2}{d_1d_2(d_2-d_1)}$ சென்றால் எனக் காட்டுக.

13. ஓர் எறிபொருளின் கிடைவீச்சு R அடைந்த அதியுயரம் H எனின் எறியல் வேகம் $\left[2g\left(H+\frac{R^2}{16H}\right)\right]^{1/2}$ எனக் காட்டுக.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

14. b உயரமான சுவரின் அடியிலிருந்து a தூரத்திலுள்ள புள்ளியிலிருந்து வீசப்பட்ட துணிக்கை சுவரை மட்டுமட்டாக தாண்டிச் சென்றால் துணிக்கை அடைந்த அதியுயரம் $\dfrac{a^2 \tan^3 \alpha}{4(a \tan \alpha - b)}$ எனக் காட்டுக.

15. ஒரு பந்து இரு சுவர்களை மட்டுமட்டாக கடக்குமாறு வீசப்படுகிறது. முதல்சுவர் வீசற்புள்ளியிலிருந்து b தூரத்தில் a உயரமானது. இரண்டாவது சுவர் வீசற்புள்ளியிலிருந்து a தூரத்தில் b உயரமானது. வீசற்புள்ளியூடான கிடைத்தளத்தில் அதன் வீச்சு $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ எனக் காட்டுக.

அத்துடன் வீசற்கோணம் $\tan^{-1} 3$ இலும் பெரிது எனக் காட்டுக.

*****

தொகுப்பு : திரு. S.V.மகேந்திரன், ஆசிரியர்- இணைந்தகணிதம்(வெளிக்களநிலையம், தொண்டைமானாறு)

கணினி வடிவமைப்பு: திரு. இ.சிவச்செல்வன் ஆசிரியர் - தகவல் தொ. தொழிநுட்பம், (யா/நெடுந்தீவு றோ.க. மகளிர் கல்லூரி)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk