5311

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

10 T I

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2010 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2010 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2010

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

※ ஆறு வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

1. (*a*) இருபடிச் சமன்பாடு $f(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ இன் மூலங்கள் α, β ஆகும்; இங்கு p, q ஆகியன மெய்யானவை; அதோடு $2p^2 + q \neq 0$ ஆகும். $y(p-x) = p + x$ எனின், $f(x) = 0$ இல் x இற்குப் பிரதியிடுவதன் மூலம் அல்லது வேறுவிதமாக, $g(y) \equiv (2p^2+q)y^2 + 2(q-p^2)y + q = 0$ எனக் காட்டுக; இங்கு $y \neq -1$.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $g(y)=0$ இன் மூலங்களை α, β ஆகியவற்றின் சார்பில் காண்க.

$\left(\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\alpha+\beta}\right)^2$ ஐ p, q ஆகியவற்றின் சார்பில் எடுத்துரைக்க.

(*b*) a, b, c, m என்பன $a+b+c=0$ ஆகவும் $ab+bc+ca+3m=0$ ஆகவும் இருக்கத்தக்கதாக மாறிலிகளெனின், $(y+ax)(y+bx)(y+cx) = y\left(y^2 - 3mx^2\right) + abcx^3$ என நிறுவுக.

$y = x^2 + m$ எனின், $\left(x^2+ax+m\right)\left(x^2+bx+m\right)\left(x^2+cx+m\right) = x^6 + abcx^3 + m^3$ எனக் காட்டுக.

$g(x) = x^6 + 16x^3 + 64$ ஆனது $\left(x^2-2x+m\right), \left(x^2+ax+m\right), \left(x^2+bx+m\right)$ என்னும் காரணிகளைக் கொண்டதெனின், m, a, b ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

இதிலிருந்து, (i) $g(x)$ ஆனது எல்லா x இற்கும் மறையல்லாததெனக் காட்டுக.
(ii) சமன்பாடு $g(x) = 0$ இன் மூலங்களைக் காண்க.

2. (*a*) 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9 என்னும் ஏழு இலக்கங்களிலிருந்தும் எந்தவோர் இலக்கமும்
(i) மறிதரலுடன்,
(ii) மறிதரலின்றித்
தெரிந்தெடுக்கப்படுமெனின், எத்தனை வெவ்வேறு **நான்கிலக்க** எண்கள் ஆக்கப்படலாமெனக் காண்க.
வகை (i) இல் எத்தனை நான்கிலக்க எண்களில் யாதாயினும் ஓர் இலக்கம் இரு தடவைகளுக்கு மேற்பட இருப்பதில்லையெனக் காண்க.
வகை (ii) இல் எத்தனை நான்கிலக்க எண்களில் இரு ஒற்றை இலக்கங்களும் இரு இரட்டை இலக்கங்களும் இருக்கின்றனவெனக் காண்க. அவற்றில் எத்தனை இரட்டையெனக் காண்க.

(*b*) எல்லா $x \in \mathbb{R}$ இற்கும் வழக்கமான குறிப்பீட்டில்

$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + \ldots + {}^nC_rx^r + \ldots + {}^nC_nx^n$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு n ஒரு நேர் நிறைவெண்.

$(1+x)^{n-1}$ இனதும் $(1+x)$ இனதும் பெருக்கத்தைக் கருதுவதன் மூலம்
${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r, \ r = 1, 2, \ldots, n-1$ இற்கு எனக் காட்டுக.

${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^{n-1}\ {}^nC_{n-1} + (-1)^n\ {}^nC_n = 0$ ஐ **உய்த்தறிக**.

ஒரு **மாற்று முறை**யினால் மேற்குறித்த பேறை வாய்ப்புப்பார்க்க.

n ஓர் இரட்டை நிறைவெண்ணெனின், ${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots + {}^nC_n = 2^{n-1}$ ஐ **உய்த்தறிக**.

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

3. **கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டின்** மூலம் எந்த நேர் நிறைவெண் n இற்கும் $4n^3-6n^2+4n-1=n^4-(n-1)^4$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து $r=1,2,\ldots$ இற்கு $u_r-u_{r-1}=4r^3-6r^2+4r-1$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக u_r ஐ எழுதுக.

$\sum_{r=1}^{n} r^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ஐ **உய்த்தறிக.**

[$\sum_{r=1}^{n} r^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ என நீர் கொள்ளலாம்.]

தொடர் $1^2+\left(1^2+2^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)+\cdots$ இன் r ஆம் உறுப்பு v_r ஐ எழுதுக.

$\sum_{r=1}^{n} v_r=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ எனக் காட்டுக.

இத்தொடர் ஒருங்குகின்றதா ? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

w_r ஆனது தொடர் $\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\frac{9}{1^2+2^2+3^2+4^2}+\cdots$ இன் r ஆவது உறுப்பெனக் கொள்வோம்.

$w_r=f(r)-f(r+1)$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக $f(r)$ ஐக் காண்க.

இதிலிருந்து, $S_n=\sum_{r=1}^{n} w_r$ ஐக் காண்க.

இத்தொடர் ஒருங்குகின்றதா ? உமது விடையை நியாயப்படுத்துக.

4. (*a*) $|z-a|=|z+a|$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண் z இன் ஒழுக்கைத் துணிக; இங்கு a ஒரு பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்.

(*b*) $z_1,\ z_2\ (\neq 0)$ என்பன $|z_1-2z_2|=|z_1+2z_2|$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக இரு சிக்கலெண்களெனக் கொள்வோம்.

பகுதி (*a*) ஐப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக, $\frac{iz_1}{z_2}=k$ என நிறுவுக; இங்கு k மெய்யானது.

(i) $|\arg(z_1)-\arg(z_2)|=\frac{\pi}{2}$ எனக் காட்டுக.

(ii) ஆகண் வரிப்படத்தில் உள்ள P_1, P_2 என்னும் இரு புள்ளிகள் முறையே $z_1+2z_2,\ z_1-2z_2$ என்னும் சிக்கலெண்களை வகைகுறிக்கின்றன.

OP_1 ஆனது OP_2 இற்குச் செங்குத்தானதன்றெனின், $P_1\hat{O}P_2=\tan^{-1}\left(\frac{4|k|}{k^2-4}\right)$ எனக் காட்டுக; இங்கு, O ஆனது ஆகண் தளத்தின் உற்பத்தியாகும்.

OP_1 ஆனது OP_2 இற்குச் செங்குத்தானதெனின், k யின் இரு இயல்தகு பெறுமானங்களையும் துணிக.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

5. (*a*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x + x\sin 3x}{x^2}$ ஐப் பெறுமானங்கணிக்க.

(*b*) (i) $y=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$ எனவும் $z=\tan^{-1}x$ எனவும் கொள்வோம். $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ ஐக் காண்க.

(ii) $y=e^{m\sin^{-1}x}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு m ஒரு மாறிலி. $\left(1-x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-m^2y=0$ எனக் காட்டுக. $x=0$ இல் $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(*c*) தரப்பட்டுள்ள நீளம் l ஐ உடைய ஒரு கம்பி இரு பகுதிகளாக வெட்டப்பட்டுள்ளது. ஒரு பகுதி வட்ட வடிவமாக வளைக்கப்பட்டும் மற்றைய பகுதி சதுர வடிவமாக வளைக்கப்பட்டும் உள்ளன. வட்டத்தினதும் சதுரத்தினதும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $A(x)$ ஆனது $A(x)=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{(l-x)^2}{16}$ சதுர அலகுகளினால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக; இங்கு x, $(0\le x\le l)$ ஆனது வட்ட வடிவமாக வளைக்கப்பட்ட கம்பியின் பகுதியின் நீளமாகும்.
இதிலிருந்து, சதுரத்தின் பக்கம் வட்டத்தின் விட்டத்திற்குச் சமமாக இருக்கும்போது பரப்பளவு $A(x)$ இழிவாகுமெனக் காட்டுக.

6. (*a*) **பகுதிப் பின்னங்களைப்** பயன்படுத்தி $\displaystyle\int\frac{2x}{\left(1+x^2\right)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ ஐக் காண்க.

(*b*) $I=\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ எனவும் $J=\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$ எனவும் கொள்வோம்; இங்கு a, b ஆகியன பூச்சியமல்லாத மெய்யெண்கள்.

(i) $bI + aJ = e^{ax}\sin bx$

(ii) $aI - bJ = e^{ax}\cos bx$

எனக் காட்டுக.
இதிலிருந்து, I யையும் J யையும் காண்க.

(*c*) பிரதியீடு $x^3t+1=0$ ஐப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக, $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^3-1\right)}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{9}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

7. (*a*) $a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$ என்னும் நேர்கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணத்தின் இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகள் $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$ எனக் காட்டுக.

(*b*) ஒரு புள்ளி $\left(x_0,\, y_0\right)$ இனூடாக உள்ள ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=t$ என்னும் பரமான வடிவத்தில் தரப்படுகின்றது; இங்கு $a^2+b^2=1$ உம் t ஒரு பரமானமும் ஆகும்.

$|t|$ ஆனது புள்ளி $\left(x_0,\, y_0\right)$ இலிருந்து புள்ளி (x, y) இற்குக் கோடு வழியே அளக்கப்படும் தூரமெனக் காட்டுக.

(*c*) $ABCD$ ஆனது முதற் காற்பகுதியில் முற்றாகக் கிடக்கும் ஒரு சாய்சதுரமாகும். AB, AD ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் முறையே $x-2y+5=0,\ 2x-y+1=0$ ஆகும். கோணம் BAD கூர்ங் கோணமாகும். அதோடு $AC=2\sqrt{2}$. (*a*), (*b*) என்னும் பகுதிகளைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறு விதமாக, AC யினதும் சாய்சதுரத்தின் இரு எஞ்சிய பக்கங்களினதும் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

E ஆனது சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் வெட்டுப் புள்ளியெனின், DE யின் நீளத்தையும் **இதிலிருந்து** சாய்சதுரத்தின் பரப்பளவையும் காண்க.

The National e-learning Portal for The General Education

[பக். 4 ஐப் பார்க்க

8. $x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$, $x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று உள்ளே அல்லது வெளியே தொடுவதற்கான நிபந்தனைகளைக் கூறுக.

$S\equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ஒரு வட்டம் எனவும் $P_1(x_1, y_1)$ என்பது வட்டம் $S=0$ இற்கு வெளியே கிடக்கின்ற ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம். புள்ளி P_1 இலிருந்து வட்டம் $S=0$ இற்கு வரையப்பட்டுள்ள ஒரு தொடலியின் நீளம் $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ இனால் தரப்படுகின்றதெனக் காட்டுக.

$S_1\equiv x^2+y^2+4x-2y-5=0$, $S_2\equiv x^2+y^2-8x-6y+15=0$ என்னும் இரு வட்டங்களும் ஒன்றையொன்று வெளியே தொடுகின்றனவென நிறுவுக.

$S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் தொடுகைப் புள்ளி A யின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க.

புள்ளி P யிலிருந்து வட்டம் $S_1=0$ இற்குள்ள ஒரு தொடலியின் நீளம் புள்ளி P யிலிருந்து வட்டம் $S_2=0$ இற்குள்ள ஒரு தொடலியின் நீளத்தின் k மடங்கிற்குச் சமமாக இருக்கத்தக்கதாக ஒரு புள்ளி P இருக்கின்றதெனக் கொள்வோம்.

புள்ளி P யின் ஒழுக்கானது

(i) $k=1$ எனின், $S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களினதும் மையங்களைத் தொடுக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகப் புள்ளி A யினூடாகச் செல்கின்ற ஒரு கோடென,

(ii) $k\neq 1$ எனின், புள்ளி A யினூடாகச் செல்கின்ற ஒரு வட்டமென

நிறுவுக.

$k=\dfrac{1}{2}$ ஆக இருக்கும்போது P யின் ஒழுக்கின் சமன்பாட்டை எழுதி, அது புள்ளி A யில் $S_1=0$, $S_2=0$ ஆகிய இரு வட்டங்களில் ஒன்றை வெளியேயும் மற்றையதை உள்ளேயும் தொடுகின்றதெனக் காட்டுக.

9. (*a*) ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில் ***கோசைன் நெறி***யைக் கூறி, நிறுவுக.

ஒரு முக்கோணி ABC யிற்கு வழக்கமான குறிப்பீட்டில்

(i) $2\left(\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}\right)=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$,

(ii) $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$ எனின் கோணம் C ஆனது $\dfrac{\pi}{3}$ ஆகும்

எனக் காட்டுக.

(*b*) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ ஐ $R\cos(\theta-\alpha)$ என்னும் வடிவத்தில் எடுத்துரைக்க; இங்கு R, α ஆகியன மெய்யானவை.

இதிலிருந்து, சமன்பாடு $\sqrt{3}\cos^2\theta+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta-\cos\theta+\sin\theta=0$ இன் பொதுத் தீர்வைக் காண்க.

(*c*) $-1\leq x\leq 1$ இற்கு $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ எனக் காட்டுக.

***

The National e-Learning Portal for the General Education

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

10 T II

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2010 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2010 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2010

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

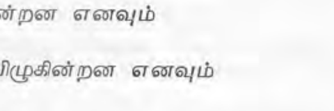
※ **ஆறு** வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

(இவ்வினாத்தாளில் g ஆனது புவியீர்ப்பினாலான ஆர்முடுகலைக் குறிப்பிடுகின்றது.)

1. (a) திணிவு M ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P தரையின் மீது உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து நேரம் $t=0$ இல் வேகம் u உடன் நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கிப் புவியீர்ப்பின் கீழ் எறியப்படுகின்றது. ஒவ்வொன்றும் மிகச் சிறிய திணிவு $m(<<M)$ ஐ உடைய P_1, P_2, P_3 என்னும் மூன்று துணிக்கைகள் துணிக்கை P யிலிருந்து முறையே $t=\frac{u}{2g},\ t=\frac{u}{g},\ t=\frac{3u}{2g}$ என்னும் நேரங்களில் துணிக்கை P தொடர்பாக $2v, 3v, 6v$ என்னும் வேகங்களுடன் கிடையாக ஒரே போக்கில் எறியப்படுகின்றன. துணிக்கை P யின் வேகத்திற்கான வேக – நேர வரைபை வரைக. P_1, P_2, P_3 ஆகிய துணிக்கைகளின் வேகங்களின் நிலைக்குத்துக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய வேக – நேர வரைபுகள் துணிக்கை P யின் வேக – நேர வரைபின் பகுதிகளுடன் ஒன்றுபடுகின்றனவெனக் காட்டி, இப்பகுதிகளை இனங்காண்க.
P_1, P_2, P_3 ஆகிய துணிக்கைகளின் வேகங்களின் கிடைக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் உரிய வேக – நேர வரைபுகளை ஒரு புறம்பான வரிப்படத்தில் வரைக. வேக – நேர வரைபுகளைப் பயன்படுத்தி
   (i) நான்கு துணிக்கைகளும் தரையை ஒரே நேரம் $t=\frac{2u}{g}$ இல் அடைகின்றன எனவும்
   (ii) P_1, P_2, P_3 ஆகிய மூன்று துணிக்கைகளும் தரையில் ஒரே இடத்தில் விழுகின்றன எனவும்
   காட்டுக.

(b) ஒரு மனிதன் அமைதியான நீரில் கதி u உடன் நீந்தக்கூடியவன். அகலம் d யை உடைய ஓர் ஆறு தரை தொடர்பாகக் கதி $v\ (<u)$ உடன் பாய்கின்றது. மனிதன் ஆற்றின் ஒரு கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளி P யில் இருக்கின்றான். அவன் ஆற்றின் மற்றைய கரையில் நீரோட்டத்திற்கு எதிரான திசையில் ஒரு புள்ளி Q இற்கு நீந்தி, திரும்பப் புள்ளி P யிற்கு நீந்த விரும்புகின்றான். கரைகள் நேராகவும் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாகவும் PQ ஆனது நீரோட்டத்திற்கு எதிரான திசையுடன் கோணம் $\alpha, \left(0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்குவதாகவும் இருப்பின், தொடர்பு வேகங்களின் வேக முக்கோணிகளை ஒரே வரிப்படத்தில் வரைந்து அல்லது வேறு விதமாக, மனிதன் புள்ளி Q இற்கு நீந்தித் திரும்பப் புள்ளி P யிற்கு வருவதற்கு எடுக்கும் நேரம் $\frac{2d\sqrt{u^2\operatorname{cosec}^2\alpha - v^2}}{u^2-v^2}$ எனக் காட்டுக.
   (i) புள்ளி Q ஆனது புள்ளி P யின் நீரோட்டத்தின் திசையிலும் PQ ஆனது நீரோட்டத்தின் திசையுடன் ஒரு கோணம் $\alpha, \left(0<\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$ ஐ ஆக்குவதாகவும் இருப்பின், எடுக்கும் மொத்த நேரத்தில் மாற்றம் எதுவும் இல்லை என்பதையும்
   (ii) புள்ளி Q ஆனது மற்றைய கரையில் உள்ள புள்ளி P யிற்கு நேர் எதிரானதாக இருக்கும்போது மொத்த நேரம் இழிவாகும் என்பதையும்
   உய்த்தறிக.

2. ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவர் மீது உள்ள ஒரு புள்ளி O உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள நீளம் l ஐ உடைய இலேசான நீட்டமுடியாத இழை ஒன்று BC யினூடான முகம் ஒரு நிலைத்த ஒப்பமான கிடை நிலத்தின் மீது இருக்கும் திணிவு M ஐ உடைய ஓர் ஒப்பமான ஆப்பின் திணிவு மையத்தினூடாகச் செல்லும் முக்கோண நிலைக்குத்துக் குறுக்குவெட்டு ABC யின் உச்சி A யில் நிலைப்படுத்தப்பட்ட ஓர் ஒப்பமான கப்பியின் மேலாகச் செல்கின்றது. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இழையின் மற்றைய நுனியுடன் தொடுக்கப்பட்டு வரிப்படத்தில் காணப்படுகின்றவாறு OA கிடையாக இருக்க, இழை ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இறுக்கமாகப் பேணப்படுகின்றது.



F ஆனது நிலம் தொடர்பாக ஆப்பின் ஆர்முடுகலின் பருமனாகவும் f ஆனது ஆப்புத் தொடர்பாகத் துணிக்கை P யின் ஆர்முடுகலின் பருமனாகவும் இருப்பின், $f=F$ எனக் காட்டுக. AC ஆனது கிடையுடன் ஒரு கோணம் α இல் சாய்ந்திருப்பின், துணிக்கை P யிற்கு AC வழியேயும் தொகுதிக்குக் கிடையாகவும் இயக்கச் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

[பக். 2 ஐப் பார்க்க

இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக, ஆப்பு சுவரை நோக்கி ஆர்முடுகல் $\dfrac{mg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}$ உடன் இயங்குகின்றதெனக் காட்டுக.

B ஆனது நிலைக்குத்துச் சுவரிலிருந்து கிடைத் தூரம் d யில் இருக்க இத்தொகுதி தொடக்கத்தில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. PC ஆனது d யிலும் கூடியதாக இருக்குமெனின், B ஆனது நேரம் $\sqrt{\dfrac{2d\{M+2m(1-\cos\alpha)\}}{mg\sin\alpha}}$ இற்குப் பின்னர் கதி $\sqrt{\dfrac{2dmg\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}}$ உடன் சுவரில் அடிக்குமெனக் காட்டுக. அதோடு B சுவரில் அடிப்பதற்குச் சற்று முன்பாக நிலம் தொடர்பாகத் துணிக்கை P யின் கதி $2\sqrt{\dfrac{dmg\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{M+2m(1-\cos\alpha)}}$ எனவும் காட்டுக.

3. ஓர் ஒப்பமான துணிக்கை P ஆனது புவியீர்ப்பின் கீழ் கிடையுடன் ஒரு கோணம் $\alpha, \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ இல் வேகம் u உடன் எறியப்படுகின்றது. துணிக்கை P கிடையாக இயங்கும் கணத்தில் அது நீளம் l ஐ உடைய ஒரு நீட்ட முடியாத இழையின் ஒரு நுனியிலிருந்து தொங்கும் ஓய்வில் உள்ள சம திணிவை உடைய வேறோர் ஒப்பமான துணிக்கை Q இல் அடிக்கின்றது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு கிடைத் தண்டவாளத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. தண்டவாளம் துணிக்கை P யின் பாதையும் OQ வும் கிடக்கும் நிலைக்குத்துத் தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. தொடக்கத்திலே P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளுக்குமிடையே உள்ள கிடைத் தூரம் $\dfrac{u^2\sin 2\alpha}{2g}$ எனக் காட்டுக. இரு துணிக்கைகளுக்குமிடையே உள்ள மீளமைவுக் குணகம் e எனின், மோதுகைக்கு மட்டுமட்டாகப் பின்னர் P, Q ஆகிய இரு துணிக்கைகளும் முறையே $\dfrac{(1-e)u\cos\alpha}{2}$, $\dfrac{(1+e)u\cos\alpha}{2}$ என்னும் வேகங்களுடன் கிடையாக இயங்கத் தொடங்குமெனக் காட்டுக. OQ ஆனது கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் ஒரு கோணம் θ வை ஆக்கும்போது OQ வழியே துணிக்கை Q வின் இயக்கச் சமன்பாட்டின் கூறையும் துணிக்கை Q இற்கான பொறிமுறைச் சக்திக் காப்பின் சமன்பாட்டையும் எழுதுக.

$u\cos\alpha \geq \dfrac{2\sqrt{5gl}}{1+e}$ எனின், துணிக்கை Q வட்ட இயக்கத்தை ஆற்றி முடிக்கின்றது என்பதை **உய்த்தறிக.**

துணிக்கை P சென்ற கிடைத் தூரம் $\dfrac{(3-e)u^2\sin 2\alpha}{4g}$ எனக் காட்டுக.

$e=3$ எனின், துணிக்கை P திரும்ப எறியப் புள்ளிக்கு வருகின்றது என்பதை **உய்த்தறிக.**

4. திணிவு m ஐ உடைய ஒரு துணிக்கை P ஆனது இயற்கை நீளம் l ஐ உடைய ஒரு மீள்தன்மை இழையின் ஒரு நுனியுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மற்றைய நுனி ஒரு சீலிங்கின் ஒரு நிலைத்த புள்ளி O வுடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இழையின் மீள்தன்மை மட்டு λ எனின், துணிக்கை P நாப்பத்தில் தொங்கும்போது இழையின் நீட்சி a ஆனது $a=\dfrac{mgl}{\lambda}$ இனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

OP நிலைக்குத்தாகவும் $l+a+b$ யிற்குச் சமமாகவும் இருக்கத்தக்கதாக இழை இப்போது ஒரு மேலதிக நீளம் $b(>a)$ யினால் ஈர்க்கப்பட்டு, துணிக்கை P ஓய்விலிருந்து விடுவிக்கப்படுகின்றது. இழையின் நீளம் $l+a+x$ ஆக இருக்கும்போது, இங்கு $-a\leq x\leq b$, துணிக்கை P யின் இயக்கச் சமன்பாட்டை எழுதி, வழக்கமான குறிப்பீட்டில் $\ddot{x}+\dfrac{g}{a}x=0$ எனக் காட்டுக.

மேற்குறித்த சமன்பாட்டின் தீர்வு $x=A\cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t+B\sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கின்றதெனக் கொண்டு A, B ஆகிய மாறிலிகளைக் காண்க.

துணிக்கை P நேரம் $\sqrt{\dfrac{a}{g}}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$ இற்கு எளிய இசை இயக்கத்தை ஆற்றுகின்றது எனவும், இங்கு $\alpha=\sin^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$, எளிய இசை இயக்கத்திலிருந்து விலகும் நேரத்தில் துணிக்கை P யின் வேகம் மேல்நோக்கி $\sqrt{\dfrac{g}{a}\left(b^2-a^2\right)}$ எனவும் காட்டுக.

அத்துடன் துணிக்கை P பின்னர் புவியீர்ப்பின் கீழ் இயங்கி, $b>a\sqrt{1+\dfrac{2\lambda}{mg}}$ எனின், சீலிங்கில் பூச்சியமல்லாத வேகத்துடன் அடிக்கும் எனவும் காட்டுக.

[பக். 3 ஐப் பார்க்க

5. (*a*) $2a$ மீற்றர் பக்கமுள்ள ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி $ABCDEF$ இன் AB, BC, CD, ED, EF, AF என்னும் பக்கங்கள் வழியே எழுத்து ஒழுங்குமுறையினால் காட்டப்படும் திசைகளில் முறையே $2P, P, 2P, 3P, 2P$, P நியூற்றன் பருமனுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. தொகுதியானது பருமன் $\sqrt{3}Pa$ நியூற்றன் மீற்றர் உள்ள ஓர் இணையுடன் AC வழியே தாக்கும் $2\sqrt{3}P$ நியூற்றன் என்னும் ஒரு விளையுள் விசைக்குச் சமவலுவானதென நிறுவுக.

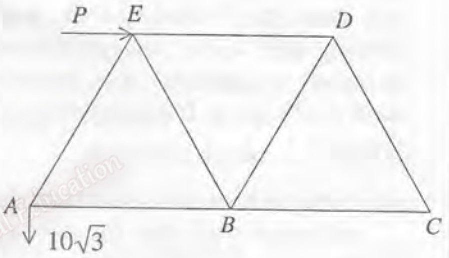
தொகுதி ஒரு தனி விளையுள் விசைக்குச் சமவலுவானதெனின், இவ்விளையுள் விசையின் தாக்கக் கோட்டினதும் (தேவையெனின் நீட்டப்பட்ட) FA யினதும் வெட்டுப் புள்ளியைக் காண்க.

இதிலிருந்து, தொகுதியை நாப்பத்தில் வைத்திருப்பதற்குத் தொகுதியில் புகுத்தப்பட வேண்டிய தனி விசையின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

(*b*) முறையே சம நீளத்தையும் $W, w\ (W>w)$ என்னும் நிறைகளையும் உடைய AB, BC என்னும் இரு சீரான கோல்கள் B யில் சுயாதீனமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. $A\hat{B}C = \frac{\pi}{2}$ ஆகவும் A, C ஆகிய முனைகள் ஒரு கரடான கிடைத் தரை மீதும் இருக்கக் கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நாப்பத்திலே ஓய்வில் உள்ளன. கோல்களுக்கும் தரைக்குமிடையே உள்ள உராய்வுக் குணகம் μ எனின், நாப்பத்தைப் பேணுவதற்கு μ வின் மிகச் சிறிய இயல்தகு பெறுமானம் $\frac{W+w}{W+3w}$ எனக் காட்டுக.

$\mu = \frac{W+w}{W+3w}$ எனின், நழுவல் A யில் அன்றி C யில் நிகழப் பார்க்குமென நிறுவுக.

6. (*a*) ஒவ்வொன்றும் நீளம் $2a$ யை உடைய AB, BC, CD, DE என்னும் நான்கு சீரான கோல்கள் B, C , D ஆகியவற்றில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, DE ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை $2W$ வும் BC, CD ஆகிய கோல்கள் ஒவ்வொன்றினதும் நிறை W வும் ஆகும். கோல்கள் ஒரே கிடை மட்டத்தில் இருக்கும் A, E ஆகிய புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தொங்கவிடப்பட்டிருக்கும் அதே வேளை AB, BC ஆகிய கோல்கள் நிலைக்குத்துடன் முறையே α, β என்னும் கோணங்களை ஆக்கத் தொகுதி நாப்பத்தில் உள்ளது. $\tan\beta = 4\tan\alpha$ எனக் காட்டுக.



(*b*) சம நீளமுள்ள $AB, BC, CD, DE, EA, EB, BD$ என்னும் ஏழு இலேசான கோல்கள் உருவில் காணப்படுகின்ற வாறு ஒரு சட்டப்படலை ஆக்குமாறு அவற்றின் முனைகளில் ஒப்பமாக மூட்டப்பட்டுள்ளன. சட்டப்படல் C யில் ஒப்பமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, A யில் $10\sqrt{3}$ நியூற்றன் என்னும் ஒரு நிறையைக் காவுகின்றது. AC கிடையாக இருக்க E யில் உள்ள ஒரு கிடை விசை P யினால் சட்டப்படல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பேணப்படுகின்றது.

(i) E யில் உள்ள விசை P யின் பருமனைப் பெறுமானங்கணிக்க.

(ii) C யில் உள்ள மறுதாக்கத்தின் பருமனையும் திசையையும் காண்க.

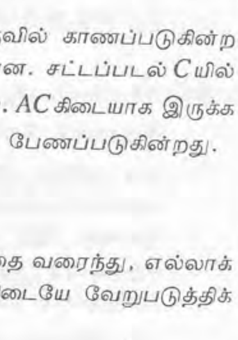
(iii) போவின் குறிப்பீட்டைப் பயன்படுத்திச் சட்டப்படலுக்கான ஒரு தகைப்பு வரிப்படத்தை வரைந்து, எல்லாக் கோல்களிலும் உள்ள தகைப்புகளைக் கண்டு, இழுவைகளுக்கும் உதைப்புகளுக்குமிடையே வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

7. உயரம் h ஐ உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ் வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் கூம்பின் அடியிலிருந்து தூரம் $\frac{1}{4}h$ இல் சமச்சீரச்சின் மீது உள்ளதெனக் காட்டுக.

ஆரை $R(>r)$ ஐயும் உயரம் $H(>h)$ ஐயும் உடைய ஒரு சீரான திண்மச் செவ் வட்ட உருளைக் குற்றியில் ஒரு கூம்புப் பொள்ளை ஆக்குவதன் மூலம் அடி ஆரை r ஐயும் உயரம் h ஐயும் உடைய ஒரு செவ் வட்டக் கூம்பிற்கான அச்சு தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. கூம்புப் பொள்ளின் சமச்சீரச்சு உருளைக் குற்றியின் சமச்சீரச்சுடன் ஒன்றுபடுகின்றது. தயாரிக்கப்படும் அச்சு உருவில் காட்டப்பட்டுள்ளவாறாகும். விட்டம் PQ விலிருந்து அச்சின் புவியீர்ப்பு மையத்துக்குள்ள தூரத்தைக் காண்க.

$R = 2r$ ஆகவும் அச்சின் புவியீர்ப்பு மையம் கூம்புப் பொள்ளின் உச்சியில் அமைந்தும் இருப்பின், $h = 2\left(4-\sqrt{14}\right)H$ ஐ **உய்த்தறிக.**

$R = 2r$ ஆக இருக்குமாறு அச்சு புள்ளி P யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு நாப்பத்திலே சுயாதீனமாகத் தொங்குகின்றது. மேலும் $H = 3r$ எனின், கீழ்முக நிலைக்குத்துடன் PQ வின் சாய்வைக் காண்க.



[பக். 4 ஐப் பார்க்க

8. A, B என்பன எவையேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளெனக் கொள்வோம். A, B ஆகியவற்றின் நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் முறையே A', B' எனக் கொள்வோம்.

$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ எனக் காட்டுக.

A, B ஆகியன சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனின்,

(i) A யும் B' உம்

(ii) A' உம் B' உம்

சாராதனவெனக் காட்டுக.

சர்வதேச ஒருநாள் தொடர் ஒன்றுக்கு முன்பாக இலங்கைக் குழுவின் நிரந்தரத் துடுப்பாட்டக்காரர் X அல்லது நிரந்தரப் பந்துவீச்சாளர் Y யிற்கு ஒரு காயம் ஏற்படுவதற்கான நேர்தகவு உண்டெனக் கடந்த காலத் தகவலிலிருந்து அறியக்கூடியதாக இருக்கின்றது. X இற்கு அத்தகைய ஒரு காயம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 உம் Y யிற்கு அத்தகைய ஒரு காயம் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.1 உம் ஆகும். காயங்கள் ஒன்றையொன்று சாராமல் ஏற்படலாம். N, A, B, AB ஆகிய நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன:

$N : X$ இற்கோ Y யிற்கோ காயம் ஏற்படுவதில்லை.

$A : X$ இற்கு மாத்திரம் ஒரு காயம் ஏற்படுகின்றது.

$B : Y$ யிற்கு மாத்திரம் ஒரு காயம் ஏற்படுகின்றது.

$AB : X, Y$ ஆகியோருக்குக் காயங்கள் ஏற்படுகின்றன.

$P(N) = 0.72,\ P(A) = 0.18,\ P(B) = 0.08,\ P(AB) = 0.02$ எனக் காட்டுக.

தரப்பட்ட நிகழ்ச்சி N, A, B அல்லது AB யிற்கு இலங்கைக் குழு ஒரு தொடரில் வெல்வதற்கான, ஒரு தொடரில் தோற்பதற்கான, அல்லது ஒரு தொடர் வெற்றி தோல்வியின்றி முடிவடைவதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவுகள் அட்டவணையில் காணப்படுகின்றன; இங்கு கலம் (U, V) ஆனது U தரப்படும்போது V யின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு $P(V|U)$ ஐ வகைகுறிக்கின்றது.

நிகழ்ச்சி (U)	ஒரு தொடரின் பேறு (V)		
	வெற்றி	தோல்வி	வெற்றி தோல்வி இல்லாத முடிவு
N	0.9	0.08	0.02
A	0.5	0.4	0.1
B	0.7	0.2	0.1
AB	0.3	0.6	0.1

(i) உகந்த மர வரிப்படத்தை வரைந்து அல்லது வேறு விதமாக, எதிர்வரும் தொடரில் இலங்கைக் குழு வெல்வதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) இலங்கைக் குழு ஒரு தொடரில் தோல்வி அடைந்துள்ளதெனத் தரப்படும்போது அத்தொடருக்கு முன்பாக Y யிற்கு ஒரு காயம் ஏற்பட்டிருப்பதற்கான நிபந்தனை நிகழ்தகவைக் காண்க.

9. (*a*) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ என்பது ஒரு குறித்த கற்கையிலிருந்து பெற்ற n நோக்கல்களின் தொடையெனக் கொள்வோம். இத்தரவுத் தொடையின் இடையையும் மாறற்றிறனையும் வரையறுக்க.

ஒரு குறித்த மாத்திரையில் உள்ள உயிர்ப்புக் கூறின் அளவு 52 mg இற்கும் 67 mg இற்குமிடையே இருப்பதாக எதிர்பார்க்கப்படுகின்றது. அடங்கியுள்ள உயிர்ப்புக் கூறின் அளவிற்காகச் சோதிக்கப்பட்ட 40 மாத்திரைகளைக் கொண்ட ஓர் எழுமாற்று மாதிரியின் இடையும் மாறற்றிறனும் முறையே 58 mg, 3.2 mg^2 ஆகும். தரவுகளை மறுபடியும் செவ்வைபார்த்தபோது இரு மாத்திரைகளின் 63 mg, 55 mg என்னும் இரு பெறுமானங்கள் தவறுதலாக 65 mg, 53 mg ஆக எடுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் காணப்பட்டது.

(i) இவ்வழு காரணமாக இடை பாதிக்கப்படவில்லை எனவும்

(ii) திருத்தம் காரணமாக மாறற்றிறன் குறைந்துள்ளது எனவும்

காட்டுக.

(*b*) ஒரு குறித்த நகரத்தில் களனி கங்கைக்குக் குறுக்கே பயணிகளைக் கொண்டு செல்லும் நோக்குடன் உயர்ந்தபட்சக் கொள்கலனிறை அண்ணளவாக 1500 kg இற்கு ஒரு பாதை (ferry) வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. இந்நிறையெல்லையை விஞ்சுதல் காப்பானதன்று ஆகையால், பிரதேசத்தின் உள்ளூராட்சி அதிகாரி இப்பாதைச் சேவையைப் பயன்படுத்துவார்களென எதிர்பார்க்கும் பயணிகளின் நிறையின் பரம்பலைக் காண்பதற்கு ஒரு கணிப்பீட்டை நடத்த விரும்புகின்றார். இக்குடித் தொகையிலிருந்து 200 பயணிகளைக் கொண்ட ஓர் எழுமாற்று மாதிரி எடுக்கப்பட்டது. இந்த 200 பயணிகளினதும் நிறைகள் கூட்டமாக்கிய மீடிறன் பரம்பலில் தரப்பட்டுள்ளன:

வகுப்பாயிடை (நிறை kg இல்)	மீடிறன்
0 - 10	10
10 - 20	27
20 - 30	33
30 - 40	35
40 - 50	38
50 - 60	30
60 - 70	19
70 - 80	8

(i) நிறையின் பரம்பலின் இடை, இடையம், ஆகாரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

ஒரு தடவைக்குக் காப்பாகக் கொண்டுசெல்லத்தக்க பயணிகளின் உயர்ந்தபட்ச எண்ணிக்கையின் சார்பில் பாதையின் நிறையெல்லையை எடுத்துரைப்பதற்கு உள்ளூராட்சி அதிகாரி எதிர்பார்கின்றார். மேற்குறித்த தகவல்களை அடிப்படையாய்க் கொண்டு ஒரு தடவையில் காப்பாகக் கொண்டு செல்லப்படத்தக்க பயணிகளின் உயர்ந்தபட்ச எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ii) பரம்பலின் நியம விலகலையும் ஓராயக் குணகத்தையும் கண்டு, பரம்பலின் வடிவத்தைப் பெறுக.

***