1 மெய்யெண்கள்

இப்பாடத்தைக் கற்பதன் மூலம் நீங்கள்

- எண் தொடைகளை அறிந்து கொள்வதற்கும்
- சேடுகளைப் பயன்படுத்திக் கோவைகளைச் சுருக்குவதற்கும்

தேவையான ஆற்றல்களைப் பெறுவீர்கள்.

1.1 எண்களை வகைப்படுத்தல்

இற்றைக்கு 3 0000 ஆண்டுகளுக்கு முன்னர் மனித இனத்தில் எண்கள் பற்றிய எண்ணக் கரு உருவாகியதாக நம்பப்படுகின்றது. பல்வேறு நாகரிகங்களில் சுயாதீனமாக உருவாகி வளர்ந்த இவ்வெண்ணக்கரு முழு உலகிலும் விருத்தியடைந்து இன்று கணிதம் என்னும் உலகளாவிய பாடத்துறையாக மாறியுள்ளது.

தொடக்கத்தில் நாகரிகத்தில் எண்களை எண்ணுதல், கணக்கு வைத்தல் போன்ற எளிய பணிகளுக்கு எண்கள் பயன்படுத்தப்பட்டனவென நாம் கருதலாம். தொடக்கத்தில் உருவாகிய ''ஒன்று'' என்னும் எண்ரீதியான எண்ணக்கரு தொடர்ச்சியாக ''இரண்டு'' ஆக மாறிப் பின்னர் ''மூன்று'', ''நான்கு'' என வளர்ந்தது. இவ்வாறு மக்கள் தங்களுக்கு விருப்பமான அளவைப் பெயரிட முடிந்ததெனப் பிற்காலத்தில் விளங்கிக் கொள்ளப்பட்டது. இவ்வாறு பெயரிடுவதற்குப் பல்வேறு நாகரிகங்களில் பல்வேறு குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டன.

வரலாற்றுரீதியான சான்றுகளுக்கேற்ப இன்று நாம் பயன்படுத்தும் 1, 2, 3 போன்ற எண்கள் குறிக்கும் இலக்கங்கள் இந்தியாவில் பயன்படுத்த ஆரம்பிக்கப்பட்டனவென ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது. அது மாத்திரமன்று பூச்சியம் என்னும் எண்ணக்கருவை ஓர் எண்ணாகப் பயன்படுத்திய பெருமையும் இடப் பெறுமானத்தை அடிப்படையாகக் கொண்ட ஓர் எண் முறைமையை உருவாக்கிய பெருமையும் இந்தியாவிற்கு உரியனவாகும். இந்த எண் முறைமை இந்து அராபிய எண் முறைமையாக அழைக்கப்பட்ட அதே வேளை அதன் பயன்பாடு வர்த்தக மார்க்கமாக மத்திய கிழக்கிற்கும் அங்கிருந்து ஐரோப்பாவிற்கும் பரவியதாக நம்பப்படுகின்றது. இன்று இந்த எண் முறைமை நியமப் பொது எண் முறைமை என முழு உலகினாலும் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

எண் பயன்பாடு தொடர்பாக மனிதப் பரிணாமத்தில் ஏற்பட்ட ஒரு பெரும் புரட்சியாக எண்களைப் பயன்படுத்தி அடிப்படைக் கணிதச் செய்கைகளை (கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல்) செய்தலைக் காட்டலாம். இன்றைய தொழினுட்ப உலகில் எண்களும் அவற்றின் மீது செய்யும் கணிதச் செய்கைகளும் இல்லாமல் மனித நிலைத்திருக்கை பற்றிச் சிந்தித்துப் பார்க்க முடியாது.

மனிதத் தேவைகளுக்காக முதலில் பயன்படுத்தப்பட்ட எண்களாக 1, 2, 3, ... ஆகியவற்றைக் காட்டலாமெனினும் பிற்காலத்தில் பூச்சியம், பின்ன எண்கள், மறை எண்கள் ஆகியன அவற்றுடன் சேர்க்கப்பட்டன. கணிதம் ஒரு தனிப் பாடமாக மேம்பட்ட காலத்தில் வேறு பல்வகை எண்கள் பற்றிக் கணிதவியலாளர்களின் கவனம் சென்றது. இப்பாடத்தில் நாம் அத்தகைய பல்வேறு எண் தொடைகள் பற்றியும் அவற்றின் குறிப்பீட்டு முறைமைகளும் பண்புகளும் பற்றியும் கற்கவுள்ளோம்.

நிறைவெண் தொடை ($\mathbb{Z}$)

இயற்கையாக நாம் முதலில் 1, 2, 3, ... என இளம் பிராயத்தில் கற்ற எண்களை இனங்காண்கின்றோம். இவ்வெண்கள் **எண்ணும் எண்கள்** எனப்படும் அதே வேளை அவை எல்லாம் அடங்கும் தொடை, தொடைக் குறிப்பீட்டில் பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$\{1, 2, 3, ...\}$$

எண்ணும் எண்கள் என்னும் பெயர் கிடைப்பதற்கான காரணம் மிகத் தெளிவாகும். எனினும் கணிதப் பிரயோகத்தில் இப்பெயர் அரிதாகவே பயன்படுத்தப்படுகின்றது. இத்தொடைக்குப் பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் பெயர் நேர் நிறைவெண் தொடை என்பதாகும். அத்தொடை $\mathbb{Z}^+$ இனால் குறிப்பிடப்படும்.

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$$

இதற்கேற்ப 1, 2, 3, ... ஆகிய எண்கள் நேர் நிறைவெண்கள் எனப்படும்.

$-1, -2, -3, ...$ ஆகிய எண்கள் மறை முழு எண்களாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. இத்தொடையைக் குறிப்பிடுவதற்கு பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் ஒரு குறியீடு இல்லாவிட்டாலும் சில கணிதவியலாளர்கள் தமது பாடத்துறையின் தேவைகளுக்கேற்ப அதற்காக $\mathbb{Z}^-$ என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துகின்றனர்.

நிறைவெண்களாக நேர் நிறைவெண்கள், பூச்சியம், மறை நிறைவெண்கள் ஆகிய எல்லா எண்களும் கருதப்படுகின்றன. அத்தொடை $\mathbb{Z}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படுகின்றது. அதற்கேற்ப

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

என அல்லது

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$$

எனக் குறிப்பிடப்படும்.

இயற்கை எண் தொடை $(\mathbb{N})$

அடுத்ததாக நாம் 1, 2, ... என்றவாறான எண் தொடையை இனங்காண்கின்றோம். அதாவது நேர் நிறைவெண் தொடையாகும். இந்த எண் தொடை இயற்கை எண் தொடை எனப்படும் அதே வேளை அது $\mathbb{N}$ இன் மூலம் குறிப்பிடப்படும். அதாவது

$$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

குறிப்பு : எவ்வெண்கள் இயற்கை எண்களாகக் கருதப்படுகின்றன என்பது பற்றிக் கணிதவியலாளர்களிடையே பொது உடன்பாடு இல்லை. முற்காலத்தில் 1, 2, 3, ... ஆகிய நேர் நிறைவெண்களே இயற்கை எண்களாக அழைக்கப்படுகின்றன. அப்பெயர் பொருத்தமானதாகத் தெரிகின்றது. எனினும் அண்மைக் காலத்தில் (20 ஆம் நூற்றாண்டில்) வாழ்ந்த சில சிரேஸ்ட கணிதவியலாளர்கள் (விசேடமாக, தொடைக் கொள்கை பற்றிய நிபுணர்கள்) தமது நூல்களில் குறித்த சாதாரண காரணங்களுக்காக 0 ஐயும் ஓர் இயற்கை எண்ணாகக் கருதினர். பூச்சியமும் நேர் நிறைவெண்களும் இடம்பெறும் தொடையைக் குறிப்பதற்கு அப்போது ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட ஒரு பெயரும் குறிப்பீடும் இராமை அதற்குக் காரணமாக இருக்கலாம். இன்று எழுதப்படும் எல்லா நூல்களிலும் நூலாசிரியர்கள் தாம் கருதும் இயற்கை எண்கள் யாவையென முதலில் குறிப்பிடுகின்றனர்.

விகிதமுறும் எண் தொடை $(\mathbb{Q})$

நிறைவெண்களைப் போன்று பின்னங்களையும் எண்களாகக் கருதலாம் எனவும் பின்னங்களுக்கும் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளைச் செய்யலாம் எனவும் நாம் கண்டோம். ஒவ்வொரு நிறைவெண்ணையும் பின்ன எண்ணாக எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $2 = \frac{2}{1}$ என எழுதலாம்). அவ்வாறே ஒரே எண் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஒரு பின்னத்தை வேறு விதத்தில் எழுதலாம் (ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$). மறைப் பின்னங்களையும் நாம் கண்டுள்ளோம் ($-\frac{2}{5}$, $-\frac{11}{3}$ ஆகியன). நாம் பொதுவாக ஒரு பின்ன எண்ணின் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் இருக்க வேண்டும் எனக் கருதியிருந்தாலும் அது அவ்வாறன்று. ஓர் உதாரணமாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்பதுவும் ஒரு பின்ன எண்ணாகும். ஆனால், பகுதியிலும் தொகுதியிலும் நிறைவெண்கள் உள்ள பின்னங்கள் (பகுதியில் 0 இல்லாதபோது) கணிதத்தில் விசேட முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருக்கும் அதே வேளை அவ்வெண்கள் **விகிதமுறும் எண்கள்** எனப்படும். அத்தொடைகள் $\mathbb{Q}$ வினால் குறிக்கப்படும். இதற்கேற்பப் பிறப்பிக்கும் தொடை முறையைப் பயன்படுத்தி விகிதமுறும் எண் தொடையைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \;:a, b\in \mathbb{Z},\ b\neq 0 \right\}.$$

விகிதமுறும் எண் தொடையை வரையறுக்கத்தக்க வேறு விதங்களும் உள்ளன. அவற்றில் ஒரு விதம்

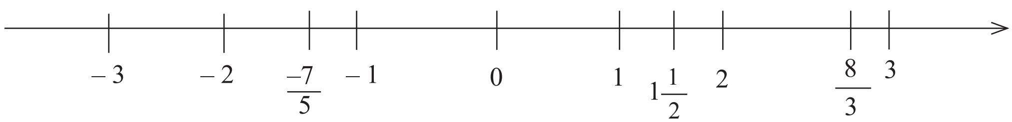
$$\mathbb{Q}=\left\{ \frac{a}{b} \;: a\in \mathbb{Z}\,, b\in \mathbb{Z}^{+} \right\}.$$

இவ்விரு வரைவிலக்கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று சமவலுவானவை என்பதை நன்றாக அவதானிக்க (ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் பகுதியில் 0 இருக்க முடியாமையாலும் மறை விகிதமுறும் எண்கள் எல்லாம் தொகுதியின் மறை நிறைவெண்களிலிருந்து கிடைக்கின்றமையாலும் இரண்டாம் வரைவிலக்கணத்திலிருந்தும் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் கிடைக்கின்றன).

விகிதமுறா எண்களின் தொடை $(\mathbb{Q}')$

இப்போது விகிதமுறா எண்களின் தொடையை இனங்காண்பதற்கு மிகவும் உகந்த தருணமாகும்.நாம் இதற்கு முன்னைய தரங்களில் ஓர் எண் கோட்டினை வரைந்து எண்கள் பற்றிக் கற்ற விதத்தை நினைவுகூர்வோம்.

அதனைப் பற்றி மீண்டும் ஆராய்வோம். இரு பக்கங்களுக்கும் தேவையான அளவுக்கு நீட்டப்படத்தக்க ஒரு நேர்கோட்டைக் கருதுவோம். அக்கோட்டின் மீது ஒரு விருப்பமான புள்ளியை 0 எனப் பெயரிடுவோம். 0 வின் ஒரு பக்கத்தில் (வழமையாக வலது பக்கத்தில்) சம தூரங்களில் 1, 2, 3, ... என்னும் நேர் நிறைவெண்களும் மற்றைய பக்கத்தில் –1, –2, –3, ... என்னும் மறை நிறைவெண்களும் குறிக்கப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். இதற்கேற்ப எல்லா நிறைவெண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அதன் பின்னர் எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் இக்கோட்டின் மீது காட்டப்பட்டுள்ளனவெனக் கொள்வோம். அவ்வாறு குறித்த சில புள்ளிகள் பின்வரும் உருவில் காணப்படுகின்றன.



இப்போது இக்கோட்டின் மீது எல்லா விகிதமுறும் எண்களும் (நிறைவெண்களும் உட்பட) குறிக்கப்பட்டு முடிந்துள்ளனவெனக் கொள்வோம். அப்போது நேர்கோடு மீது எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் ஒத்த ஓர் எண் குறிக்கப்படுகின்றதென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? வேறொரு விதத்தில் கேட்டால், கோடு வழியே 0 இலிருந்து உள்ள ஒவ்வொரு தூரத்தையும் ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக எழுதலாமென நீங்கள் நினைக்கின்றீர்களா? உண்மையில் வேறு புள்ளிகள் குறிப்பிடாமல் எஞ்சியிருக்கின்றன. அதாவது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணினால் வகைகுறிக்கப்படாத புள்ளிகளும் (எண்கள்)

இக்கோட்டின் மீது எஞ்சியுள்ளன. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருப்பவை $\frac{a}{b}$ (இங்கு a, b நிறைவெண்களாகும்). என்ற வடிவில் **எழுதமுடியாத** புள்ளிகள் என்பது தெளிவாகின்றது. இவ்வாறு வகைகுறிக்கப்படாமல் எஞ்சியிருக்கும் புள்ளிகள் (எண்கள்) **விகிதமுறா** எண்கள் எனப்படும்.

விகிதமுறா எண் தொடையை வகைகுறிப்பதற்கு வேறொரு குறியீடு இல்லாத அதே வேளை அது $\mathbb{Q}$ வின் நிரப்பித் தொடை என்பதால் $\mathbb{Q}'$ இனால் காட்டப்படும்.

விகிதமுறா எண்களுக்கு உதாரணங்களாக $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ஆகிய எண்களைக் காட்டலாம். உண்மையில் ஒரு நிறைவர்க்க எண் இல்லாத எந்த ஒரு நிறைவெண்ணினதும் வர்க்க மூலம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதனைத் தவிர யாதாயினும் ஒரு வட்டத்தின் பரிதி அதன் விட்டத்துடன் கொண்டுள்ள விகிதம் π என்பதும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். கணிப்பதன் வசதிக்காக π யின் அண்ணளவுப் பெறுமானமாக $\frac{22}{7}$ என எடுக்கப்படுகின்றது.

மெய்யெண் தொடை ($\mathbb{R}$)

மேலேயுள்ள கலந்துரையாடலின்படி ஓர் எண் கோட்டின் மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் விகிதமுறு எண்களாக அல்லது விகிதமுறா எண்களாகக் குறிக்கலாம். இவ்விகிதமுறு, விகிதமுறா எண்கள் யாவற்றையும் அதாவது எண்கோட்டின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் (எண்கள்) அனைத்தும் பொதுவாக **மெய்யெண்கள்** என அழைக்கப்படும். இம்மெய்யெண்களின் தொடை $\mathbb{R}$ இனால் குறிக்கப்படும்.

எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

எந்தவொரு மெய்யெண்ணையும் தசம வகைக்குறிப்பாகக் காட்டலாம். முதலில் ஓர் உதாரணமாகச் சில விகிதமுறும் எண்களின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம்.

1. விகிதமுறும் எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பு

$$4 = 4.000 \ldots$$

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.5000 \ldots$$

$$\frac{11}{8} = 1.375 = 1.375000 \ldots$$

$$\frac{211}{99} = 2.131313\ldots$$

$$\frac{767}{150} = 5.11333\ldots$$

$$\frac{37}{7} = 5.285714285714285714 \ldots$$

இத்தசம வகைக்குறிப்புகளுக்கு உள்ள ஒரு பொது இயல்பு தசமப் புள்ளியின் ஒரு குறித்த சந்தர்ப்பத்திற்குப் பின்னர் (அல்லது முதலில்) ஓர் எண் குறித் (Numeral) தொகுதி (அல்லது ஓர் எண் குறிக்கும் இலக்கம்) மீண்டும் மீண்டும் மீளுதலாகும். மீளுதல் எனப்படுவது சம இடைவெளியில் மீண்டும் மீண்டும் எழுதுவது என்பதாகும். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{2}$ இன் தசம வகைக்குறிப்பில் எண் குறி இலக்கம் 0 ஆனது இரண்டாம் தசம தானத்திலிருந்து மீளுகின்றது. 4 இன் எண் குறி இலக்கம் 0 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{211}{99}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கங்களின் தொகுதி 13 ஆனது தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. $\frac{37}{7}$ இல் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி 285714 தொடக்கத்திலிருந்து மீளுகின்றது. இவ்வியல்பு, அதாவது ஒரு குறித்த எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி தொடர்ச்சியாக மீளுதல் ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணுக்கும் பொதுவான இயல்பாகும். இவ்வாறு மீளும் பகுதி 0 எனின் அத்தகைய தசமம் **முடிவுறு தசமம்** (Finite decimal) எனப்படும். அதே வேளை அவ்வாறு இராவிட்டால் அவை **மடங்கு** (Recurring /மீளும்) **தசமம்** எனப்படும். இதற்கேற்ப குறித்த உதாரணத்தில் $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{8}{11}$ ஆகியன முடிவுறு தசமங்களாக இருக்கும் அதே வேளை மற்றைய எல்லாம் மடங்கு தசமங்களாகும். இதற்கேற்ப நாம் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

ஒவ்வொரு விகிதமுறும் எண்ணையும் முடிவுறு தசமம் அல்லது மடங்கு தசமமென எழுதலாம்.

விகிதமுறும் எண்கள் பற்றிய ஓர் அபூர்வ பேறைப்பற்றிக் கற்போம். ஒரு குறித்த விகிதமுறும் எண்ணின் தசமத்தை வகைகுறிக்கும் முடிவுறு தசமம் பற்றிச் சிந்திப்போம். $\frac{a}{b}$ என்னும் விகிதமுறும் எண்ணில் தசம வகைக்குறிப்பு முடிவுறு தசமம் எனவும் a, b ஆகியவற்றில் பொதுக் காரணிகள் இல்லையெனவும் கொள்வோம். அப்போது பகுதியில் (அதாவது b யில்) 2 அல்லது 5 (அல்லது 2, 5 ஆகிய இரண்டும்) இன் வலுக்கள் மாத்திரம் காரணிகளாக உள்ளன. ஒரு மடங்கு தசமமாகிய ஒரு விகிதமுறும் எண்ணின் 2, 5 ஆகியன தவிர்ந்த வேறொரு முதன்மை எண் பகுதியில் ஒரு காரணியாக இருத்தல் வேண்டும்.

மடங்கு தசமங்களை எழுதும்போது பின்வரும் குறியீட்டு முறைக்கேற்ப எழுதப்படும்.

மடங்கு தசமம்	சுருக்கிக் காட்டல்
12.4444...	$12.\dot{4}$
2.131313...	$2.\dot{1}\dot{3}$
5.11333...	$5.11\dot{3}$
5.285714285714285714...	$5.\dot{2}8571\dot{4}$

பயிற்சி 1.1

1. கீழே தரப்பட்டுள்ள விகிதமுறும் எண்களின் ஒவ்வோர் எண்ணும் முடிவுறு தசமமா, மடங்கு தசமமா என வகுக்காமல் குறிப்பிடுக. மடங்கு தசமமாக இருக்கும் பின்னங்களைத் தசம வடிவத்தில் காட்டி சுருக்கி எழுதுக.

   a. $\frac{3}{4}$ b. $\frac{5}{5}$ c. $\frac{3}{7}$ d. $\frac{5}{9}$ e. $\frac{5}{21}$ f. $\frac{7}{32}$

   g. $\frac{19}{33}$ h. $\frac{13}{50}$ i. $\frac{7}{64}$ j. $\frac{5}{84}$ k. $\frac{15}{128}$ l. $\frac{41}{360}$

2. விகிதமுறா எண்ணொன்றின் தசம வகைக்குறிப்பு

இப்போது நாம் ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பைப் பார்ப்போம். ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்வித எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதியின் மீளுதல் நடைபெறுவதில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{2}$ இன் பெறுமானத்தை 60 தசம தானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கும்போது இவ்வாறு கிடைக்கும்.

1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679...

நாம் நிதமும் சந்திக்கும் ஓர் எண்ணாகிய π யும் ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். π யின் பெறுமானம் 60 தசமதானங்கள் வரைக்கும் கணிக்கப்படும்போது பின்வருமாறாகும்.

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944...

விகிதமுறா எண்கள் பற்றிப் பின்வருமாறு எடுத்துரைக்கலாம்.

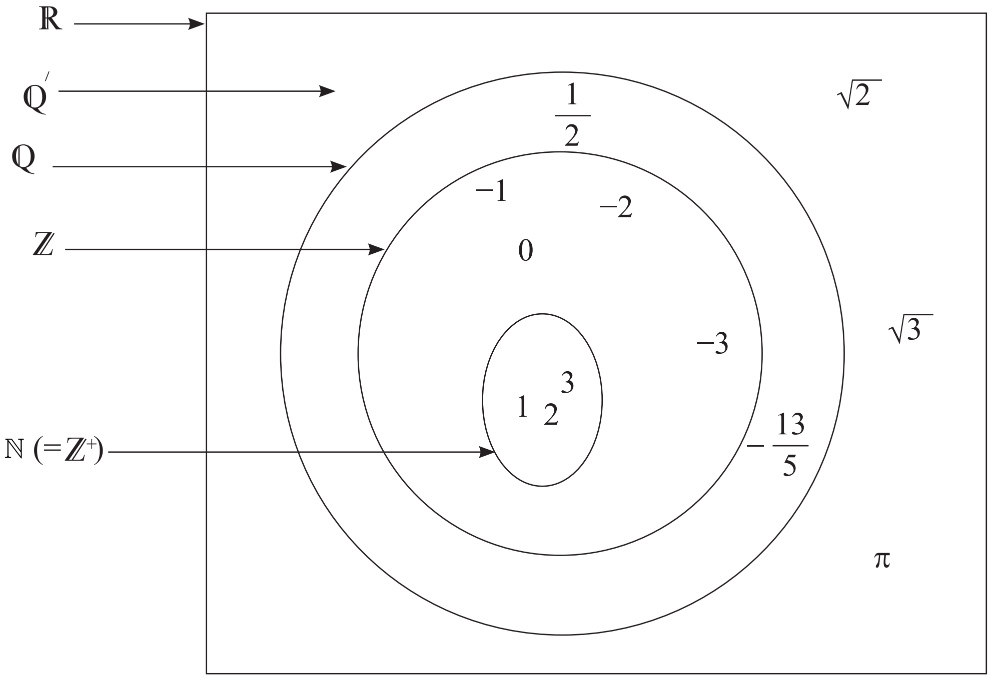
ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் மீளும் எண் குறிக்கும் இலக்கத் தொகுதி இல்லை. அதற்கேற்ப மடங்கு தசமம் அல்லாத முடிவில் தசம எண்கள் விகிதமுறா எண்களாகும்.

குறிப்பு : விகிதமுறா எண்களின் தசம வகைக்குறிப்புப் பற்றி விவரிக்கும்போது ஏற்படும் ஒரு பொது வழு ''ஒரு விகிதமுறா எண்ணின் தசம வகைக்குறிப்பில் எவ்விதக் கோலமும் இல்லாமை'' ஆகும். ''கோலம்'' என்னும் சொல் கணிதத்தில் நன்றாக வரையறுக்கப்படாமை இங்கு உள்ள பிரச்சினையாகும். ஓர் உதாரணமாகக் கீழே எழுதப்பட்டுள்ள தசம எண்ணுக்கு ஒரு தெளிவான கோலம் உண்டு.

0.1010010001000010000001...

எனினும் அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாகும். இதில் எந்த ஒரு தசமப் பகுதியும் மீளவில்லை.

இதுவரைக்கும் கற்ற எண் தொடைகள் எல்லாவற்றையும் மெய்யெண் தொடையாகவும் அதனை அகிலத் தொடையாகக் கொண்டு மற்றைய எண் தொடைகளை அதன் தொடைப்பிரிவுகளாகப் பின்வருமாறு ஒரு வென் வரிப்படத்தில் காட்டலாம். விளங்கிக் கொள்வதன் வசதிக்காகச் சில தொடைப்பிரிவுகளில் இருக்க வேண்டிய சில மூலகங்கள் வீதமும் எழுதப்பட்டுள்ளன.



பயிற்சி 1.2

1. பின்வரும் மெய்யெண்களை விகிதமுறும் எண்களாகவும் விகிதமுறா எண்களாகவும் வேறுபடுத்திக் காட்டுக.

a. $\sqrt{2}$ **b.** $\sqrt{25}$ **c.** $\sqrt{6}$ **d.** $\sqrt{11}$ **e.** 6.52

2. கீழே தரப்பட்டுள்ள கூற்றுகள் சரியானவையா, தவறானவையா எனத் தீர்மானிக்குக.

(a) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் முடிவுறு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

(b) முடிவில் தசமத்தில் விகிதமுறும் எண்களும் இருக்கலாம்.

(c) எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் மடங்கு தசமம் அல்லது முடிவில் தசமம் ஆகும்.

(d) 0.010110111011110... என்பது ஒரு விகிதிமுறு எண்ணாகும்.

1.2 சேடுகள்

கணிதத்தில் மூலக் குறியாக அழைக்கப்படும் " $\sqrt{\ }$ " ஐப் பயன்படுத்தி எண் (அத்துடன் அட்சரகணிதக்) கோவைகளைக் காட்டிய விதம் உங்கள் நினைவில் இருக்கும் என்பதில் சந்தேகமில்லை. ஓர் உதாரணமாக $\sqrt{4}$ ஆனது " 4 இன் நேர் வர்க்கமூலம்" என அழைக்கப்படும் அதே வேளை வர்க்கிக்கும்போது 4 கிடைக்கும். நேர் எண் அதாவது 2 அதன் மூலம் காட்டப்படுகின்றது. எந்த ஒரு நேர் நிறைவெண் x இன் வர்க்கமூலமாகிய $\sqrt{x}$ உம் ஒரு நேர் நிறைவெண்ணாக இருப்பின் அப்போது $\sqrt{x}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலம் எனப்படும். இதற்கேற்ப $\sqrt{4}$ ஆனது நிறை வர்க்கமூலமாகும். எனினும் $\sqrt{2}$ ஒரு நிறை வர்க்க மூலமன்று எனவும் அது அண்ணளவாக 1.414 எனவும் நாம் இதற்கு முன்னர் பார்த்தோம். மேலும் $\sqrt{2}$ ஆனது ஒரு விகிதமுறா எண் எனவும் நாம் இப்பாடத்தில் கற்றோம். இந்த "$\sqrt{\ }$" குறி இடப்பட்ட ஆனால் நிறை வர்க்கமூலம் இல்லாத கோவைகள் **சேடுகள்** எனப்படும்.

உண்மையில் "$\sqrt{\ }$ " இட்டுக்கொண்டு வர்க்கமூலம் தவிர்ந்த வேறெந்த மூலத்தையும் காட்டலாம். உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$ ஆனது 2 இன் மூன்றாம் மூலத்திற்கு நேர் எண் காட்டப்படுகின்றது. அது 2 இன் கன (முப்படி) மூலம் எனப்படும். அது ஒரு விகிதமுறா எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை அதன் பெறுமானம் அண்ணளவாக 1.2599 ஆகும். (1.2599^3 இன் பெறுமானத்தைக் காண்பதன் மூலம் நீங்கள் இதனை நிறுவலாம்). இவ்வாறே 2 இன் நான்காம் மூலம், 2 இன் ஐந்தாம் மூலம் ஆகியவற்றையும் வரையறுக்கலாம் (உதாரணமாக $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{8.24}$) இத்தகைய கோவைகளும் சேடுகளாகும். எனினும் நாம் இப்பாடத்தில் நேர் நிறைவெண்களின் வர்க்கமூலங்கள் உள்ள சேடுகளை மாத்திரம் கருதுவோம்.

நிறை வர்க்கம் அல்லாத ஓர் எண்ணின் வர்க்க மூலம் முடிவுறு தசமம் அல்லது மடங்கு தசமம் அன்று. அதற்கேற்ப சேடுகள் விகிதமுறா எண்கள் என்பதை அவதானிக்க.

நாம் இங்கு விசேடமாகச் சேடு வடிவத்தில் உள்ள கோவைகளைச் சுருக்குதல் பற்றிக் கருதுகிறோம். இத்தகைய சுருக்கல்கள் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தனவாக இருப்பதற்குப் பல காரணங்கள் உள்ளன. ஒரு காரணமாகக் கணிப்பை எளிதாக்கலைக் காட்டலாம். ஓர் உதாரணமாக $\frac{1}{\sqrt{2}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணவேண்டியுள்ளபோது $\sqrt{2}$ இதற்காக 1.414 ஐ இட்டால் $\frac{1}{1.414}$ இன் பெறுமானத்தைக் காணலாம். இவ்வகுத்தல் ஓரளவு நீண்டது. ஆனால் பின்வருமாறு சுருக்கிக் கணித்தல் மிகவும் எளிதானது.

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ (பின்னத்தில் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்கும்போது)

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{1.414}{2} = 0.707.$

மேலும் ஒரு காரணமாக, கணிக்கும்போது எழும் வழுவை இழிவளவாக்குவதாகக் காட்டலாம். அதற்காக ஓர் உதாரணமாக, $\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்போம். இங்கு $\sqrt{20}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 4.5 ஐயும் $\sqrt{5}$ இன் கிட்டிய பெறுமானமாக 2.2 ஐயும் கொள்வோம். அப்போது

$$\frac{\sqrt{20}}{2} - \sqrt{5} = \frac{4.5}{2} - 2.2 = 2.25 - 2.2$$
$$= 0.05$$

எனினும் இக்கோவையில் உண்மைப் பெறுமானம் 0 ஆகும். இவ்வாறு வேறு விடை கிடைப்பதற்கு ஒரு காரணம் $\sqrt{20}$, $\sqrt{5}$ இற்கு ஒரு அண்ணளவுப் பெறுமானத்தைப் பயன்படுத்துகின்றமையாகும். ஆனால், தரப்பட்டுள்ள கோவையை வேறு விதத்தில் சுருக்குதன் மூலம் சரியான பெறுமானமாகிய 0 ஐப் பெறலாம்.

$\sqrt{20}$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ள சேட்டில் இருக்கும் சிறப்பியல்பு முழு எண்ணும் வர்க்கமூலக் குறியில் இருத்தலாகும். அத்தகைய சேடுகள் **முழுமைச் சேடு** எனப்படும்.

$6\sqrt{15}$ என எழுதும்போது $6 \times \sqrt{15}$ எனக் கருதப்படுகின்றது. அது ஒரு சேட்டினதும் ஒரு விகிதமுறு எண்ணினதும் (1 இற்குச் சமமற்றது) பெருக்கமாகும். அத்தகைய சேடு **கலப்புச் சேடு** எனப்படும்.

ஒரு சேடு $a\sqrt{b}$ வடிவத்தில் எழுதப்படும்போது மிக எளிய வடிவத்தில் இருப்பதாகக் கூறப்படும். இங்கு a ஆனது ஒரு விகிதமுறும் எண்ணாக இருக்கும் அதே வேளை b யின் காரணிகளாக ஒரு நிறை வர்க்கம் இருக்கக்கூடாது. ஓர் உதாரணமாக $6\sqrt{15}$ ஆனது மிக எளிய வடிவத்தில் உள்ள ஒரு சேடாக இருக்கும் அதே வேளை $5\sqrt{12}$ மிக எளிய வடிவத்தில் இல்லை. அதற்குக் காரணம் 12 இன் ஒரு காரணியாக ஒரு நிறை வர்க்கமான 4 இருத்தலாகும்.

முதலில் சுட்டிகள் பற்றிய இயல்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகள் உள்ள கோவைகள் சுருக்கப்படும் விதத்தை உதாரணங்களின் மூலம் கருதுவோம்.

உதாரணம் 1

சுருக்குக. $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
இங்கு $\sqrt{5}$ என்பதை ஒரு தெரியாக் கணியமாக எண்ணிச் சுருக்கலாம்.

எனவே $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$.

இது $3x + 6x = 9x$ எனச் சுருக்குவது போன்றதாகும். இத்தகைய சேடு வடிவில் மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதை அவதானிக்க. $\sqrt{5}$ இற்குக் கிட்டிய ஒரு பெறுமானத்தை இட்டுச் சுருக்குவது சேடு வடிவில் சுருக்குதல் அல்ல என்பதை நினைவில் கொள்க.

நினைவில் கொள்ளவேண்டிய இன்னுமொரு முக்கிய விடயமானது, $3\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$ போன்ற கோவைகளை (சேடுகளை) மேலும் சுருக்க முடியாது என்பதாகும்.

இனிச் சுட்டி பற்றிய பண்புகளைப் பயன்படுத்திச் சேடுகளைக் கொண்ட கோவைகளைச் சுருக்குவதை உதாரணங்களின் மூலம் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 2

$\sqrt{20}$ என்னும் சேடை எளிய வடிவில் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{5} \quad (\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ என்பதால்})$$

$$= 2 \times \sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

உதாரணம் 3

$4\sqrt{5}$ என்னும் சேடை முழுமைச் சேடாகப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.

$$4\sqrt{5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} \quad (4 = \sqrt{16} \text{ என்பதால்})$$

$$= \sqrt{16 \times 5}$$

$$= \sqrt{80}$$

சேடுகளைப் பெருக்கும் முறையையும் வகுக்கும் முறையையும் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 4

$5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}$

பெருக்கும்போது விகிதமுறு எண்களையும் விகிதமுறா எண்களையும் வெவ்வேறாகப் பெருக்குவோம்.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} &= 5 \times 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \\ &= 20 \times \sqrt{3 \times 2} \\ &= 20\sqrt{6} \end{aligned}$$

உதாரணம் 5

$3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{20}$ முழுமைச் சேடாகும். அதனை $3\sqrt{4 \times 5}$ என எழுதலாம்.

மேலும் சுருக்கி $3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ எனக் காட்டலாம்.

அப்போது

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} \div 2\sqrt{5} &= \frac{3\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

இனி நாம் $\frac{a}{\sqrt{b}}$ என்ற வடிவிலான கோவைகளைச் சுருக்கும் முறை பற்றி ஆராய்வோம். இவ்வாறான பின்னங்களாக $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இவ்வொவ்வொரு பின்னத்திலும் பகுதியில் வர்க்கமூலத்துடனான ஒரு கோவை உள்ளது. வர்க்கமூலத்துடனான அக்கோவைக்குப் பதிலாகப் பகுதியில் நிறைவெண் ஒன்று (அல்லது விகிதமுறும் எண்) பெறப்படும் வகையில் இவற்றை ஒழுங்கு செய்யும் விதத்தை இப்போது ஆராய்வோம்.

உதாரணம் 6

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ என்னும் எண்ணைப் பகுதியில் ஒரு நிறைவெண்ணைக் கொண்ட பின்னமாகத் தருக.

இங்கு பயன்படுத்தப்படும் முறையானது $\frac{3}{\sqrt{2}}$ இன் பகுதியையும் தொகுதியையும் $\sqrt{2}$ இனால் பெருக்குதலாகும்.

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{2}} &= \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

இங்கு செய்யப்பட்ட செய்கை பகுதியை விகிதமுறும் எண்ணாக மாற்றுதல் எனப்படும்.

உதாரணம் 7

$\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ இன் பகுதியை விகிதமுறு எண்ணாக மாற்றுக.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

சேடுகளுடனான பிரசினங்கள் சிலவற்றைத் தீர்க்கும் விதத்தைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 8

சுருக்குக. $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$

$$4\sqrt{63} = 4 \times \sqrt{9 \times 7} = 4 \times 3\sqrt{7}$$
$$= 12\sqrt{7}$$
$$8\sqrt{28} = 8 \times \sqrt{4 \times 7} = 8 \times 2\sqrt{7}$$
$$= 16\sqrt{7}$$

எனவே $4\sqrt{63} - 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28} = 12\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 16\sqrt{7}$

$$= -9\sqrt{7}$$

இறுதியாகச் சேடுடன் கூடிய சிக்கலான ஒரு பிரசினத்தைத் தீர்க்கும் முறையைக் கவனிப்போம்.

உதாரணம் 9

சுருக்குக. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \dfrac{3}{\sqrt{12}}$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \sqrt{75} - \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4 \times 3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{25 \times 3} - \frac{3}{\sqrt{4} \times \sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3}$$

$$= 7\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

பயிற்சி 1.3

1. முழுமைச் சேடைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $\sqrt{20}$ b. $\sqrt{48}$ c. $\sqrt{72}$ d. $\sqrt{28}$

e. $\sqrt{80}$ f. $\sqrt{45}$ g. $\sqrt{98}$ h. $\sqrt{147}$

2. சேடை முழுமைச் சேடாக மாற்றுக.

a. $2\sqrt{3}$ b. $2\sqrt{5}$ c. $4\sqrt{7}$ d. $5\sqrt{2}$ e. $6\sqrt{11}$

3. சுருக்குக.

a. $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$

c. $4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$

d. $6\sqrt{11} + 3\sqrt{7} - 2\sqrt{11} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{7}$

e. $8\sqrt{3} + 7\sqrt{7} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$

4. சுருக்குக.

a. $3\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}$ b. $5\sqrt{11} \times 3\sqrt{7}$ c. $\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}$

d. $4\sqrt{14} \div 2\sqrt{7}$ e. $6\sqrt{27} \div 3\sqrt{3}$ f. $\sqrt{48} \div 5\sqrt{3}$

5. விகிதமுறா எண்களைப் பகுதியெண்ணாகக் கொண்ட பின்னங்களை விகிதமுறும் பகுதியெண்ணாக மாற்றுக.

a. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ b. $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ c. $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ d. $\dfrac{12}{2\sqrt{3}}$ e. $\dfrac{27}{3\sqrt{2}}$

f. $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ g. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}$ h. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ i. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

6. சுருக்குக.

a. $2\sqrt{27} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{28}$

b. $3\sqrt{63} - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{27} + 3\sqrt{3}$

c. $2\sqrt{128} - 3\sqrt{50} + 2\sqrt{162} + \dfrac{4}{\sqrt{2}}$

d. $\sqrt{99} - 2\sqrt{44} + \dfrac{110}{\sqrt{11}}$