இணைந்த கணிதம்

சட்டப்படல்

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

தொகுப்பு :- திரு ப.விமலநாதன், ஆசிரியர், இணைந்தகணிதம், (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி, யாழ்ப்பாணம்)
கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.யோ.செந்தூரன், ஆசிரியர்-த.தொ.தொ, (யா/மீசாலை வீரசிங்கம் மத்திய கல்லூரி, மீசாலை)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

சட்டப்படல்

இலேசான கோல்களை ஒப்பமாக மூட்டுவதன் மூலம் உருவாக்கப்படும் விறைப்பான சட்டப்படங்கள் சமநிலையில் உள்ளபோது. அம் மூட்டுக்களில் தாக்கும் விசைகளை பருமட்டான விசைப்படம் வரைந்து திரிகோண கணித அறிவின் உதவியுடன் அவற்றைக்கணிக்கும் முறைகள் இப் பகுதியில் ஆர-

சட்டப்படல் (Frame Work)

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் மூட்டுவதால் பெறப்படும் மூடிய உரு சட்டப்படலாகும்.

இப்பாட அலகில் உள்ள பிரசினங்களை தீர்க்கும் போது பின்வரும் விடயங்களை கருத்தில் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

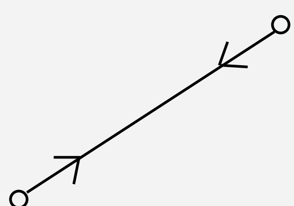
01 சட்டப்படலில் உள்ள கோல்கள் யாவும் இலேசானவை மேலும் அவை முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன.

02 சட்டப்படல்கள் விறைப்பானவை அதாவது புறவிசைகளினால் அதன் வடிவம் மாறாது.

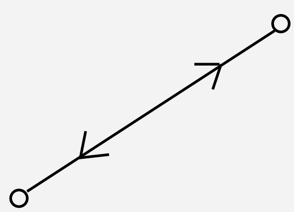
சட்டப்படலில் உள்ள மூட்டுக்களின் எண்ணிக்கை n ஆயின் சட்டப்படலை விறைப்பாகப் பேணுவதற்கு 2n-3 எண்ணிக்கையான கோல்கள் மூட்டப்படவேண்டும்.

03 சட்டப்படலில் உள்ள புறவிசைகள் மூட்டுக்களில் மட்டும் பிரயோகிக்கப்படும்.

04 இலேசான கோல்கள் மூட்டப்பட்டிருப்பதால் மூட்டுக்களில் தாக்கும் மறுதாக்கங்கள் கோல்கள் வழியே காணப்படும். அவை இழுவையாகவோ அல்லது உதைப்பாகவோ இருக்கலாம்.



இழுவை



உதைப்பு

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

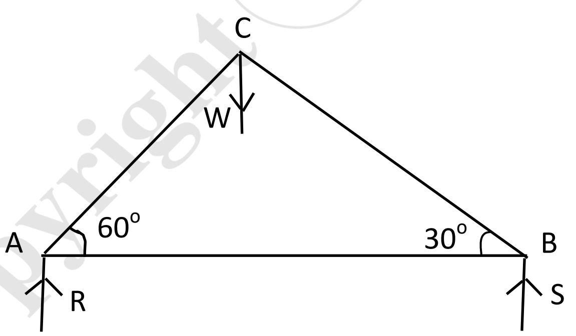
05 சட்டப்படல் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் சமநிலையில் இருக்கும். அதில் தாக்கும் எல்லா விசைகளும் ஒரு தள விசையாகும்.

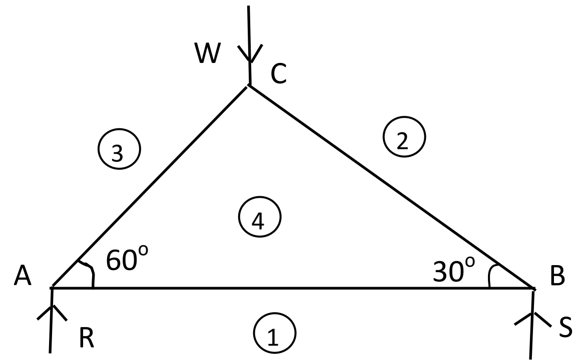
போவின் குறிப்பீடு (Bow's Notation)

விசைகளுக்கு பெயரிடும் ஒரு முறையாகும் இம் முறையில் பின்வரும் விடயங்களை பின்பற்றுதல் வேண்டும்.

01 மூட்டுக்களில் தாக்கும் புறவிசைகளை சட்டப்படலிற்கு வெளியே குறித்தல் வேண்டும்.

02 விசைகளுக்கும் சட்டங்களுக்கும் இடையே உள்ள வெளிகளில் இலக்கங்களை அல்லது சிறிய ஆங்கில எழுத்துக்களை எழுதுவதன் மூலம் பெயரிடப்படும்.





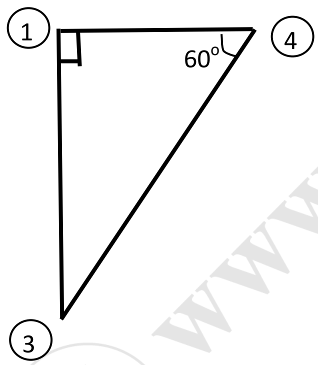
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

தகைப்பு வரிப்படம் (Stress Diagram)

தகைப்பு வரிப்படம் வரையும் போது மூட்டுக்கள் குறித்து இடஞ்சுழிப் போக்கை அல்லது வலஞ்சுழிப்போக்கை பயன்படுத்த முடியும் ஆனால் இருபோக்குகளையும் மாறிமாறிப் பயன்படுத்த முடியாது.

இடஞ்சுழிப் போக்கை பின்பற்றுவோமாயின் மூட்டு A இல் தாக்கும் விசை ↑R (3)(1) ஐ இனால் குறித்தல் வேண்டும். (1)(3) இனால் குறிக்க முடியாது. இவ்வாறே மூட்டு B இல் தாக்கும் விசை S ஐ (1)(2) இனாலும் மூட்டு C இல் தாக்கும் நிறை W ஐ (2)(3) இனாலும் குறித்தல் வேண்டும்

மூட்டு A இல் தாக்கும் விசைகளை வரைவோம்



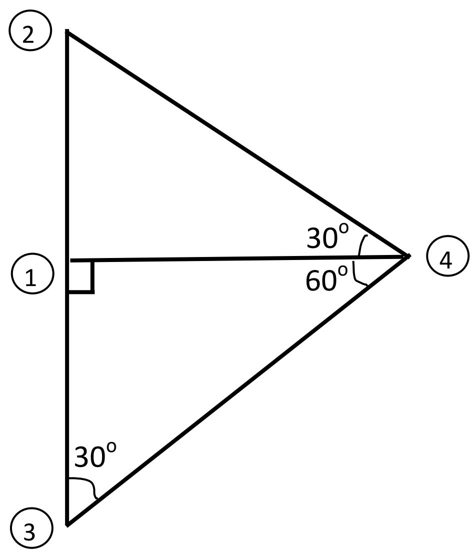
போவின் குறிப்பீட்டில் (3)(1) இனால் குறிக்கப்படும் விசை R மேல்நோக்கி இருப்பதால் இலக்க ஒழுங்கு விசையின் போக்கை காட்டக் கூடியவாறு இலக்கம் (3) கீழேயும் இலக்கம் (1) மேலேயும் அமையுமாறு வரைதல் வேண்டும்.

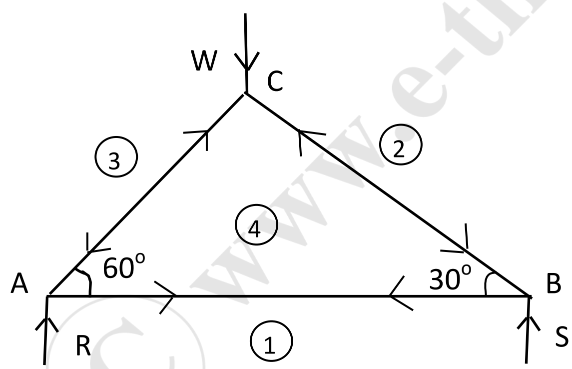
மூட்டு A இல் கோல் AB வழியேயான விசை கிடையாக இருக்கும் அதன்போக்கை மூட்டு A இல் AC வழியே தாக்கும் விசையின் சாய்வைக் கொண்டு இனங்காணுதல் வேண்டும்

மூட்டு A சமநிலையில் இருப்பதால் அதில் தாக்கும் மூன்று விசைகளும் ஒரு முக்கோணியாக (மூடிய பல்கோணி) அமையும்

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

அதே வரிப்படத்தில் மூட்டு B இலும் மூட்டு C இலும் தாக்கும் விசைகளை வரைவோம்.





$$(3)(4) = (2)(3)\cos 30^\circ = W\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(4)(2) = (2)(3)\sin 30^\circ = W\frac{1}{2}$$

$$(1)(4) = (3)(4)\cos 60^\circ = W\frac{\sqrt{3}}{4}$$

மூட்டு A இல் AB வழியே தாக்கும் விசை (1)(4) ஆகும். தகைப்பு வரிப்படத்தில் (1) ⟶ (4) ஆனது ⟶ என்றவாறு அமைகிறது. இது இவ்விசையின் போக்காகும்.

இவ்வாறே விசை (4)(3) இன் போக்கை (4) ⟶ (3) ஐ தகைப்பு வரிப்படத்தில் அவதானித்து ↙ என அறிந்து கொள்ளலாம். ஏனைய மூட்டுக்களில் தாக்கும் விசைகளின் போக்குகளையும் இவ்வாறு அறிந்து கொள்ளலாம்.

தொகுப்பு :- திரு ப.விமலநாதன், ஆசிரியர், இணைந்தகணிதம், (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி, யாழ்ப்பாணம்)
கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.யோ.செந்தூரன், ஆசிரியர்-த.தொ.தொ, (யா/மீசாலை வீரசிங்கம் மத்திய கல்லூரி, மீசாலை)
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

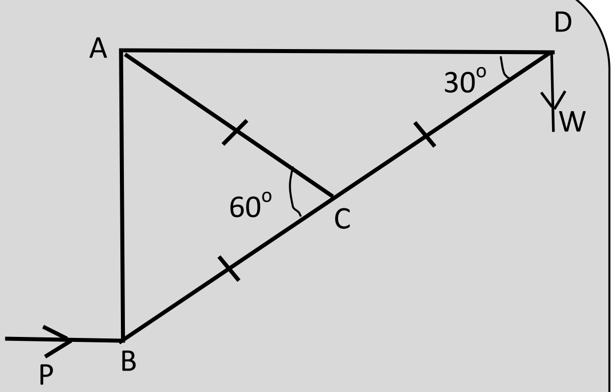
கோல்	இழுவை	உதைப்பு
A B ① ④	$W\frac{\sqrt{3}}{4}$	-
BC ④ ②	-	$\frac{W}{2}$
CA ③ ④	-	$\frac{\sqrt{3}W}{2}$

குறிப்பு :-

முதலில் இரு தெரியாத கணியங்கள் உள்ள மூட்டின் சமநிலையை கருதி விசைப்பல்கோணி வரைதல் வேண்டும். பின்னர் அடுத்துள்ள மூட்டுக்களுக்கு விசைப்பல்கோணியை வரைதல் வேண்டும்.

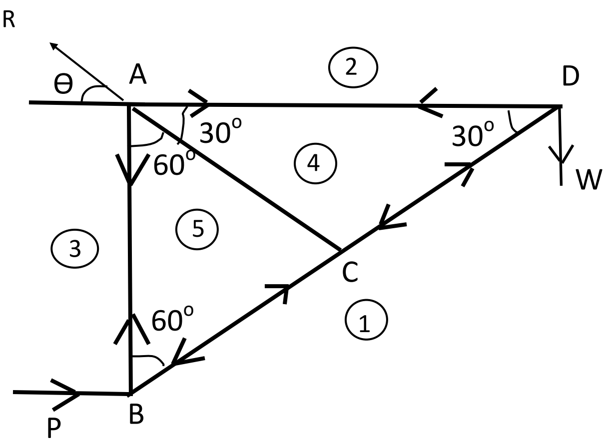
உதாரணம் 01

படத்தில் காட்டியவாறு ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஒப்பமான மூட்டப்பட்ட சட்டப்படலானது மூட்டு A உடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டும் மூட்டு D இல் கட்டித்தொங்கவிடப்பட்ட நிறையின் கீழும் மூட்டு B இல் பிரயோகிக்கின்ற கிடைவிசையின் கீழும் சமநிலையில் உள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலுமுள்ள தகைப்பைக் கண்டு, அவை இழுவையா, உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.

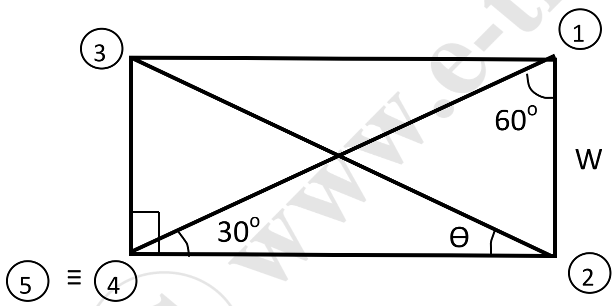


மேலும் P இன் பெறுமானத்தையும் மூட்டு A இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



முதலில் மூட்டு D இலுள்ள விசைகளுக்கு விசைப்பல்கோணி வரைவோம். அடுத்ததாக மூட்டு C இற்கு வரைவோம் பின்னர் மூட்டுக்கள் B,A என்பவற்றை வரைவோம்.



விசைகள் (1)(4) , (1)(5) என்பன சமாந்தரமாகவும் விசை (4)(5) ஆனது இவ்விசைகளுடன் 60^o இலும் அமைய முடியாது. எனவே (4) ≡ (5) அதாவது விசை (4)(5) பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
A B ③ ⑤	W	-
B C ① ⑤	-	2W
C D ① ④	-	2W
D A ② ④	$\sqrt{3}W$	-
A C ⑤ ④	-	-

② ④ $= w \tan 60^0$

$= \sqrt{3}w$

① ④ $= w \sec 60^0$

$= 2w$

P ≡ ③ ① $= \sqrt{3}w$

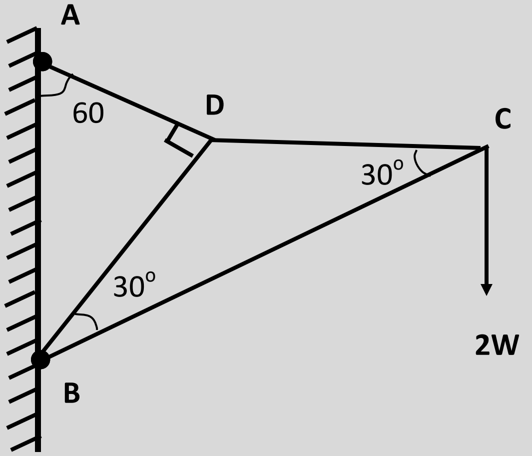
R ≡ ② ③ $= 2w$

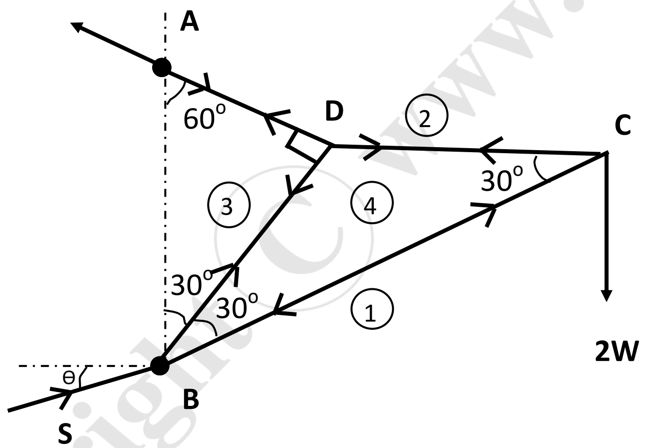
$\theta = 30^o$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 02

நான்கு இலேசான கோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டு, நிலைக்குத்தான சுவரில் A யிலும் B யிலும் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டதுமான சட்டப்படல் ஒன்றைப் படம் காட்டுகிறது, C யில் 2W நிறை தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்பட்த்தை வரைக. இதிலிருந்து எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு, அவை இழுவையா, உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக. A இலும் B யிலும் உள்ள மறுதாக்கங்களையும் தகைப்புவரைபடத்தின் மூலம் காண்க.



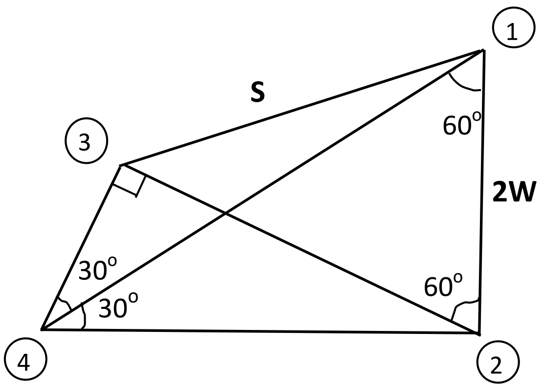


பிணையில் A இலுள்ள புறவிசையானது AD வழியே உள்ள விசையைச் சமப்படுத்த வேண்டியிப்பதால் அது AD யிற்குச் சமாந்தரமாக இருத்தல் வேண்டும்.

போவின் குறிப்பீட்டில் விசைகளுக்கும் கோல்களுக்கும் இடையே உள்ள வெளிகளில் மட்டுமே இலக்கமிடல் வேண்டும். எனவே நிலைக்குத்தான சுவரை படத்தில் காட்டவேண்டியதில்லை.

முதலில் மூட்டு C இலுள்ள விசைகளுக்கு விசைப்பல்கோணி வரைவோம். அடுத்ததாக மூட்டு D இற்கும் பின்னர் மூட்டு B இற்கும் வரைவோம். மூட்டு B இலுள்ள விசை S இன் பருமன், திசை, BD வழியே தாக்கும் விசையின் பருமன் ஆகிய மூன்று கணியங்கள் தெரியாதவையாக இருப்பதால் இரண்டாவதாக மூட்டு B ஐ வரைய முடியாது.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



கோல்	இழுவை	உதைப்பு
A D ③ ②	3W	-
B D ③ ④	$\sqrt{3}W$	-
B C ① ④	-	4W
C D ② ④	$2\sqrt{3}W$	-

②④ $= $ ①② $w\tan 60^0$

$$= 2W\sqrt{3}$$

①④ $= 2w\sec 60^0$

$$= 4w$$

③④ $=$ ②④ $\cos 60^0$

$$= 2\sqrt{3}W\frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3}W$$

②③ $=$ ②④ $\sin 60^0$

$$= 2\sqrt{3}w\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3w$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

$$S^2 = \textcircled{2}\textcircled{3}^{\,2} + (2w)^2 - \textcircled{2}\textcircled{3}\ 2w\cos 60^\circ$$
$$= 9w^2 + 4w^2 - (3w)(2w)\frac{1}{2}$$
$$= 10w^2$$
$$S = \sqrt{10}w$$

$$P \equiv \textcircled{2}\textcircled{3} = 3w$$
$$R \equiv \textcircled{3}\textcircled{1} = \sqrt{10}w$$

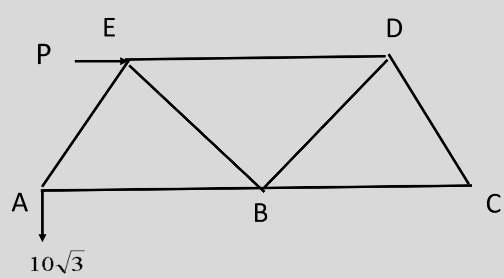
$$S\cos\theta = \textcircled{2}\textcircled{3}\ \sin 60^\circ$$
$$\sqrt{10}w\cos\theta = 3w\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 03

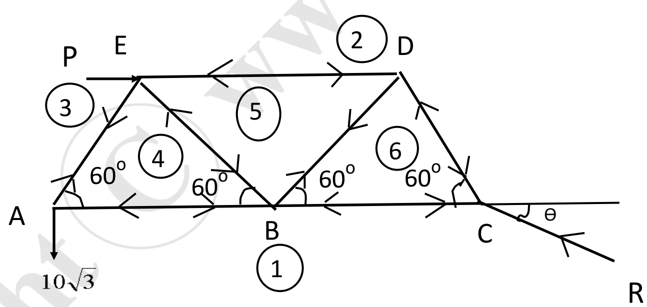
சம நீளமுள்ள AB, BC, CD, DE, EA, EB, BD என்னும் ஏழு இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் C யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, A யில் $10\sqrt{3}$ நியூற்றன் என்னும் ஒரு நிறையைக் காவுகின்றது .AC கிடையாக இருக்க E யில் உள்ள ஒரு கிடை விசை P யினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பேணப்படுகின்றது.



(i) E யில் உள்ள விசை P யின் பருமனைப் பெறுமானங் கணிக்க

(ii) C யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலுக்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, இழுவைகளுக்கும் உதைப்புகளுக்குமிடையே வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



கோலின் நீளம் 2a என்க

(i) தொகுதி C ↺

$$P.2a\sin 60^\circ - 10\sqrt{3}(4a) = 0$$

$$P = 40N$$

(ii)

$$\uparrow R\sin\theta - 10\sqrt{3} = 0$$

$$\leftarrow R\cos\theta - 40 = 0$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

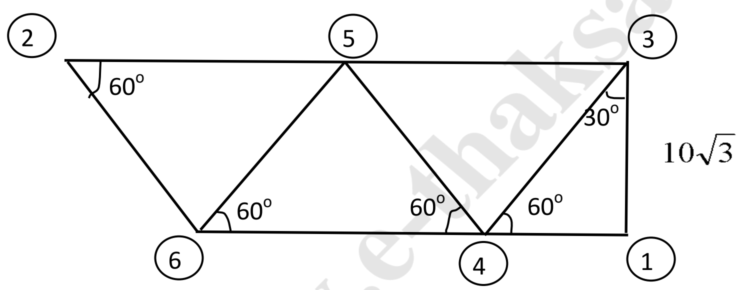
$$R = 10\sqrt{19}N$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

(iii) முதலில் மூட்டு A இற்கும் அடுத்ததாக மூட்டு E இற்கும் பின்னர் எனைய மூட்டுக்களுக்கும் விசைப்பல்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைவோம்.

தகைப்புகள் கோல்கள் வழியே இருப்பதால் அவை கோல்களுக்கு சமாந்தரமாக அமைய வேண்டும் என்பதையும் கவனத்தில் கொண்டு இலக்கங்களின் அமைவிடங்களைக் தீர்மானித்தல் வேண்டும்.

கணித்தல்களுக்கு அவசியமற்ற புறவிசைகளை தகைப்ப வரிப்படத்தில் தவிக்க முடியம் புறவிசை R ≡ (1)(2) தவிர்க்கப்பட்டுள்ளது.



கோல்	இழுவை	உதைப்பு
A B (1)(4)	-	10N
B C (1)(6)	-	20N
C D (2)(6)	-	20N
D E (2)(5)	-	20N
E A (3)(4)	20N	-
B D (5)(6)	20N	-
B E (5)(4)	-	20N

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

① ④ $= 10\sqrt{3}\tan 30^\circ$
$= 10\text{N}$

③ ④ $= 10\sqrt{3}\sec 30^\circ = 20\text{N}$

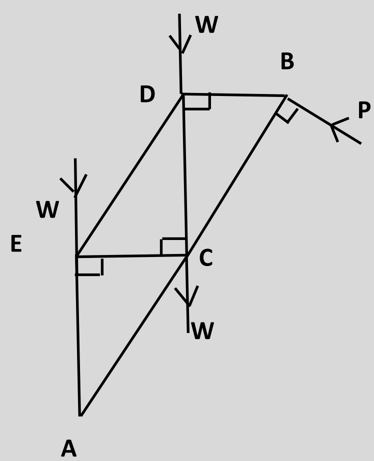
சமபக்க முக்கோணிகளாக அமைவதால் ஏனையவை எல்லாம் 20N ஆகும்.

உதாரணம் 04

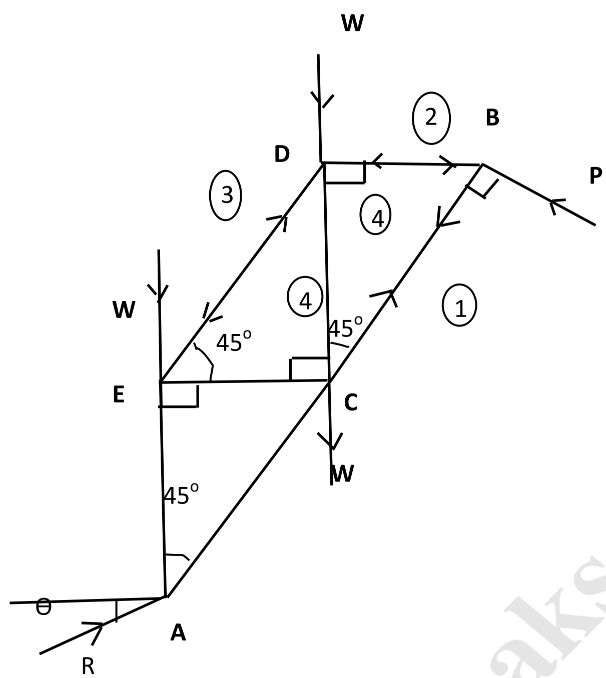
உருவில் காணப்படும் இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படலில் கிடைக்கோல்களும் நிலைக்குத்துக் கோல்களும் நீளத்தில் சமமாகவும் எல்லாக் கோணங்களும் 90° அல்லது 45° உம் ஆகும்.

அது A யில் ஒப்பமாகச் சுழலையிடப்பட்டும் AB யிற்குச் செங்குத்தான ஒரு விசை P யினால் B யில் தாங்கப்பட்டும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. அது C,D,E ஆகியவற்றில் W நியூற்றன் நிறைகளைக் கொண்டுள்ளது. P யின் பெறுமானத்தை W வின் சார்பில் காண்க. கோல் CD யில் உள்ள தகைப்பு பூச்சியமென மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. BD,BC,DE ஆகிய கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்பதற்குப் போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

இத்தகைப்புகளைக் கண்டு இத்தகைப்புகள் இழுவையா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



AE=a என்க

$$EC = a, AB = 2\sqrt{2}a$$

தொகுதிக்கு ↺ A

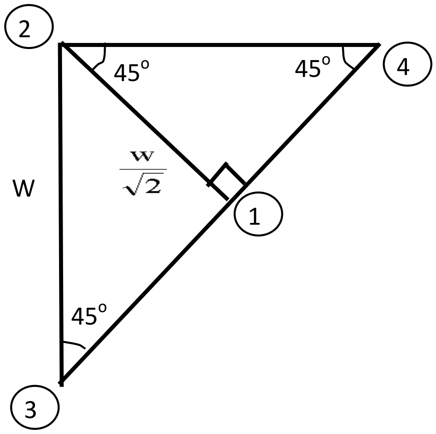
$$P(2\sqrt{2}a) - 2wa = 0$$

$$P = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

BD,BC,DE ஆகிய கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளை மட்டும் கணிக்கவேண்டியிருப்பதால் மூட்டுக்கள் B,D ஆகியவற்றில் உள்ள விசைகளுக்கு மட்டும் இலக்கமிடப்பட்டுள்ளது. மேலும் கோல் CD இலுள்ள தகைப்பு பூச்சியம் என்பதால் CD இன் இரு பக்கங்களிலும் ஒரே இலக்கம் இடப்பட்டுள்ளது.

முதலில் மூட்டு B ஐயும் அடுத்ததாக மூட்டு D ஐயும் மட்டும் வரைவோம். மேலும் (3)(4) , (4)(1) என்னும் விசைகள் சமாந்தரமாக இருப்பதால் (3) , (1) , (4) ஆகிய இலக்கங்கள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



(2)(4) $= \frac{w}{\sqrt{2}} \sec 45^\circ = w$

(4)(1) $= \frac{w}{\sqrt{2}}$

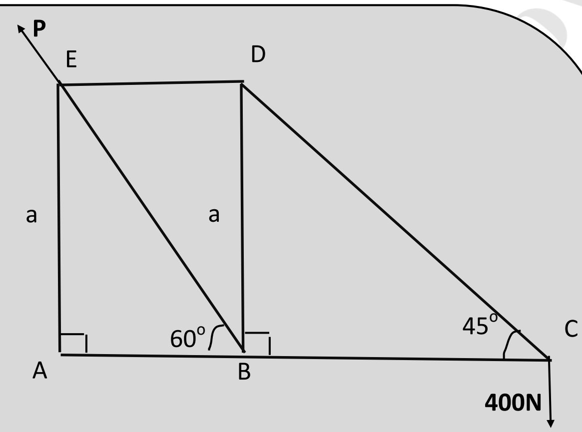
(3)(4) $= w \sec 45^\circ = \sqrt{2}w$

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
B D (3)(4)	-	w
B C (4)(1)	$\frac{w}{\sqrt{2}}$	-
D E (3)(4)	-	$\sqrt{2}w$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 05

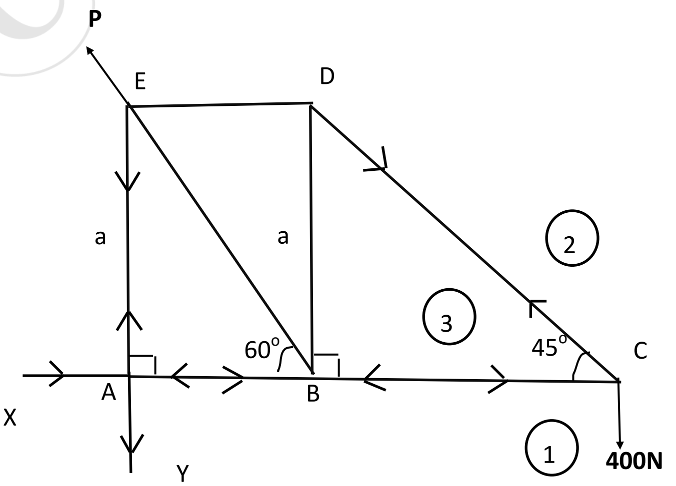
AB,AE,BC,CD,DB,BE,ED என்னும் ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு சட்டப்படல் பின்வரும் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றது. மூட்டு A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகச் சுழலையிடப்பட்டிருக்கச் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. மூட்டு C ஆனது 400 நியூற்றன் சுமையைக் காவுகின்றது.



ABC கிடையாக இருக்குமாறு மூட்டு E யிலே P நியூற்றன் என்னும் விசை ஒன்று திசை $\overrightarrow{BE}$ வழியே தாக்குகின்றது. AE,BD ஆகியன a மீற்றர் என்னும் சமநீளத்தை உடையவை. அதோடு, கோணங்கள் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அமைந்துள்ளன. P யின் பெறுமானத்தையும் சுழலை A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க.

இதிலிருந்து AB,AE ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பை அது இழுவையா, உதைப்பா எனக் காட்டிக் கணிக்க.

மூட்டு C யிற்கு மாத்திரம் ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தைப் போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி BC,CD ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பைத் துணிக. அதோடு, அது இழுவையா, உதைப்பா எனக் காட்டுக.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

தொகுதிக்கு A ↺ $pa\sin 30^\circ - 400(a\tan 30^\circ + a) = 0$

$$\frac{p}{2} = 400\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

$$p = 800\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)N$$

$$\rightarrow X - p\cos 60^\circ = 0$$

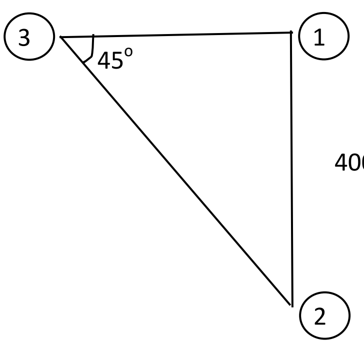
$$X = 400\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{——— (1)}$$

$$\downarrow Y - p\sin 60^\circ + 400 = 0$$

$$Y = 400\sqrt{3} \quad \text{——— (2)}$$

பிணையல் A இல் AB வழியே தாக்கும் விசையானது கிடைக்கூறு X ஐயும் AE வழியே தாக்கும் விசையானது நிலைக்குத்துக்கூறு Y ஐயும் சமன்செய்தல் வேண்டும்

AB	$400\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)N$	உதைப்பு
AE	$400\sqrt{3}N$	இழுவை



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

கோல்	இழுவை	உதைப்பு
B C ① ③	-	400N
C D ② ③	$400\sqrt{2}N$	-

① ③ $= 400N$

② ③ $= 400 \sec 45^{o}$

$= 400\sqrt{2}N$

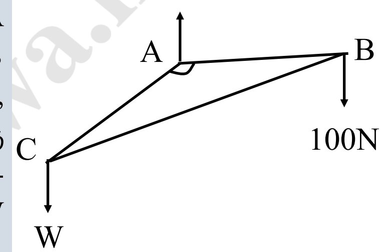
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

பயிற்சிகள்

01

அருகில் தரப்பட்டுள்ள உருவில் ABC என்பது AB, BC, CA என்னும் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட மூன்று இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணிச் சட்டப்படலாகும். இங்கு AB=AC, $B\hat{A}C = 120^{0}$. இச்சட்டப்படலானது AB கிடையாக இருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. அது ஓர் ஒப்பமான முளையினால் A இல் தாங்கப்பட்டு, B யில் 100 நியுற்றன், C யில் W நியூட்டன் என்னும் சுமைகளைக் காவுகின்றது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து அதிலிருந்து இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, கோல்களில் உள்ள தகைப்புகளையும் W இன் பெறுமானத்தையும் கணிக்க.



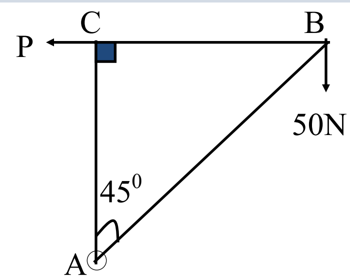
02

AB, BC, CA என்னும் மூன்று இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு முக்கோணிச் சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் A யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை B யில் ஒரு 50 நியூற்றன் நிறையைக் காவுகின்றது. CB கிடையாக இருக்குமாறு சட்டப்படல் C யில் உள்ள P நியூற்றன் என்னும் ஒரு கிடை விசையினால் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது.

(i) P யின் பருமனைக் காண்க.

(ii) A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

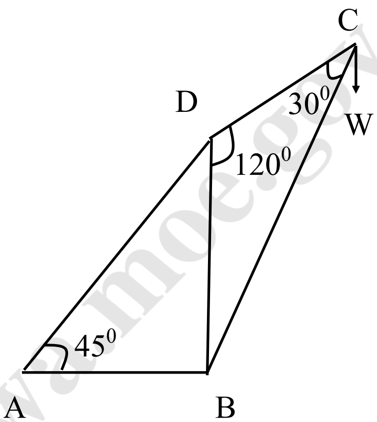
(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்தி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் காண்க.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

03

உருவில் காட்டப்பட்ட நிலைக்குத்தான சட்டப்படலானது A, B, C, D யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்ட ஐந்து இலேசான கோல்கள் AB, BC, CD, DA, BD ஐக் கொண்டுள்ளது. C யில் ஒரு நிறை W தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள A,B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்கும் நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்படுகிறது. தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைவதன் மூலம் கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க. இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.



04

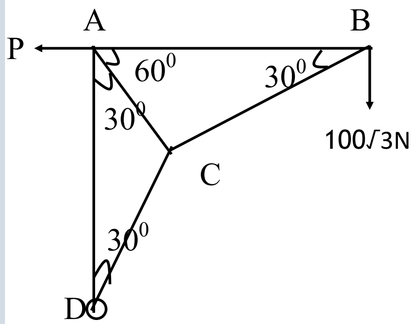
AB, BC, CD, DA, AC என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன.

$A\hat{B}C = A\hat{D}C = D\hat{A}C = 30^0, B\hat{A}C = 60^0$ ஆகும். சட்டப்படல் D யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை B யில் ஒரு $100\sqrt{3}$ நியூட்டன் நிறையைக் காவுகின்றது. AB கிடையாக இருக்குமாறு சட்டப்படல் A யில் உள்ள P நியூட்டன் என்னும் ஒரு கிடைவ-

(i) P யின் பருமனைக் காண்க.

(ii) A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி, சட்டப்படலிற்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்தி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

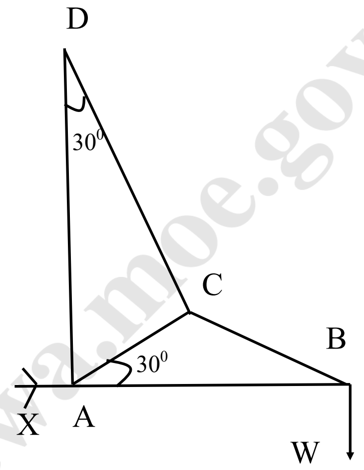


Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

05

AB, BC, CD, AC, AD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டி உருவிற் காணப்படும் சட்டப்படல் ஆக்கப்பட்டுள்ளது. AC=CB, $B\hat{A}C = 30^0 = A\hat{D}C$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. சட்டப்படல் D இல் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு B இல் ஒரு நிறை W தொங்கவிடப்பட்டு A இல் தாக்கும் பருமன் X ஐ உடைய ஒரு கிடை விசையினால் AB கிடையாகவும் AD நிலைக்குத்தாகவும் இருக்கச் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்துவதன் மூலம் B, C, A ஆகிய மூட்டுக்களுக்குத் தகைப்பு வரிப்படங்களை ஒரே உருவில் வரைக.

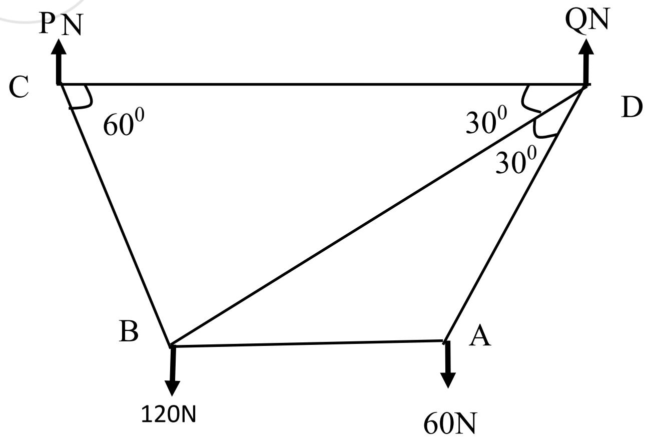
இதிலிருந்து X இன் பெறுமானத்தையும் எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களையும் இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, காண்க. (AL 2016)



06

தரப்பட்டுள்ள உரு முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட AB, AD, BC, BD, CD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு சட்டப்படலை வகைகுறிக்கின்றது. சட்டப்படல் A, B ஆகியவற்றில் முறையே 60N, 120N என்னும் சுமைகளைக் காவும் அதேவேளை C, D ஆகியவற்றில் பிரயோகிக்கப்படும் முறையே PN, QN என்னும் இரு நிலைக்குத்து விசைகளினால் AB, CD ஆகிய கோல்கள் கிடையாக இருக்க நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

இதிலிருந்து, ஐந்து கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களை அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக்கூறிக் காண்க.

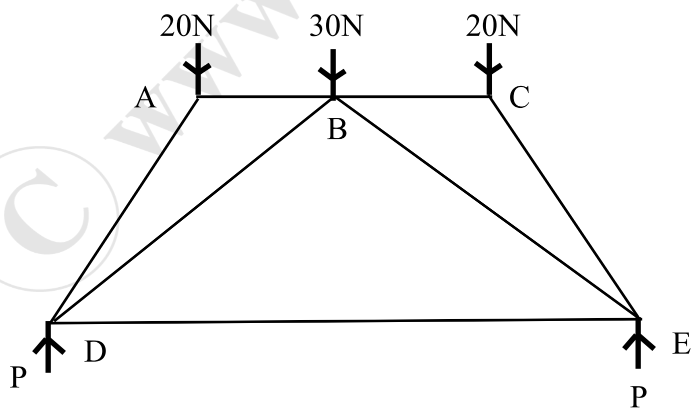


Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

07

ஏழு விறைத்த இலேசான கோல்களை அவற்றின் முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டிச் செய்யப்பட்ட ஒரு சமச்சீர் சட்டப்படல் உருவில் காணப்படுகின்றது. AB, BC, DE ஆகிய கோல்கள் கிடையானவை. $A\hat{D}E = C\hat{E}D = 45^{\circ}, B\hat{D}E = B\hat{E}D = 30^{\circ}$ சட்டப்படல் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு A, B, C ஆகிய மூட்டுக்களில் சுமையேற்றப்பட்டு, D யிலும் E யிலும் உள்ள P என்னும் சம நிலைக்குத்து விசைகளினால் தாங்கப்பட்டுள்ளது. P யின் பெறுமானத்தைக் காண்க.

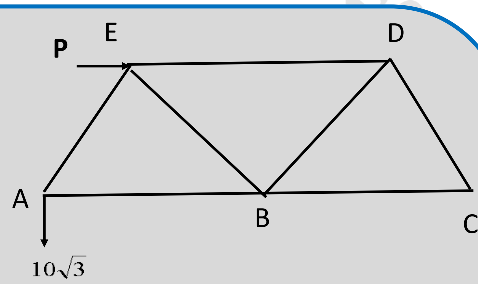
போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்தி A,D மூட்டுக்களுக்குத் தகைப்பு வரிப்படங்களை ஒரே உருவில் வரைக. இதிலிருந்து AD, AB, DE, DB ஆகிய கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களை கண்டு, அவை இழுவைகளா, உதைப்புகளா எனக்கூறுக.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

08

சம நீளமுள்ள AB,BC,CD,DE,EA,EB,BD என்னும் ஏழு இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் C யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, A யில் $10\sqrt{3}$ நியூற்றன் என்னும் ஒரு நிறையைக் காவுகின்றது. AC கிடையாக இருக்க E யில் உள்ள ஒரு கிடை விசை P யினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்தத் தளத்தில் பேணப்படுகின்றது



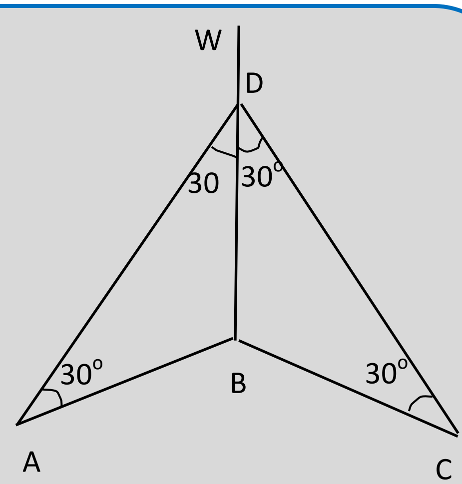
(i) E யில் உள்ள விசை P யின் பருமனைப் பெறுமானங்கணிக்க.

(ii) C யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(iii) போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலுக்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து. எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் கண்டு இழுவைகளுக்கும் உதைப்பகளுக்குமிடையே வேறுபடுத்திக் காட்டுக

09

மேலேயுள்ள படம் A,B,C,D யில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ள AB, BC, CD, DA, BD என்னும் ஐந்து இலேசான கோல்களின் நிலைக்கத்தான சட்டப்படலைக் காட்டுகிறது. D யில் நிலைக்குத்துச் சுமை W பிரயோகிக்கப்படுகிறது. சட்டப்படல், ஒரே கிடைமட்டத்திலுள்ள, A யிலும் C யிலுமுள்ள நிலைக்குத்து விசைகளால் தாங்கப்படுகிறது. விசைப்படமொன்றை வரைவதன் மூலம், இழுவைகளையும், நெருக்கங்களையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, கோல்களிலுள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

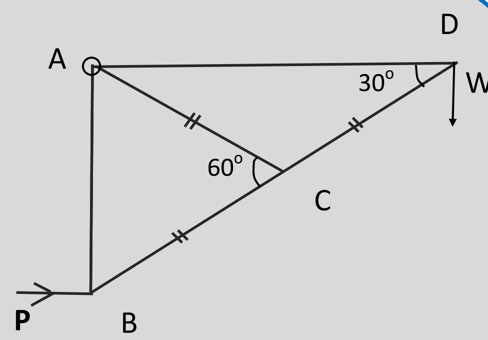


Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

10

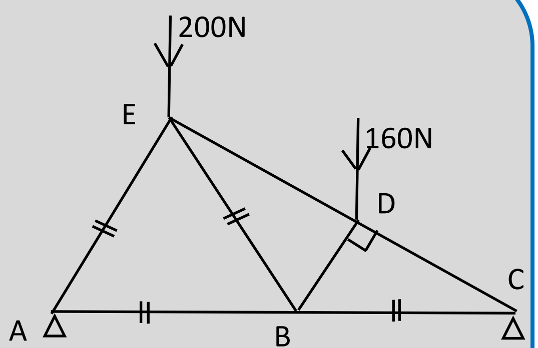
படத்தில் காட்டியவாறு ஐந்து இலேசான கோல்களால் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சட்டப்படலானது மூட்டு A உடன் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டும் மூட்டு D இல் கட்டித் தொங்கவிடப்பட்ட நிறையின் கீழும் மூட்டு B இல் பிரயோகிக்கப்படுகின்ற கிடைவிசையின் கீழும் சமநிலையில் உள்ளது.

போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. இதிலிருந்து, கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு அவை இழுவை, உதைப்பா எனக் குறிப்பீடுக



11

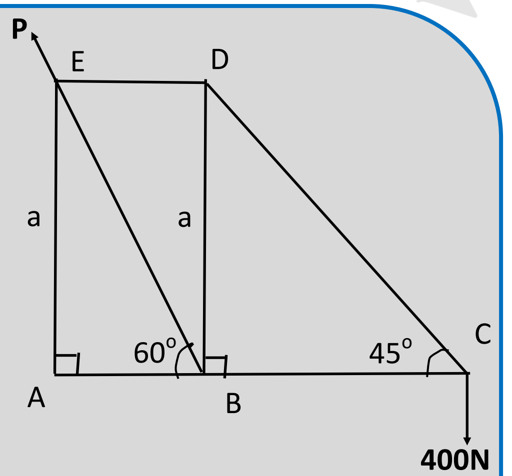
படத்தில் காட்டியவாறு 7 இலேசான கோல்களால் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்ட சட்டப்படல் A, C இல் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக. **இதிலிருந்து**, கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு அவை இழுவையா, உதைப்பா எனக் குறிப்பீடுக



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

12

AB, AE, BC, CD, DB, BE, ED என்னும் ஏழு இலேசான கோல்களைக் கொண்ட ஒரு சட்டப்படல் பின்வரும் வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றது. மூட்டு A ஒரு நிலைத்த புள்ளியுடன் ஒப்பமாகச் சுழலையிடப்பட்டிருக்கச் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளது. மூட்டு C ஆனது 400 நியூற்றன் சுமையைக் காவுகின்றது. ABC கிடையாக இருக்குமாறு மூட்டு E யிலே P நியூற்றன் என்னும் விசை ஒன்று திசை $\overrightarrow{BE}$ வழியே தாக்குகின்றது. AE, BD ஆகியன a மீற்றர் என்னும் சமநீளத்தை உடையவை. அதோடு, கோணங்கள் வரிப்படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறு அமைந்துள்ளன.

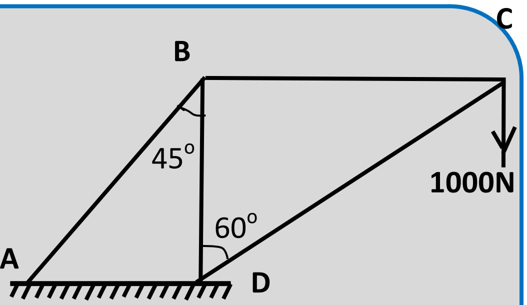


P யின் பெறுமானத்தையும் சுழலை A யில் உள்ள மறுபக்கத்தின் கிடைக் கூறையும் நிலைக்குத்துக் கூறையும் காண்க. இதிலிருந்து AB, AE ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பை அது இழுவையா, உதைப்பா எனக் காட்டிக் கணிக்க.

மூட்டு C யிற்கு மாத்திரம் ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தைப் போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி BC, CD ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பைத் துணிக. அதோடு, அது இழுவையா, உதைப்பா எனக் காட்டுக.

13

சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட AB, BC, CD, BD என்னும் நான்கு இலேசான கோல்களாலான ஒரு கிரேன் உருவில் காணப்படுகின்றது. கோல் BD நிலைக்குத்தாக இருக்கும் அதே வேளை கோல் BC கிடையானது. கிரேனானது A யிலும் D யிலும் கிடை நிலத்தில் நிலைப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை C யில் ஒரு 1000N சுமை தொங்குகின்றது. இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்திக் காட்டி, போவின் குறிப்பீடைப் பயன்படுத்திக் கோல்களில் உள்ள விசைகளைக் காண்க.



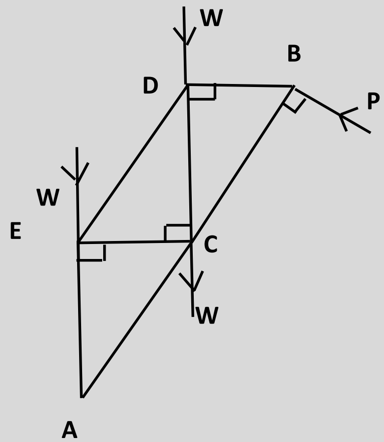
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

14

உருவில் காணப்படும் இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படலில் கிடைக்கோல்களும் நிலைக்கத்துக் கோல்களும் நீளத்தில் சமமாகவும் எல்லாக் கோணங்களும் 90^o அல்லது 45^o உம் ஆகும்.

அது A யில் ஒப்பமாகச் சுழலையிடப்படும் AB யிற்குச் செங்குத்தான ஒரு விசை P யினால் B யில் தாங்கப்படும் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் உள்ளது. அது C,D,E ஆகியவற்றில் W நியூற்றன் நிறைகளைக் கொண்டுள்ளது. P யின் பெறுமானத்தை W வின் சார்பில் காண்க. கோல் CD யில் உள்ள தகைப்பு பூச்சியமென மேலும் தரப்பட்டுள்ளது. BD ,BC,DE ஆகிய கோல்களில் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்பதற்குப் போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

இத்தகைப்புக்களைக் கண்டு இத்தகைப்புகள் இழுவையா, உதைப்புகளா எனக் கூறுக.



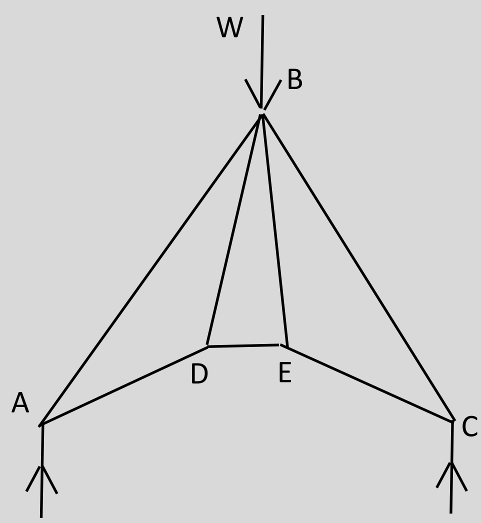
15

சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்ட இலேசான கோல்களைக் கொண்டதும் B யில் ஒரு சுமை W வை உடையதுமான ஒரு சட்டப்படல் உருவில் காணப்படுகின்றது. ஒரே கிடை மட்டத்தில் இருக்கும் A யிலும் C யிலும் அது நிலைக்குத்தாகத் தாங்கப்படுகின்றது. $A\hat{B}C$ ஆனது ஒரு செங்கோணம் ஆக இருக்கம் அதே வேளை அது BD யினாலும் BE யினாலும் முக்கூறிடப்படுகின்றது.

$B\hat{A}D, B\hat{C}E$ ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 30^o உம் BA=BC உம் ஆகும்.

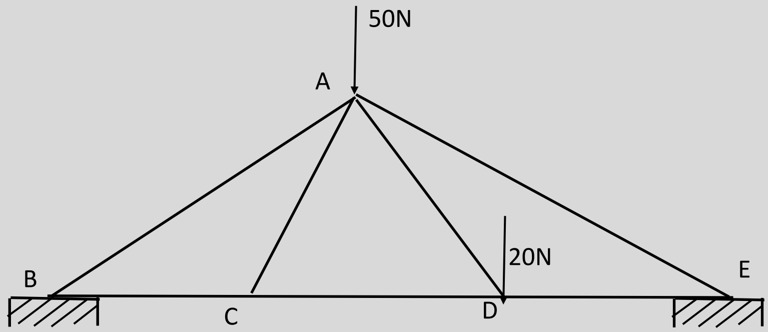
போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைக.

இதிலிருந்து, AD, AB, DE, DB ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள தகைப்பைக் கண்டு, அவை இழுவையா, உதைப்பா எனக் குறிப்பிடுக.



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

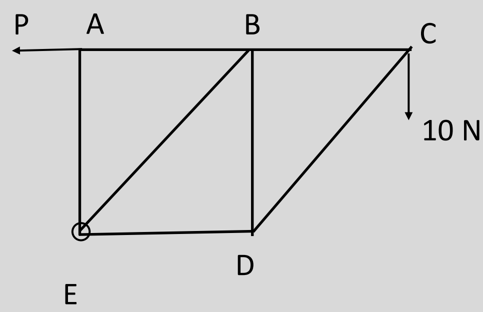
16



வரிப்படத்தில் காணப்படும் சட்டப்படல் AB, AC, AD, AE, BC, CD, DE ஏனும் ஏழு இலேசான கோல்களை உடையது AB, AE ஆகியன தவிர்ந்த ஏனைய கோல்கள் யாவும் சமநீளமுள்ளவை. ஒரே கிடை மட்டத்தில் B யிலும் E யிலும் இருக்கும் இரு ஆதாரங்களுடன் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் இருக்கின்றது. A, D ஆகிய மூட்டுக்களில் முறையே 50 நியூற்றன், 20 நியூற்றன் சுமைகள் உள்ளன. போவின் குறியீட்டினைப் பயன்படுத்தி ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து AB, AE ஆகியவற்றில் உள்ள தகைப்புக்களைத் துணிந்து, ஒவ்வொரு தகைப்பும் இழுவையா, உதைப்பாவெனக் காட்டுக

17

AB=BC=BD=AE=ED=a மீற்றர் ஆகவும் BE=CD= $\sqrt{2}a$ மீற்றர் ஆகவும் உள்ள AB,BC,CD,DE,EA,EB,BD என்னும் ஏழு இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்றவாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் E யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை C யில் ஒரு 10 நியூற்றன் நிறையைக் காவுகின்றது. AC கிடையாக இருக்குமாறு A யில் உள்ள P நியூற்றன் என்னும் கிடை விசையினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்கத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது.



(i) P யின் பருமனைக் காண்க.

(ii) E யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமணையும் திசையையும் காண்க.

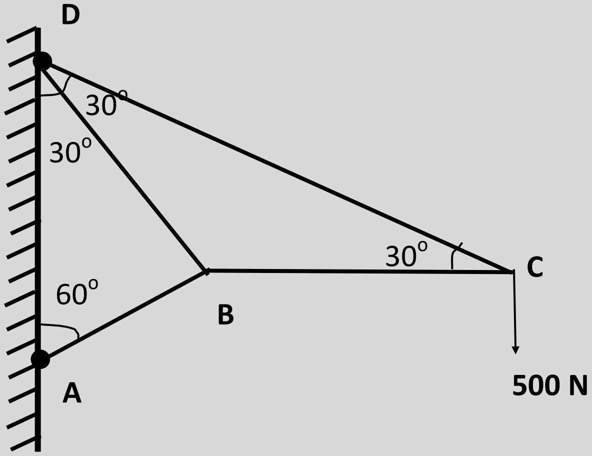
(iii) போவின் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி சட்டப்படலுக்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து இழுவைகளையும் உதைப்புக்களையும் காட்டி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

தொகுப்பு :- திரு ப.விமலநாதன், ஆசிரியர், இணைந்தகணிதம், (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக் கல்லூரி, யாழ்ப்பாணம்)

கணினி வடிவமைப்பு :- திரு.யோ.செந்தூரன், ஆசிரியர்-த.தொ.தொ, (யா/மீசாலை வீரசிங்கம் மத்திய கல்லூரி, மீசாலை)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

18



AB, BC, CD, BD என்னும் நான்கு இலேசான கோல்களாலான சட்டப்படல் ஒன்று உருவில் காணப்படுகின்றது. அது A யிலும் D யிலும் நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றுடன் சுயாதீனமாகப் பினைக்கப்பட்டுள்ளது. மூட்டு C யிலிருந்து 500 N சுமை ஒன்று தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை BC கிடையானது. போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலுக்காகத் தகைப்பு வரிப்படம் ஒன்றை வரைக. இதிலிருந்து இழுவைகளையும் உதைப்புகளையும் வேறுபடுத்தி எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புக்களைக் காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk