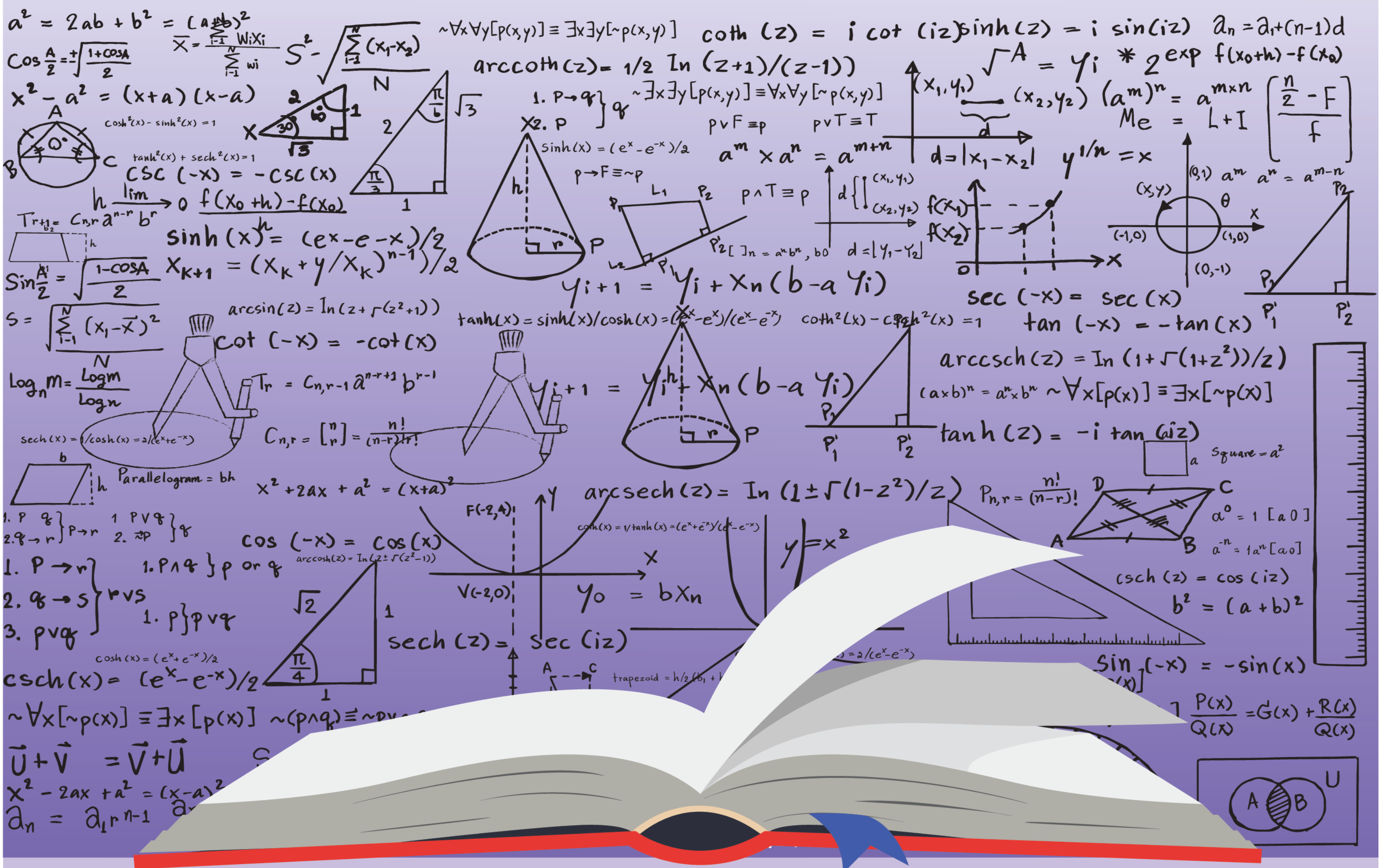
முட்டியகோல்கள்



Start Your Learning Journey with e-thaksalawa

The National e-learning Portal for The General Education

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

மூட்டிய கோல்கள்

பல்வேறு வகையான மூட்டுக்கள் பற்றியும் பாரமான கோல்களை ஒப்பமாக மூட்டுவதால் உருவாகும் சட்டப்படல்கள் சமநிலையில் உள்ளபோது அம்மூட்டுக்களில் தாக்கும் விசைகள் தொடர்பாகவும் அவற்றைக் கணிக்கும் முறைகள் தொடர்பாகவும் இப்பகுதியில் ஆராயப்பட்டுள்ளன.

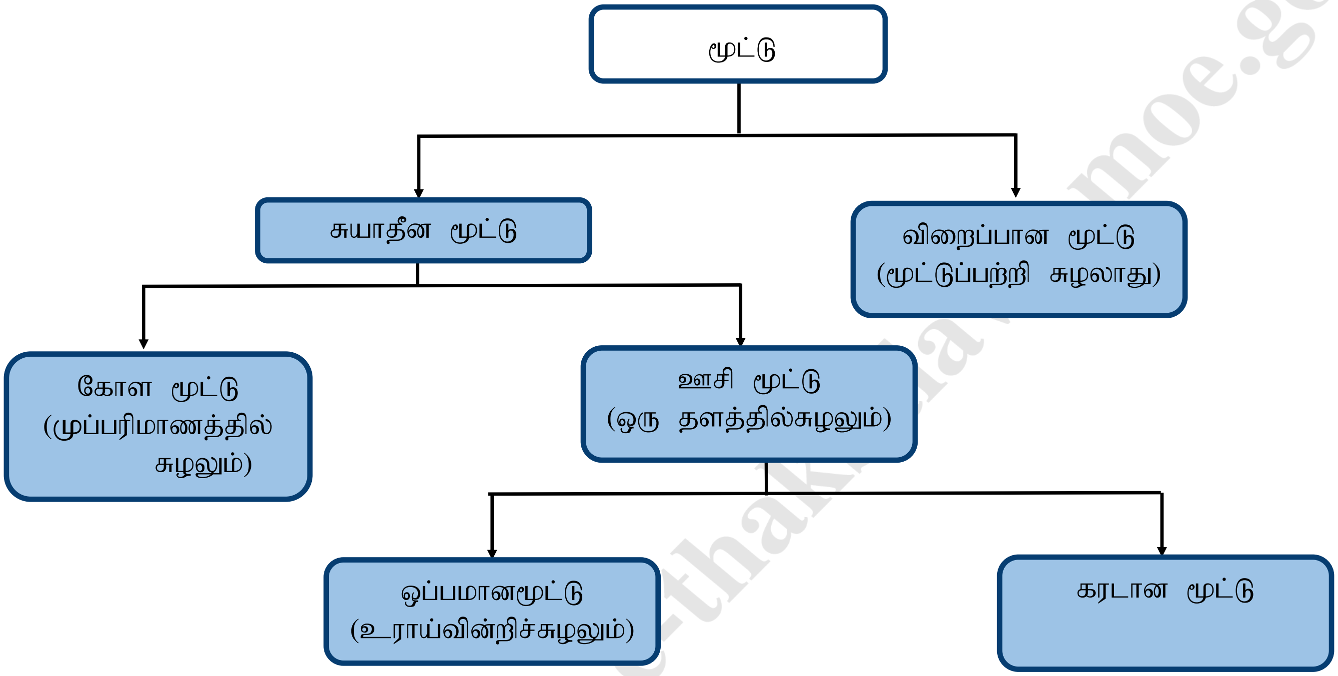
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

மூட்டிய கோல்கள்

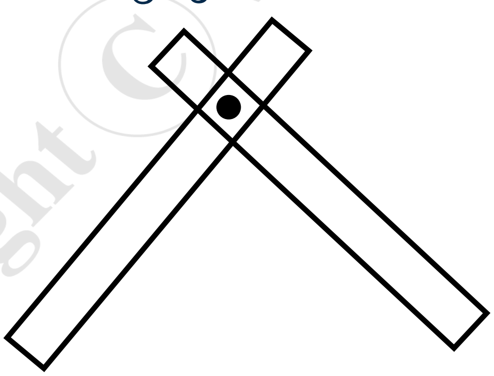
மூட்டுவகைகள்

இருகோல்களை மூட்டும்போது பயன்படுத்தப்படும் மூட்டு வகைகளை பின்வருமாறு வகைப்படுத்தலாம்.



இணைந்த கணிதத்தில் ஒப்பமான ஊசி மூட்டுடன் தொடர்புடைய பிரசினங்களுக்கு தீர்வு காணுதல் போதுமானது.

சுயாதீன ஊசி மூட்டு



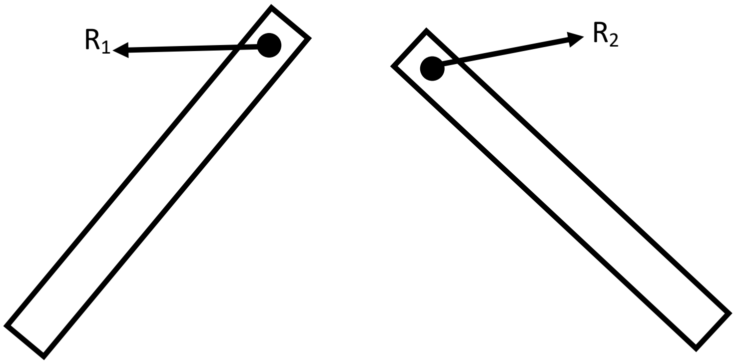
இருகோல்களை அவற்றின் முனைகளில் ஏற்படுத்திய சிறுதுவாரத்தில் ஒப்பமான இலேசான ஆணியொன்றைப் பொருத்துவதன் மூலம் மூட்டப்படலாம். இவ்வாறான மூட்டுக்களில் ஒவ்வொரு கோலும் மூட்டுப்பற்றி உராய்வின்றி ஒரு தளத்தில் சுழலக்கூடியதாக இருக்கும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

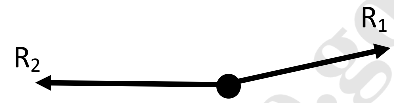
தொகுப்பு : திரு. ப.விமலநாதன், ஆசிரியர் - இணைந்த கணிதம் (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக்கல்லூரி)
கணினி வடிவமைப்பு : திரு.இ.சுகுமார், ஆசிரியர்– த.தொ.தொ. (யா/ஏழாலை மகாவித்தியாலயம்)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

சுயாதீன ஊசி மூட்டொன்றில் தாக்கும் விசைகள்

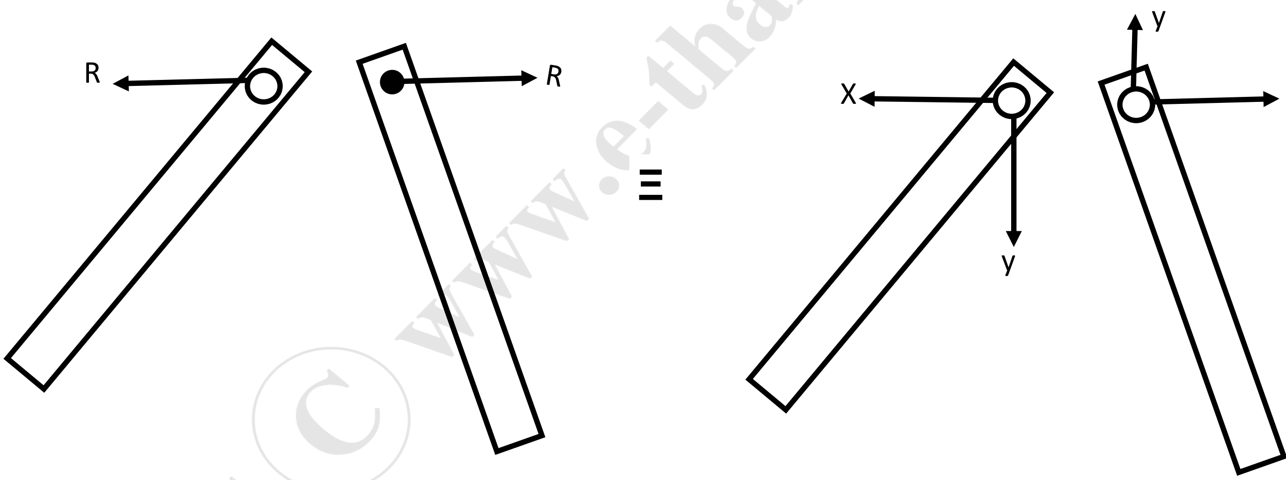


ஊசியினால் கோல்கள் மீது தாக்கும் விசைகள்



கோல்களினால் ஊசி மீது தாக்கும் விசைகள்

இலேசான ஊசியின் சமநிலைக்கு R_1, R_2 என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இருப்பதுடன் சமனாகவும் எதிராகவும் இருத்தல் வேண்டும்.



$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

வழமையாக ஊசியினால் கோல்கள் மீது தாக்கும் விசைகளை கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகளாகக் காட்டுவோம். மூட்டுக்களில் தாக்கும் விசைகளை சமனும் எதிருமாக காட்டுதல் வேண்டும். மேலும் விசைகளை தெளிவாகப்படத்தில் காட்டுவதற்காக மூட்டுக்களில் கோல்கள் சந்திக்காதவாறு சிறிய இடைவெளி விடுதல் வேண்டும்.

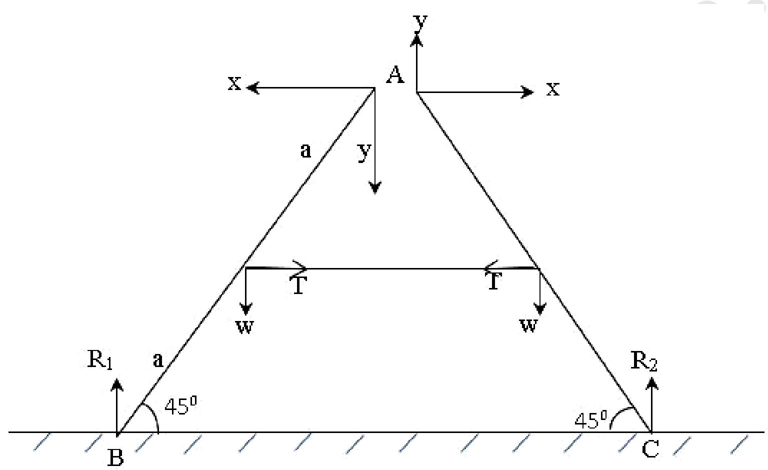
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 1

ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் w நிறையும் உடைய AB,AC என்னும் இருகோல்கள் A இல் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. B,C என்பன ஒப்பமான கிடைத்தளத்திலும் ABC நிலைக்குத்துத்தளத்திலும் இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டு AB,AC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட நீளாஇழையொன்றினால் சமநிலையில் உள்ளது.

$B\hat{A}C = 90°$ எனின் (1) இழையில் உள்ள இழுவை

(2) மூட்டு A இலுள்ள மறுதாக்கம் ஆகியவற்றைக்காண்க.



(1) சமச்சீரின்படி $R_1=R_2$

↑தொகுதி $R_1+R_2-2w=0$

$R_1=R_2= w$

AB இன் சமநிலைக்கு

↶A $T\, a\sin45^0+ w\, a \cos 45^0 - R_1\, 2a\cos 45^0 = 0$

$T+ w – 2w=0$

$T = w$

(2) AB இன் சமநிலைக்கு

← $X-T=0$

=> $X=W$

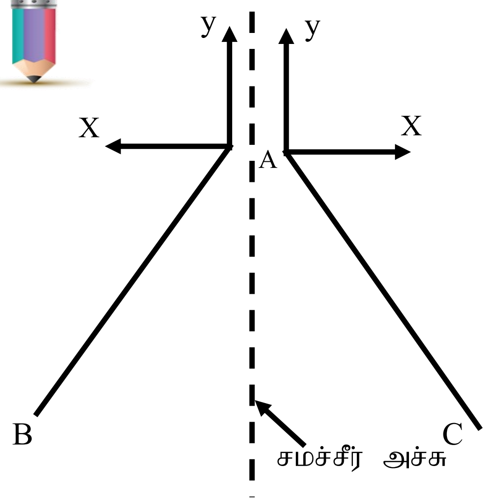
↓ $Y+ w – R_1=0$

$Y=0$

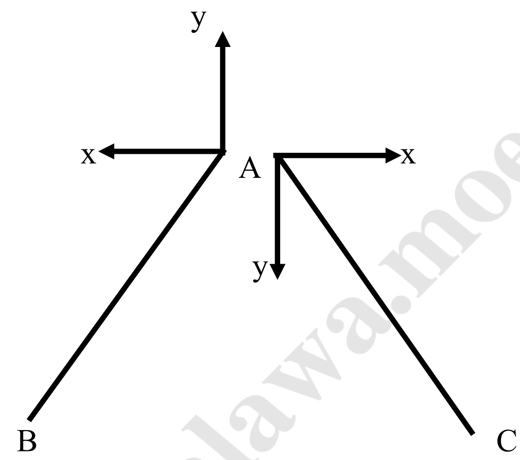
மூட்டு A இலுள்ள மறுதாக்கம் கிடையாக w ஆகும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

குறிப்பு



சமச்சீரின்படி



மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கம் சமனும் எதிருமாக இருத்தல்

- சமச்சீரின்படி இரு y களும் ஒரே போக்கில் இருத்தல் வேண்டும். ஆனால் மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கம் சமனும் எதிருமாக இருத்தல் வேண்டும். எனவே இரண்டையும் திருப்திசெய்ய வேண்டுமாயின் $y=0$ ஆகவேண்டும்.
- அதாவது யாதேனும் ஒரு மூட்டிற்கூடான நிலைக்குத்து அச்சுப்பற்றி தொகுதிசமச்சீராக இருப்பின் அம்மூட்டில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறு பூச்சியமாகும்.

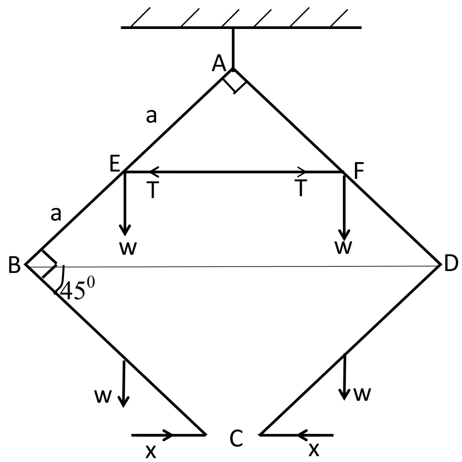
உதாரணம் 2

ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a உம் நிறை w உம் உடைய நான்கு சீரான கோல்கள் AB,BC,CD,DA என்பன முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இச்சட்டப்படலானது A இலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டும். AB,AD ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் E,Fஐ இலேசான கோலினால் இணைப்பதன் மூலம் சதுரவடிவம் பேணப்படுகின்றது.

(i) மூட்டு C இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக்காண்க

(ii) இலேசான கோலில் உள்ள தகைப்பைக்காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



இலேசான கோல் EF இணைக்கப்பட்டுள்ளதால் E,F இலுள்ள விசைகள் இலேசான கோல் வழியே இருக்கும். மேலும் B,D என்பன உள்ளே அசையுமாறு உருவம் விழ முயலும் என்பதால் இலேசானகோலில் உள்ள தகைப்பு உதைப்பாகும்.

1

சமச்சீரின்படி மூட்டு C இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறு பூச்சியமாகும்.
BC யின் சமநிலைக்கு

$$B\circlearrowright \; w\, a\cos 45^\circ - x\, 2a\sin 45^\circ = 0$$

$$x = \frac{w}{2}\cot 45^\circ$$

$$= \frac{w}{2}$$

மூட்டு C இலுள்ள மறுதாக்கம் கிடையாக W/2 ஆகும்.

2

AB, BC ஆகிய கோல்களின் சமநிலைக்கு

$$\circlearrowleft A\; 2w\, a\cos 45^\circ - T\, a\sin 45^\circ + x\, 4a\sin 45^\circ = 0$$

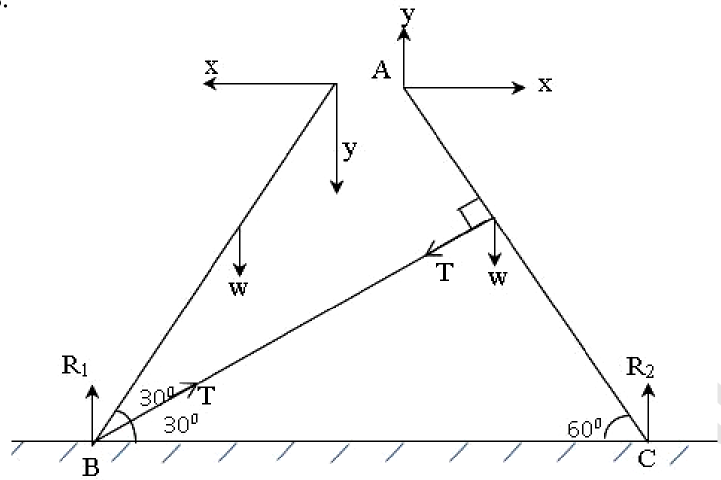
$$\Rightarrow 2w - T + \frac{w}{2}(4) = 0$$

$$\Rightarrow T = 4w$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 3

AB, AC என்னும் இரு சீரான w நிறையுள்ள சமவளைகள் A யில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இழையொன்றினால் AC யின் நடுப்புள்ளியுடன் B இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வளைகள் B உம் C உம் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தில் இருக்குமாறு ஓர் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சமநிலையில் நிற்கின்றன. கோணம் $B\hat{A}C = 60^0$ ஆகும். இழையிலுள்ள இழுவையைக்காண்க. மேலும் மூட்டு A இலுள்ள மறுதாக்கத்தையும் காண்க.



தொகுதி $\uparrow R_1 + R_2 - 2w = 0$

தொகுதி $\circlearrowleft B \quad R_2 2a - w\frac{3a}{2} - w\frac{a}{2} = 0$

$R_2 = w$

$R_1 = w$

AB இன் சமநிலைக்கு

$$\circlearrowleft A \quad T.a + w\frac{a}{2} - R_1 a = 0$$

$$T = \frac{w}{2}.$$

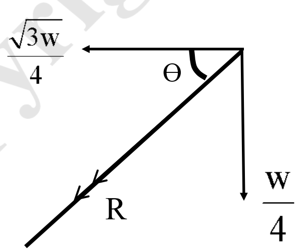
$$\leftarrow x - T\cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{4}w.$$

$$\downarrow y + w - R_1 - T\sin 30° = 0$$

$$\Rightarrow y + w - w - \frac{w}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{w}{4}.$$

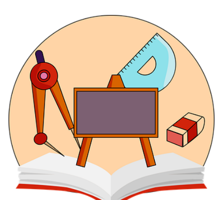


$$R = \sqrt{\frac{3}{16}w^2 + \frac{w^2}{16}}$$

$$R = \frac{w}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{w/4}{\sqrt{3}\,w/4} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30°$$



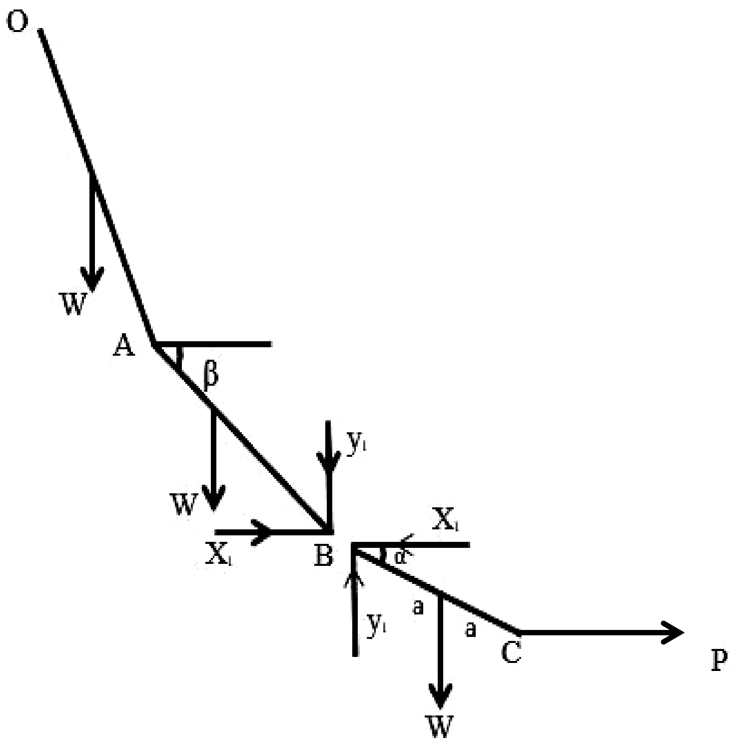
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 4

ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் w நிறையும் உடைய OA,AB,BC என்னும் மூன்று சமச்சீர்க்கோல்கள் A,B என்பவற்றில் சுயாதீனமாக மூடப்பட்டு O விலுள்ள நிலைத்த பிணையிலிருந்து சுயாதீனமாகத்தொங்குகின்றது. கோல் BC இற்கு C யில் கிடையாக p எனும் விசை பிரயோகிக்கப்படுகின்றது. சமநிலையில் BC கிடையுடன் αசாய்வில் உள்ளது.

(i) $P = \frac{w}{2}\cot\alpha$ எனக்காட்டுக.

(ii) மூட்டு B இலுள்ள மறுதாக்கத்தின் கிடை, நிலைக்குத்துக்கூறுகளைக் கண்டு AB கிடையுடன் $\tan^{-1}(3\tan\alpha)$ எனும் கோணத்தை அமைக்குமெனக்காட்டுக.



(i) BC யின் சமநிலைக்கு

B↻ $w\,a\cos\alpha - p\,2a\sin\alpha = 0$

$p = w/2 \cot\alpha$

(ii) BC யின் சமநிலைக்கு

$x_1 = p = \frac{w}{2}\cot\alpha$

$y_1 = w$

AB இன் சமநிலைக்கு

A↻ $w\,a\cos\beta + y_1\,2a\cos\beta - X_1\,2a\sin\beta = 0$

$\Rightarrow w\cos\beta + 2w\cos\beta - w\cot\alpha\sin\beta = 0$

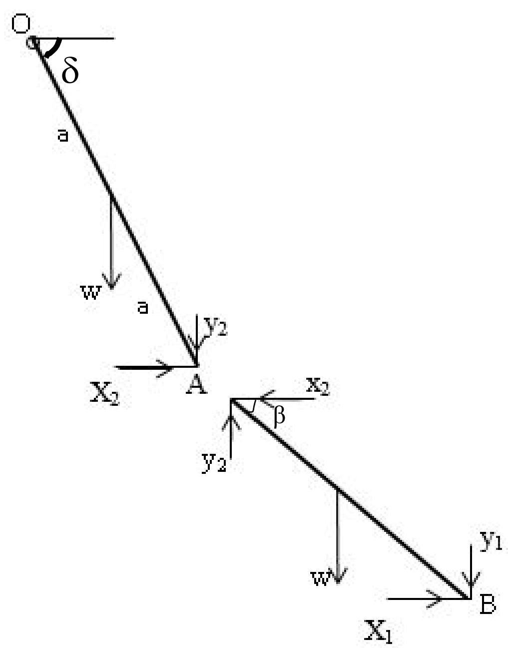
$\Rightarrow 3\cos\beta = \cot\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \tan\beta = 3\tan\alpha$

$\Rightarrow \beta = \tan^{-1}(3\tan\alpha)$

$\therefore$ BC ஆனது கிடையுடன் $\tan^{-1}(3\tan\alpha)$ எனும் கோணத்தை அமைக்கும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk



AB இன் சமநிலைக்கு

$Y_2 = w + y_1 = w + w = 2w$

$X_2 = X_1 = w/2 \cot\alpha$

OA இன் சமநிலைக்கு

O↻ $w\, a\cos\delta + y_2\, 2a\cos\delta - X_2\, 2a\sin\delta = 0$

$w\cos\delta + 4w\cos\delta - w\cot\alpha \sin\delta = 0$

$5\cos\delta = \cot\alpha \sin\delta$

$\tan\delta = 5\tan\alpha$

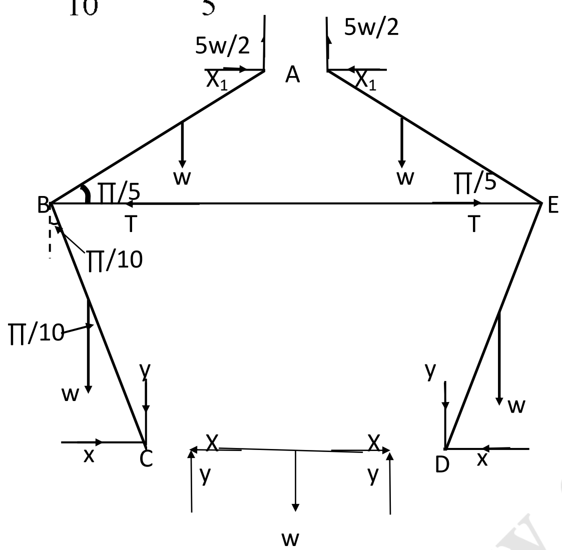
$\delta = \tan^{-1}(5\tan\alpha)$

∴ கிடையுடன் OA இன் சாய்வு $\tan^{-1}(5\tan\alpha)$ ஆகும்.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 5

ஒவ்வொன்றும் w நிறையுடைய ஐந்து சீரான சமகோல்கள் ஓர் ஐங்கோணியை ஆக்குமாறு தம்முனைகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அவ்வைங்கோணி ஓர் உச்சிக்கு இணைத்த ஓர் இழையினால் நிலைக்குத்தாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அடுத்த இரு உச்சிகளும் அவ்வைங்கோணி ஒழுங்கானதாய் இருக்கும் படியான நீளமுள்ள ஓர் இலேசான கோலினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கோலிலுள்ள தகைப்பு $w(\tan\frac{\pi}{10}+2\cot\frac{\pi}{5})$ எனக்காட்டுக.



ஒவ்வொரு கோலின் நீளமும் 2a என்க.

CD யின் சமநிலைக்கு $2y = w$

$=> y = w/2$

BC யின் சமநிலைக்கு

$$\circlearrowleft B \quad wa\sin\frac{\pi}{10} + y2a\sin\frac{\pi}{10} - x2a\cos\frac{\pi}{10} = 0$$

$$x = w\tan\frac{\pi}{10}$$

CB,BA ஆகியவற்றின் சமநிலையைக் கருதுவோமாயின் கோல் BA இன் முனை A இல் மேல்நோக்கி 5w/2 தாக்கும்.

BA இன் சமநிலைக்கு

$$\circlearrowleft B \quad x_1 2a\sin\frac{\pi}{5} + wa\cos\frac{\pi}{5} - \frac{5w}{2}2a\cos\frac{\pi}{5} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2w\cot\frac{\pi}{5}$$

AB,BC ஆகியவற்றின் சமநிலைக்கு

$$\leftarrow T - x - x_1 = 0$$

$$T = x + x_1 = w\tan\frac{\pi}{10} + 2w\cot\frac{\pi}{5}$$

$$= w(\tan\frac{\pi}{10} + 2\cot\frac{\pi}{5})$$

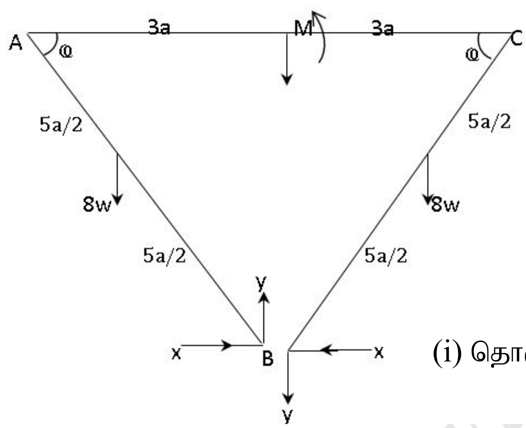
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 6

ஒவ்வொன்றும் நிறை 8w உம் நீளம் 5a உம் கொண்ட சமமான சீரான AB, BC எனும் இருகோல்களும் நிறை 14w உம் நீளம் 6a உம் கொண்ட சீரான மூன்றாம் கோல் AC ஒன்றும் சுயாதீனமாக இணைக்கப்பட்டு ABC எனும் முக்கோணி ஒன்று உருவாக்கப்படுகின்றது. A யிலிருக்கும் ஒரு ஒப்பமான அச்சாணியிலிருந்து முக்கோணியானது ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் தொங்குகின்றது. AC கிடையாகவும் B ஆனது AC இற்கு கீழாகவும் அமையும் வண்ணம் முக்கோணியானது சமநிலையில் இருப்பதற்கு இணையொன்று கோல் AC இல் பிரயோகிக்கப்படுகின்றது.

(i) இணையின் திருப்பத்தையும் போக்கையும் காண்க.

(ii) BC மீது CA, AB என்பவற்றினால் ஏற்றப்பட்ட விசைகளின் கிடைக்கூறுகளையும் நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் காண்க.



$\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

(i) தொகுதி

$$A \circlearrowleft \; M - 8w\frac{5a}{2}\cos\theta - 8w\frac{15a}{2}\cos\theta - 14w3a = 0$$

$$M = 80\cos\theta wa + 42wa$$

$$= 80x\frac{3}{5}wa + 42wa$$

$$= 90wa$$

போக்கு : இடஞ்சுழி

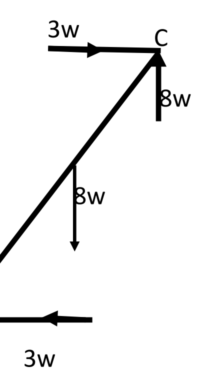
(ii) AB இன் சமநிலைக்கு

$$A \circlearrowleft \; 8w\frac{5a}{2}\cos\theta - y5a\cos\theta - x5a\sin\theta = 0 \quad \text{——— (1)}$$

CB இன் சமநிலைக்கு

$$C \circlearrowright \; 8w\frac{5a}{2}\cos\theta + y5a\cos\theta - x5a\sin\theta = 0 \quad \text{——— (2)}$$

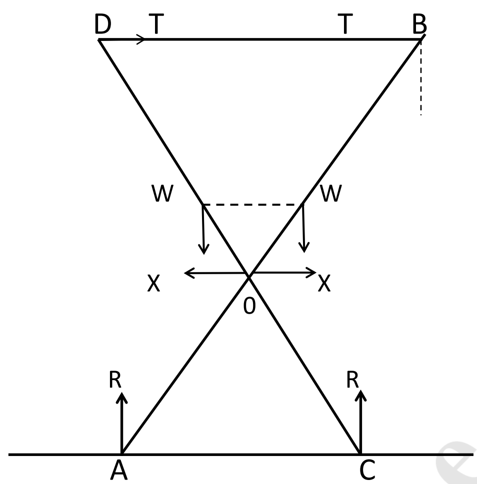
(1) ,(2) => y=0, x = 3w



Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 7

ஒவ்வொன்றும் நிறை w உம், நீளம் a உம் உள்ள AB,CD என்னும் இரண்டு சீரான கோல்கள் ஒரு புள்ளி O வில் ஒருங்கே ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. இங்கு OB,OD என்பன ஒவ்வொன்றும் நீளம் b ஐ உடையன. A,C என்னும் முனைகள் ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தளத்தின் மீது கிடக்க B,D என்னும் முனைகள் ஓர் இலேசான இழையினாலே தொடுக்கப்பட்டிருக்க, அக்கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஓய்வில் இருக்கின்றன. நிலைக்குத்துடன் அக்கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் சாய்வு α எனின், அம்மூட்டில் உள்ள மறுதாக்கம் $\frac{aw}{2b}\tan\alpha$ என நிறுவுக.



தொகுதி ↑ $2R-2w=0$

$\Rightarrow R=w$

சமச்சீரின்படி மூட்டு 0 இல் மறுதாக்கம் கிடையாக இருக்கும்

AB இன் சமநிலைக்கு

$$\text{B}\circlearrowleft \quad w\frac{a}{2}\sin\alpha - Ra\sin\alpha + xb\cos\alpha = 0$$

$$w\frac{a}{2}\sin\alpha - wa\sin\alpha + xb\cos\alpha = 0$$

$$xb\cos\alpha = \frac{w}{2}a\sin\alpha$$

$$x = \frac{aw}{2b}\tan\alpha$$

மூட்டிலுள்ள மறுதாக்கம் கிடையாக $\frac{aw}{2b}\tan\alpha$ ஆகும்.

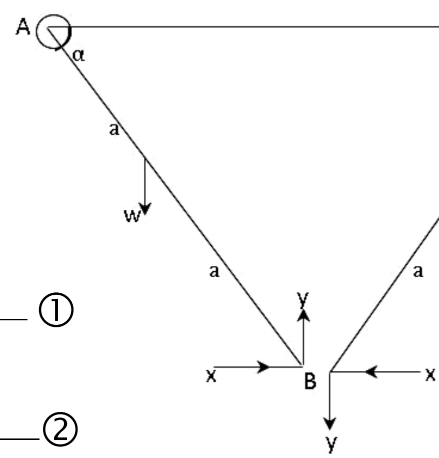
Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

உதாரணம் 8

AB,BC என்பன சமநீளம் 2a ஐயும் முறையே w,2w என்னும் நிறைகளையும் உடைய இரு சீர்க்கோல்களாகும். இவை Bயில் ஒப்பமாக ஒருமிக்க பிணைக்கப்பட்டிருக்கும் அதேவேளை ஒரு நிலைத்த கிடைவளையுடன் A யிலும் C யிலும் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. B ஆனது ACயிற்குக் கீழேயும் $C\hat{A}B = \alpha$ ஆகவும் இருக்குமாறு இக்கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே நாப்பத்தில் உள்ளன.

(i) B யில் உள்ள பிணையலின் மறுதாக்கத்தின் கிடைக்கூறு $\frac{3}{4}$ w cotα எனக்காட்டி, இத்தாக்கத்தின் நிலைக்குத்துக்கூறைக்காண்க.

(ii) மேலும் A யிலும் C யிலும் உள்ள தாக்கங்களின் தாக்கக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்குமெனின், $\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$ எனக்காட்டுக.



AB யின் சமநிலைக்கு

A↻ w acosα + y 2acosα – x 2asinα = 0 ——— ①

CB யின் சமநிலைக்கு

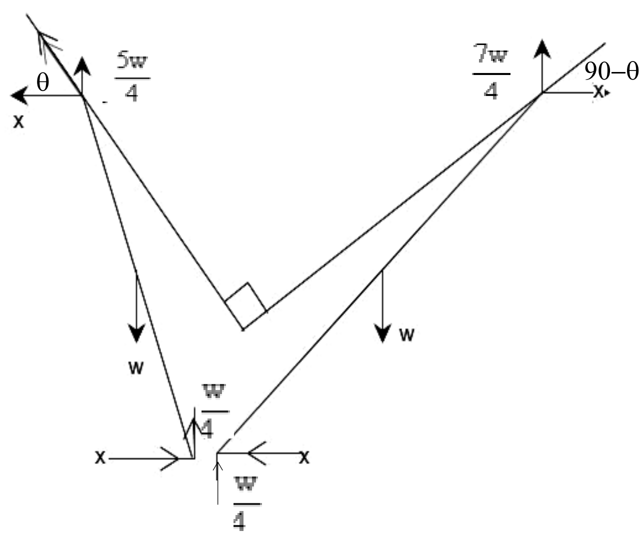
C↻ 2w acosα – y 2acosα – x 2asinα = 0 ——— ②

① + ② => 3w acosα - 4x asinα = 0

=> x = 3/4 wcotα

① - ② => -w acosα + 4y acosα = 0

=> y = w/4



$$\tan\theta = \frac{\frac{5w}{4}}{x} = \frac{5w}{4x}$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{\frac{7w}{4}}{x} = \frac{7w}{4x}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{7w}{4x}$$

$$\tan\theta\cot\theta = 1$$

$$\frac{5w}{4x}\cdot\frac{7w}{4x} = 1$$

$$35w^2 = 16x^2$$

$$35w^2 = 16x\frac{9}{16}w\cot^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha = \frac{9}{35}$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

பயிற்சிகள்

1. ஒவ்வொன்றும் w நிறையுடைய AB,BC,CD,DA என்னும் நான்கு சமகோல்கள் இவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டு சதுர உருவம் ABCD அமைக்கப்படுகின்றது. இவ்வொழுங்கு A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டும் A,C என்னும் மூட்டுக்களை இணைக்கும் இலேசான நீளா இழையொன்றினால் சதுர உருவம் பேணப்படுகின்றது. மூட்டு B யிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் இழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க.

2. ஓவ்வொன்றும் நிறை w வை உடைய PQ,QR,RS,SP என்னும் நான்கு சீரான சமகோல்கள் ஒரு சாய்சதுரம் PQRS ஐ ஆக்குமாறு ஒப்பமாக மூடப்பட்டுள்ளன. கோணம் QRS ஆனது tan-12 இற்கு சமமாக இருக்குமாறு PS,RS ஆகிய கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளுடன் தொடுக்கப்பட்ட ஓர் இலேசான நீட்டமுடியாத இழையினால் அது புள்ளி P யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நாப்பத்தில் பேணப்படுகின்றது.

   (i) R,S ஆகிய மூட்டுக்களில் உள்ள மறுதாக்கங்களைக் காண்க.

   (ii) இழையில் உள்ள இழுவை 4w எனக்காட்டுக.

3. ஒரு சாய்சதுரம் ABCD ஐ அமைக்குமாறு நான்கு சீரான சமகோல்கள் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. மூட்டு A யிலிருந்து தொங்கும் இச்சாய்சதுரம் BC யினதும் CD யினதும் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் ஓர் இலேசான கோலினால் ஒரு சதுர வடிவத்தில் பேணப்படுகின்றது. மூட்டு C யிலுள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க. இலேசான கோலில் உள்ள தகைப்பையும் காண்க.

4. ABCDEF என்பது ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் w நிறையுமுடைய ஆறு ஒழுங்கான கோல்களினால் அவற்றின் முனைகளில் மூட்டப்பட்ட அறுகோணியாகும். இது A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. இலேசான கோல்கள் BE,CE என்பவற்றினால் இதன் ஒழுங்கான உருவம் பேணப்படுகின்றது.

   (i) Bயிலுள்ள மறுதாக்கம் BW/2 எனவும்

   (ii) BF இலுள்ள தகைப்பு CE இலுள்ள தகைப்பின் 5 மடங்கெனவும் நிறுவுக.

5. ஒவ்வொன்றும் w நிறையுள்ள AB,BC,CD,DA எனும் சமமான சீரான நான்கு கோல்களைச் சுயாதீனமாக மூட்டிப்பெறப்பட்ட அமைப்பு A யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. AD,DC என்பவற்றின் நடுப்புள்ளிகளை இணைக்கும் இலேசான நீளா இழையொன்றினால் இச்சட்டப்படல் ஒரு சதுரத்தின் வடிவத்தில் வைத்திருக்கப்படுகிறது. இச்சட்டப்படல் ஒரு சதுரத்தின் வடிவத்தில் வைத்திருக்கப்படுகின்றது. ஓவ்வொரு மூட்டிலுமுள்ள மறுதாக்கத்தையும் இழையிலுள்ள இழுவையையும் காண்க.

தொகுப்பு : திரு. ப.விமலநாதன், ஆசிரியர் - இணைந்த கணிதம் (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக்கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு : திரு.இ.சுகுமார், ஆசிரியர்– த.தொ.தொ. (யா/ஏழாலை மகாவித்தியாலயம்)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

6. ஒவ்வொன்றும் w எனும் நிறையுடைய இரு சமமான சீரான கோல்கள் AB,AC என்பவை A யில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் முனைகள் B,C ஆனவை இலேசான நீட்டமுடியாத இழையொன்றினால் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் கோணம் α அமைக்கும் இரு ஒப்பமான தளங்கள் மீது B,C என்பன சமச்சீராய் ஓய்விலுள்ளன. BC கிடையாகவும் A ஆனது BCஇற்கு மேலாகவும் உள்ளன. B இலுள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

$\Delta BAC=2\theta$ ஆயிருக்க $\tan\theta>2\tan\alpha$ எனும் நிபந்தனைக்கு கட்டுப்பட, இழையிலுள்ள இழுவையானது $\frac{1}{2}w(\tan\theta-2\tan\alpha)$ ஆகுமெனக் காட்டுக. முனை A யிலுள்ள மறுதாக்கத்தைக்காண்க.

7. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் w நிறையும் கொண்ட AB,AC என்னும் இரண்டு சமமான சீரான கோல்கள் ஒப்பமாக A இல் மூட்டப்பட்டு, அச்சு கிடையாக நிலைப்படுத்தப்பட்ட r ஆரையைக்கொண்ட ஒப்பமான வட்ட உருளையின் மேல் சமச்சீராக ஓய்வில் இருக்கின்றது. ஒவ்வொரு கோலும் நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் α எனின் $a\sin^3\alpha= r\cos\alpha$ எனக்காட்டுக. மூட்டு A யில் உள்ள மறுதாக்கத்தைக் காண்க.

8. ஒவ்வொன்றும் a நீளமும் w நிறையும் கொண்ட நான்கு சீரான கோல்கள் ஒன்றுடனொன்று நுனிகளில் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டு அமைக்கப்பட்ட ABCD எனும் சாய்சதுரம் A இலும் B இலும் தொடுக்கப்பட்ட இருநிலைக்குத்தான இழைகளால் AB கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் தாங்கப்படுகின்றது. இலேசான மீள் தன்மையற்ற α நீளமுள்ள ஒரு இழை A ஐயும் C ஐயும் தொடுக்கின்றது. A இலும் B இலும் தொடுக்கப்பட்ட இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் முறையே 3w உம் w உம் எனக்காட்டி இழை AC இலுள்ள இழுவையைக்காண்க.

9 இரு சமமான சீரான AB உம் BC உம் ஆன இருகோல்கள் B இல் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இக்கோல்களின் நடுப்புள்ளிகளில் கயிறு இறுக்கமாக இருக்கும் போது கோணம் $\Delta ABC=2\theta$ ஆக இருக்கும் வண்ணம் கயிறு தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. A எனும்முனை சுயாதீனமாக சுழலப் பொருத்தப்பட்டு கிடைக்கும் கீழ் αஎனும்கோடு அமையும் வண்ணம் A இன் ஊடாக ஒப்பமான சாய்தளத்தில் C எனும் முனை உள்ளது. ஒவ்வொரு கோலின் நிறை w ஆக இருக்கும் போது கயிற்றிலுள்ள இழுவை $w(\sin\alpha+\cos\alpha\tan\theta)$ எனக்காட்டுக.

10. சமநீளமும் சமநிறையுமுள்ள நான்கு சீரான கோல்கள் ஒரு சங்கிலியை அமைக்குமாறு அவற்றின் நுனிகளில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சுங்கிலியின் சுயாதீன நுனிகள் ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள இரு நிலைத்த புள்ளிகளுடன் ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. தொகுதியானது சமநிலையில் இருக்குமாறு முதலாம், நான்காம் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் α எனும் கோணத்தை ஆக்குகின்றன. இரண்டாம், மூன்றாம் கோல்கள் ஒவ்வொன்றும் கிடையுடன் $\tan^{-1}(1/2 \tan\alpha)$ எனும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளதெனக்காட்டி பிணையல்களிலுள்ள மறுதாக்கங்களை காண்க.

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

11. மூன்று சமகோல்கள் AB,BC,CD உம் அவற்றைப்போல இருமடங்கு நீளமுள்ள AD உம் A,B,C,D ஆகியவற்றில் சுயாதீனமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு BC இன் நடுப்புள்ளியில் இருந்து தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. அக்கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை w உம் மிகநீண்ட கோலின் நிறை 2w உம் ஆயின் அப்பிணையல்களின் மீதுள்ள விசைகளின் பருமன்களைக் காண்க. A,B என்பவற்றிலுள்ள விசைகளின் தாக்கக்கோடுகள் BC இற்குக் கீழே ஆழம் bc இல் சந்திக்கின்றன எனக்காட்டுக.

12. ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a யை உடைய AB,BC,CD,DE என்னும் நான்கு சீரான கோல்கள் B,C,D ஆகியவற்றில் ஒப்பமாக மூடப்பட்டுள்ளன. AB,DE ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை 2w உம் BC,CD ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை w உம் ஆகும். கோல்கள் ஒரே கிடை மட்டத்தில் இருக்கும் A,E ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை AB,BC ஆகிய கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் முறையே αb என்னும் கோணங்களை ஆக்கத் தொகுதி நாப்பதில் உள்ளது. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.

13. ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a யையும் நிறை w வையும் உடைய AB, BD என்னும் இரு ஒப்பமான சீர்க்கோல்கள் B யில் சுயாதீனமாகப்பிணைக்கப்பட்டு ஒரு நிலைத்த புள்ளி O இல் கட்டப்பட்ட ஒவ்வொன்றும் நீளம் 2a யை உடைய AO, CO என்னும் இரு இலேசான நீட்டமுடியாத இழைகளினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளன. நிறை w ஐயும் ஆரை $\frac{\alpha}{3}$ ஐயும் உடைய ஒரு சீர்க்கோளம் கோல்களுடன் தொடுகையிலே ஓய்வில் இருக்கும் அதேவேளை ஒரு சீர்க்கோளம் கோல்களுடன் தொடுகையிலே ஓய்வில் இருக்கும் அதேவேளை அவற்றினால் தாங்கப்படுகின்றது. நாப்புத்தளத்தில் ஒவ்வொரு கோலும் $\cot^3\theta+\cot\theta-30=0$ இனால் தரப்படும் கோணம் Θ வை நிலைக்குத்துடன் ஆக்குகின்றதெனக்காட்டுக. Cotθ இன் ஒரேயொரு இயல்தகு பெறுமானத்தைக்கண்டு, இதிலிருந்து பிணையல் B யில் உள்ள மறுதாக்கம் w எனக்காட்டுக.

14. ஒவ்வொன்றும் 2a நீளமும் w நிறையும் உடைய AB,BC,CD என்னும் சீரான மூன்று கோல்கள் Bஇலும் C இலும் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. BC கிடையாகவும் AB, CD ஆகிய ஒவ்வொன்றும் நிலைத்த ஒப்பமான ஒரு முனையினாலே தாங்கப்பட்டுமிருக்க இத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கின்றது. இம்முனைகள் இரண்டும் ஒரே கிடைமட்டத்திலும் 2c இடைத்துாரத்திலும் இருக்கின்றன. AB ஆனது நிலைக்குத்துடன் கோணம் α இல் சாய்ந்திருக்குமெனக்காட்டுக. இங்கு $\sin\alpha = \left\{\frac{3(c-\alpha)}{2\alpha}\right\}^{\frac{1}{3}}$ ஆகும். Bயிலுள்ள மறுதாக்கத்தை கண்டு அது கிடையுடன் கோணம் $\tan^{-1}\left[\frac{1}{3}\tan\alpha\right]$ ஆக்குகிறதெனக்காட்டுக.

தொகுப்பு : திரு. ப.விமலநாதன், ஆசிரியர் - இணைந்த கணிதம் (யா/யாழ்ப்பாணம் இந்துக்கல்லூரி)

கணினி வடிவமைப்பு : திரு.இ.சுகுமார், ஆசிரியர்– த.தொ.தொ. (யா/ஏழாலை மகாவித்தியாலயம்)

Copyright © www.e-thaksalawa.moe.gov.lk